軸対称超音速流中のプラントル・メイヤー型膨脹波の解析*

野　溝　国　生*1・谷　　　喬*2

Prandtl-Mayer type expansion wave in Axi-symmetric Supersonic Flow

Kunio NOMIZO and Takashi TANI

ABSTRACT

In a two-dimentional flow we have an exact analytical from for Prandtl Meyer waves so the basis of the characteristic method is well established. but in three dimentional axially symmetric flow, no exact solution exists for such expansion waves.

In this report, we compared a new type of similar solution of linearized flow with the result by the characteristic method. This result is used to study the periodic structure of an exhaust jet.

概　　要

二次元超音速流がプラントル・メイヤー波によって厳密に扱いうるのに対し，軸対称流はこれに対応する有心膨張波の厳密解が得られていないため，特性曲線法の基礎が充分でないと考えられる。今回線型方程式の相似解によって，三次元有心膨張波の特性を求め，これとの比較によって特性曲線法の妥当性を検討した。この成果を用いて，軸対称噴流の周期構造を計算し良い結果が得られた。

まえがき

二次元超音速流の計算は，プラントル・メイヤー型膨脹波を基礎とする特性曲線法によって，厳密な取扱いが可能である。方程式がほとんど同型の三次元軸対称超音速流についても，同じく特性曲線法は有効な解法と考えられるが，その基本となるべきプラントル・メイヤー型有心膨脹波が解析的に解かれていないためその基礎が充分と考え難い。特に不足膨脹噴流のノズル出口にみられるような中心軸に向う有心膨脹波は，軸に近づくと物理量が発散することが予想され，計算はいっそう困難となる。

今回このような軸に向う三次元有心膨脹波を線型方程式によって厳密に求め，特性曲線法をこれと比較することによってその合理性を確かめることができた。これによる計算例として従来難問とされてきた不足膨脹噴流の周期構造を計算し，実験結果をよく説明しうる結果が得られた。

この形の解は又物体外部流にも適用が可能である。

記　　号

b　：ノズル出口半径，二次元では出口幅
c　：音速
C_p　：圧力係数
f, g　：線型方程式相似解
F　：超幾何関数，F（α，β，γ；z）（超幾何微分方程式）
M　：マッハ数，線型理論では平均マッハ数
x，r：流れ方向および垂直方向の円筒座標
u，v：同上方向速度成分又は擾乱速度成分
S，t：相似解の変数，$t=x/r$　$S=(t+1)/2$　図7
α　：マッハ角
β　：$\sqrt{M^2-1}$
δ　：擾乱量

＊　平成９年６月４日受付（received 4 June 1997）
＊1　宇宙研究グループ
＊2　元東京農工大学教授

φ ：厳密方程式ポテンシャル
ψ ：擾乱速度ポテンシャル
λ ：噴流周期構造の波長
σ ：相似解の変数　$\sigma = 1 - S$（図A）
$V\theta$ ：速度成分　$u = V\cos\theta$　$v = V\sin\theta$

添字
i ：ノズル出口点
j ：噴流内平均値
∞ ：外部静止大気状態
a ：線型軸対称流における二次元近似

1．線型理論による軸対称超音速流の解析

二次元超音速流のプラントル・メイヤー流は厳密方程式の物理面上における数少い厳密解の一つであるが，その膨張の中心点を平面上任意の位置におくことができるため，これを組合わせることによって充分複雑な流れ場を精度よく計算することが可能となる。これが二次元流の特性曲線法の基礎となっている。

他方実用上同様に重要な三次元軸対称流においては，厳密方程式の解析解としてのいわゆる錐状流が知られているが，これは波の中心を対称軸の上におく解しか存在しないため，計算上の応用は大きく制限される。たとえば不足膨張噴流のノズル出口のように，軸をかこむ一定円周上に膨張波の中心が分布されるようなとき厳密な解析解を作ることはほとんど期待できない。これに対し特性曲線法或は差分法の如き数値解法によって解を求めようとすると，対称軸に近づくに従い膨張波は集束し物理量は発散に向う。その傾向が果して正当か否かは解析解がないため保証することがむずかしい。

ところで二次元超音速流については，擾乱量が小さい範囲で線型近似方程式の解は厳密解のよい近似を与えることが知られている。軸対称三次元流についても擾乱が小さい範囲で線型方程式による解を用いることは当然考えられるが，上述のような対称軸に向う擾乱の集束については，実は線型方程式についても，従来信頼出来る解は得られていなかったのである。これは偶数次元波動方程式の本質的困難に基づくものである[1)]。

すなわち軸対称ノズルの出口のように，対称軸をかこむ円周 C 上に擾乱源 P_1，P_2 等が分布しているとき，それらより発する擾乱は，いずれも半頂角をマッハ角とする円錐面にそって伝播するため，対称軸上の一点 Q にそのすべての影響が集中する。超音速ノズル出口で噴流が外気との間に圧力差があるとき，圧力波はこのような形で伝播し噴流内に明瞭な波面が形成される（図1，図2）。

この現象を解析的に求めることは，まず線型方程式で

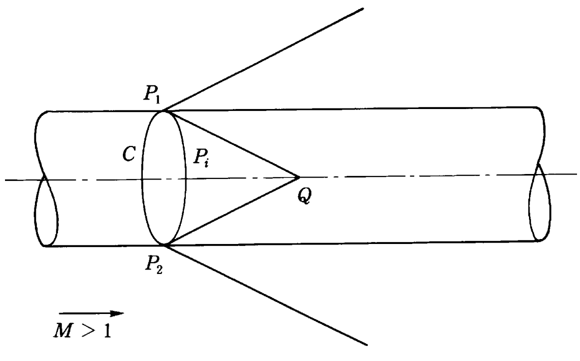


図1　擾乱源 P_i と Q との関係

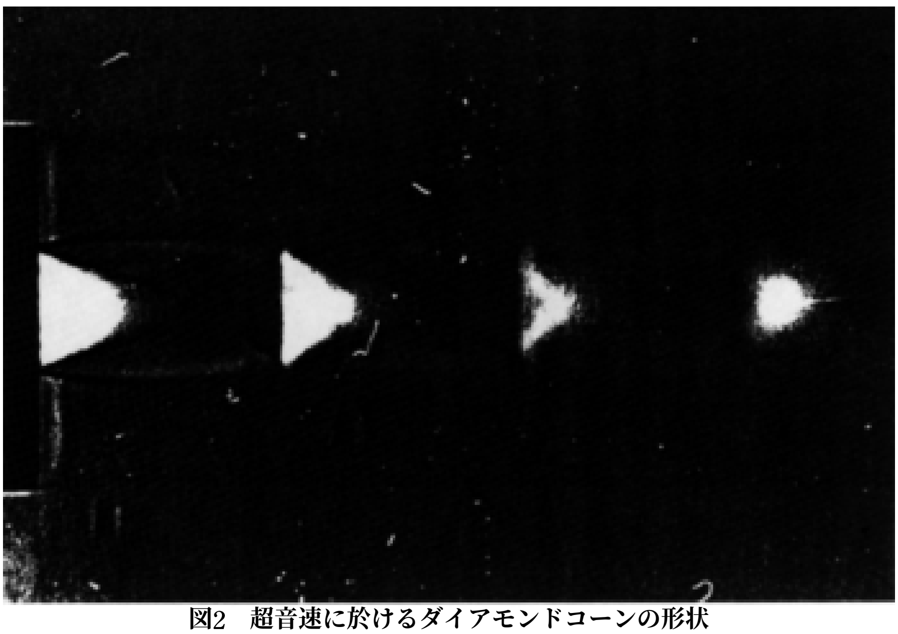
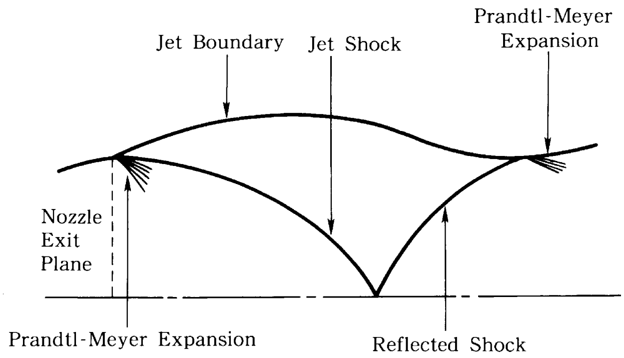


図2　超音速に於けるダイアモンドコーンの形状



Flow field of a moderately underexpanded exhaust plume

図3　ノズルフロー場の概念図（参考文献4）

試みられた。河村，銭は超音速湧出し型の擾乱を円周上に分布させた時の計算を行ったが，発散のため下流への拡張は困難であった[2)]。

Ward[3)] は線型方程式の解を超関数的に扱い，不連続面の伝播を求めているが，これによって流れ場内の物理量分布を計算することは容易でないし，実験から得られた波型を充分説明することが出来ない。

近年大型計算機による数値計算も試みられているが[4)]，これによってもこの問題が完全に解決されたとは思えない。その１例の結果は図３程度のものしか与えられていない。

以下にはまず線型方程式について，このような特異性をもつ解を相似解として表現することを試みる。

基礎方程式として軸対称超音速流の擾乱速度ポテンシャルに対する線型方程式

$$(M^2-1)\,\varphi_{xx}=\varphi_{rr}+\varphi_r/r \qquad (1)$$

に於て，簡単のため平均マッハ数　$M=\sqrt{2}$ としたときの

$$\varphi_{xx}=\varphi_{rr}+\varphi_r/r \qquad (2)$$

を扱うこととする。この式は変換 $\beta x=\xi$，$\beta=\sqrt{M^2-1}$ により（1）に変換されるので，一般性を失うものでない。圧力係数 C_p は

$$C_p=-2u=-2\varphi_x$$

又流れの傾きは

$$\varphi_r=v$$

によって与えられる。対称軸近傍の圧力表現については C_p 中に v^2 の項を必要とする場合もあるが，噴流表面等ではその必要はない。

完全に解明されている二次元超音速流の線型理論（以下（2）と同様 $M=\sqrt{2}$ として）

$$\varphi_{xx}=\varphi_{yy} \qquad (3)$$

に対しては，擾乱ポテンシャル ψ の一般解は

流入波 $f(x+y)$，流出波 $g(x-y)$

（ここに f，g はそれぞれ変数 $x+y$，又は $x-y$ の任意関数）となり，ψ は

$$\varphi=f(x+y)+g(x-y) \qquad (4)$$

の形の一般解であらわされる。これにより今原点Ｏに流入する圧力変動を考えると（図４），

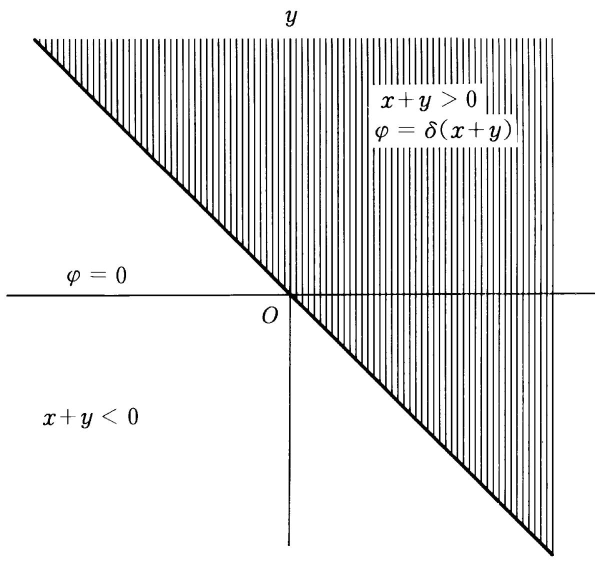


図４　φ と x，y 平面の関係

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=0 \qquad (x+y<0)\\&\varphi=\delta(x+y)=\delta x+\delta y\ (x+y\geq 0)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ここに δ は変動の量を示す常数であり，膨脹，圧縮とも δ の符号によって与えられる。

これは膨脹についてはプラントル・メイヤー波の線型表現と考えられる。これにより

$x+y>0$ の影響領域では

$$\varphi_x=u=\delta,\ \varphi_y=v=\delta$$

であり，不連続面（流入波面）$x+y=0$ に於て

$u=v=\delta$ の不連続的な物理量の変動が起る。

これは一方向の特性曲線群のみで形成されるプラントル・メイヤー波による膨脹が線型のばあい一本の特性曲線に集約されたものとみなされる。

このような最も簡単な流入単位擾乱を軸対称超音速流（2）の解として求めようとしても（2）に対しては（4）のような扱い易い一般解は存在しないため，これは容易ではない。

しかし軸対称流方程式（2）に於ても

$$\varphi=\phi(x,r)/\sqrt{r} \qquad (6)$$

とおいて ψ についての方程式を求めると

$$\phi_{xx}=\phi_{rr}+\phi/4r^2$$

となる。これにより $r\to\infty$ に於ては，この式は，二次元方程式（3）に近づくことが期待される。

又この場合 r が必ずしも大きくなくても，ある一定の r のごく近傍で考えれば同様最終項を無視することが可能となる。このような近似は厳密方程式についても成立

することが知られており[5)]，筆者の１人はこれを用いてロケット胴体のまわりの流れを求めることが出来た[6)]。

このことから軸対称流に於て，対称軸をかこむ円周 C（以下一般性を失うことなく，この半径を１とする）上に分布された擾乱源から，原点 O に向う流入波の近似解 ψ_a として

$$\varphi_a = \frac{\delta(x+r)}{\sqrt{r}} = \frac{\delta x}{\sqrt{r}} + \delta\sqrt{r} \tag{7}$$

を用いることとすると

$$\varphi_{ax} = \delta/\sqrt{r} \quad \varphi_{ar} = -\delta x/2r^{\frac{3}{2}} + \delta/2\sqrt{r}$$

等となり，波面 $x+r=0$ 上では $x=-r$ より

$$\varphi_{ax} = \delta/\sqrt{r} = (\varphi_{ar})_{x=-r} = \delta/\sqrt{r} \quad （図５）$$

が成立する。流入不連続面上では $\phi_x=\phi_r$ の成立は必要条件であるが，これが充されている。

この近似解は $r\to 0$ に対して u，v とも $1/\sqrt{r}$ の形で発散することとなるが，(7) は (2) の厳密解ではないため C の近傍以外では，その正当性は保証されていない。以下にはこの近似解 (7) に補正を行い，このような不連続性をもつ軸対称方程式 (2) の厳密解を求めることを試みる。

近似解 (7) をかき直すと

$$\varphi_a = \frac{\delta(x+r)}{\sqrt{r}} = \sqrt{r}\,\delta\left(\frac{x}{r}+1\right) = \sqrt{r}\,f(x/r) \tag{8}$$

とみることができる。ここに f は一つの変数 (x/r) のみの関数の意味である。これは一般化された錐状流の形であり，実際線型方程式 (2) に対しては

$$\varphi = r^n f_n(x/r) \tag{9}$$

の形の解が存在することが示される。すなわち f_n のみたすべき常微分方程式は $x/r=t$ を変数として

$$(1-t^2)\frac{d^2f_n}{dt^2} - (1-2n)\,t\frac{df_n}{dt} - n^2 f_n = 0 \tag{10}$$

となる。$n=1$ が通常の錐状流で流入波に対してはダク

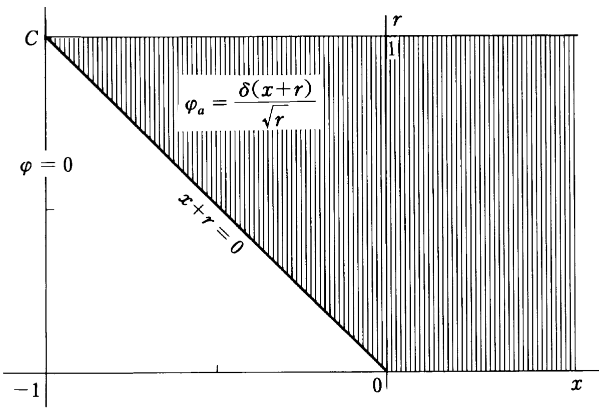


図５　φ_a と x，y 平面の関係

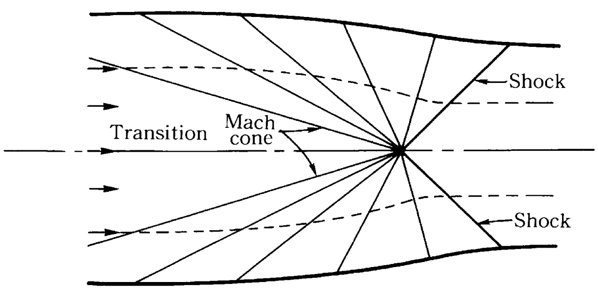


図６　Cylindrically symmetric diffuser flow.

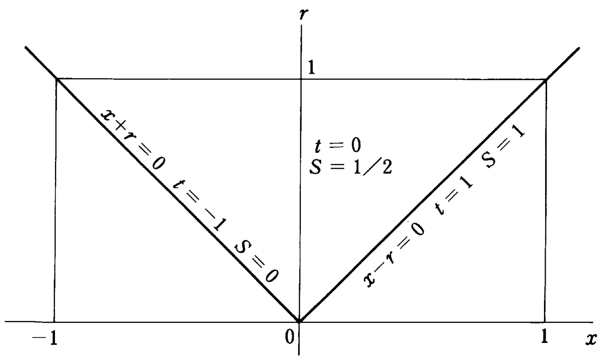


図７　x，r，t，S 間の関係

ト内の収縮流（Busemann[(7)]）を表すが，この解は流入波面上の擾乱量は０であり，不連続的な状態変化をあらわすことはできない（図６）。

(8) を考慮して流入波面 $x/r=1$ に於ける不連続をみるため，この上で０となるような変数

$(t+1)/2=S$（図７）

を用いると（10）は

$$S(1-S)\frac{d^2f_n}{dS^2} + \left\{\frac{1}{2} - n - (1-2n)S\right\}\frac{df_n}{dS} - n^2 f_n = 0 \tag{11}$$

となる。これは超幾何微分方程式

$$Z(1-Z)\frac{d^2w}{dZ^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)Z]\frac{dw}{dZ} - \alpha\beta w = 0$$

であり，その解

$$w = F(\alpha,\ \beta,\ \gamma; Z)$$
$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot\frac{Z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta\cdot(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{Z^2}{2!} + \cdots$$

によって

$$f_n = F\left(-n,\ -n,\ \frac{1}{2}-n; S\right) \tag{12}$$

の形にかくことが出来る。ただし α，β，γ のいずれかが０又は負の整数のときは変換が必要である。

我々の求める解は近似解 (8) に見るように $n=\frac{1}{2}$ であるために $\gamma=0$ となる。これに対しては

$$f_{\frac{1}{2}} = S\cdot g_{\frac{1}{2}}$$

とおかねばならず，$g_{\frac{1}{2}}$に対する式は

$$S(1-S)\frac{d^2g_{\frac{1}{2}}}{dS^2}+(2-2S)\frac{dg_{\frac{1}{2}}}{dS}-\frac{1}{4}g_{\frac{1}{2}}=0 \qquad (13)$$

$$g_{\frac{1}{2}}=F(1/2,\ 1/2,\ 2.:S)$$

となり，これより

$$f_{\frac{1}{2}}=S+S^2/8+3/64\cdot S^3+\frac{25}{1024}S^4+\cdots \qquad (14)$$

が解となる。なお２次常微分方程式のこれと独立な他の解は

$$\bar{f}_{\frac{1}{2}}=\log S\left\{SF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ S\right)\right\}+w(S)$$

$$w(S)=4+\frac{5}{16}S^2+\frac{9}{64}S^3+\cdots+\ cf_{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

となるが，これは$S=0$で発散する解であるから，ここでは問題としない。

(14) からみれば，近似解 (7) (8) はこの厳密解の第１項のみをとったものであることが分る。

なお近似解と常数係数を合わせるためには2δと乗じて

$$\varphi_{\frac{1}{2}}=2\delta\sqrt{r}\,f_{\frac{1}{2}}(S)=2\delta\sqrt{r}\cdot S\cdot F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2;S\right) \qquad (16)$$

が流入圧力波に対する線型方程式の厳密解となる。これよりϕ_x，ϕ_rを求めるためには

$\partial S/\partial x=1/2r$，$\partial S/\partial r=-x/2r^2$等を考慮し超幾何関数の公式により

$$\begin{aligned}u_{\frac{1}{2}}=\partial\varphi_{\frac{1}{2}}/\partial x&=\frac{\delta}{\sqrt{r}}\left\{F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ S\right)\right.\\&\left.\quad+\frac{S}{8}F\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 3,\ S\right)\right\}\\&=\frac{\delta}{\sqrt{r}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1;S\right)\\&=\frac{\delta}{\sqrt{r}}\left(1+\frac{S}{4}+\frac{9}{64}S^2+\frac{25}{256}S^3+\cdots\right)\end{aligned} \qquad (17)$$

となるが，これは又完全楕円積分

$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^2\right)$$

と同型であり，$S=1$に於て対数的に発散する。

又vは，

$$\begin{aligned}v_{\frac{1}{2}}=\frac{\partial\varphi_{\frac{1}{2}}}{\partial r}&=\frac{\delta}{\sqrt{r}}\left\{SF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};2;S\right)\right.\\&\left.\quad+(1-2S)F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};1;S\right)\right\}\\&=\frac{\delta}{\sqrt{r}}\left(1-\frac{3}{4}S-\frac{15}{64}S^2-\frac{35}{256}S^3-\cdots\cdots\right)\end{aligned} \qquad (18)$$

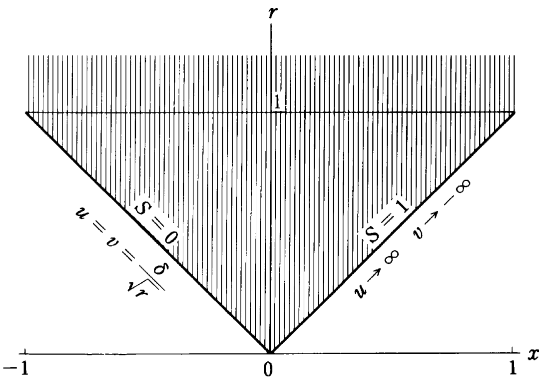


図８　x，r面に於けるu，v，Sの関係

となる。近似解同様原点への流入波面$S=0$（$x+r=0$）上に於ては$u=v$が成立している。

以上により軸対称超音速流中の対称軸外の一定円周C上から発する擾乱は$S=0$にそって$1/\sqrt{r}$の割合で増幅されながら軸に向うことが示された。

これが軸外の一定円周上より軸に向う三次元プラントル・メイヤー型有心膨脹波と考えられる。又，この擾乱は原点Oに於て$S=1$にそって反射されるものとみられるが，$S=1$上では，rによらずすべての量が発散することになる。これはWardの示した特異性の反射からも予想されたところである（図８）。

工学的にみれば微少擾乱理論に於ける発散は，必ずしも物理量の無限大を示すものではなく，それは微少擾乱の仮定から外れる程度の現象を示すものである。この現象の解釈は次節以下の厳密理論に基づく，特性曲線法による解析によって検討される。

なおこの解を出口圧力差のある軸対称超音速噴流に適用する場合には以下の補正が必要となる。

すなわち二次元流では，解 (5) は初期不連続面$x+y=0$に於ける圧力変動以後，その下流全域に於て速度成分u一定，すなわち圧力一定の解を与える。このため噴流境界を$y=+1$としたとき，その上で圧力一定の條件が自動的に充されている。

これは二次元に於ては厳密解プラントル・メイヤー波についても成立する（図13（3）領域）。

しかし軸対称流の場合，流入不連続流の解(16)は(17)にみられるように$r=1$上のuの分布にSの高次項をふくむため圧力一定の噴流境界條件が充されていない。$r=1$で圧力すなわちu一定の條件を満足するためにはさらに補正項が必要であるが，これは他の相似解

$\varphi_n=r^nf_n(x/r)$によって作ることが出来る。すなわち

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{3}{2}}&=r^{\frac{3}{2}}f_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{r}\right)=r^{\frac{3}{2}}S^2F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 3;S\right)\\\varphi_{\frac{5}{2}}&=r^{\frac{5}{2}}f_{\frac{5}{2}}\left(\frac{x}{r}\right)=r^{\frac{5}{2}}S^3F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 4;S\right)\end{aligned} \qquad (19)$$

等であるから，これより u を作ると

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\frac{3}{2}}=u_{\frac{3}{2}}=\sqrt{r}\left(S+\frac{S^2}{8}+\frac{3}{64}S^3+\cdots\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\frac{5}{2}}=u_{\frac{5}{2}}=r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}S^2+\frac{1}{8}S^3\cdots\right) \tag{20}$$

等となり

$$u_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}u_{\frac{3}{2}}-\frac{7}{96}u_{\frac{5}{2}}$$

を作れば $r=1$ 上に於て S，S^2 の項を打消すことが出来

$$(u)_{r=1}=\delta\left(1+\frac{56}{768}S^3+\cdots\right)$$

又，これにより (21)

$$(v)_{r=1}=\delta\left(1-S-\frac{S^2}{4}-\frac{23}{256}S^3\cdots\right)$$

等が得られる。必要なら同様に，高次の項も補正が可能である。このようにして得られる噴流の外形は $v=0$ となるのは $S=0.8$ 附近であり，v の値はこのあと，急激に負の発散を示す。

このように軸対称噴流については，最初の膨脹領域について解を求めることが出来るが，これをさらに下流に延長することは，この方法では，困難である。

これについても特性曲線法によって検討される。

2．厳密な特性曲線法による考察

前節に於ては軸対称超音速流中の擾乱波の伝播と，その対称軸上への集束を線型方程式の解析から考察した。しかし軸附近に於ける物理量の発散は線型化の仮定の成立を妨げるおそれがあり，このような現象を厳密に検証するためには線型化されない厳密な方程式による必要がある。

波面の伝播のような現象の解明には，超音速流を支配する双曲型方程式に特有の特性曲線を用いる方法が有利なことが予想される。

実際二次元定常流に対してはPrandtl-Busemannに始まる厳密な特性曲線法により噴流をはじめ，より複雑な問題も詳しく研究されている。

しかし軸対称流の厳密方程式は，二次元に比べてわずかに一項の附加項があるだけであるが，対称軸上の特異性等のため，その特性曲線法は，完全には整備されていない。噴流に対するSauerの解 (9)（図9）が軸附近の解が求められていないことからも，まだ充分とはいえないと思われる。

我々の特性曲線法による非線型方程式の解法は以下のとおりである。

流れが軸対称で定常であり，回転をしない場合，

$$\left(1-\frac{u^2}{C^2}\right)\phi_{xx}-2\frac{uv}{C^2}\phi_{xr}+\left(1-\frac{v^2}{C^2}\right)\phi_{rr}+\frac{\phi_r}{r}=0 \tag{22}$$

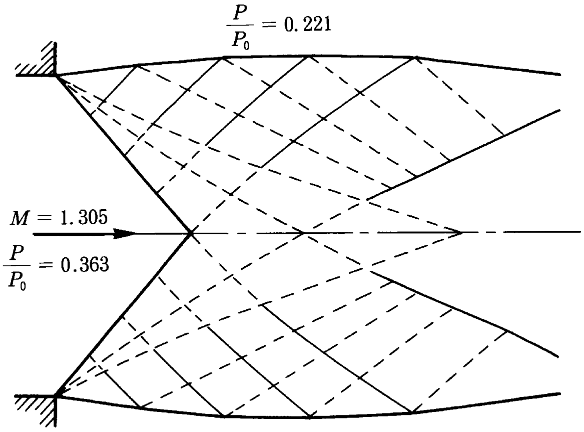


図9 特性曲線法実例（Sauer(9)）

ここに於て

$$C^2=C_o^2-\frac{k-1}{2}V^2=C_o^2-\frac{k-1}{2}(u^2+v^2) \tag{23}$$

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\phi_x;\ v=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\phi_r \tag{24}$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=\frac{-uv\pm C\sqrt{u^2+v^2-C^2}}{C^2-u^2} \tag{25}$$

ここに於て上側の符号はI族，下側の符号はII族に対応する(図10)。これらの等式は速度成分と,角度成分によって書き表わされるとなお便利である。すなわち

$$u=V\cos\theta;\ v=V\sin\theta \tag{26}$$

そして $\sin\alpha=C/V$ という事に注意すると

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=\tan(\theta\mp\alpha) \tag{27}$$

$$\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=\mp\tan\alpha+\frac{\sin\alpha\cdot\tan\alpha\cdot\sin\theta}{\sin(\theta\mp\alpha)}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}} \tag{28}$$

計算手順

全体の過程の中の一つの段階は次の如く要約される。(27) は次の如くかかれる。

$$r_3-r_1=(x_3-x_1)\tan(\theta_1-\alpha_1) \tag{29}$$
$$r_3-r_2=(x_3-x_2)\tan(\theta_2+\alpha_2) \tag{30}$$

θ_1, θ_2, α_1, α_2 はすべて知られているのであるから，r_3 と x_3 はグラフ的にとくことが出来る。(28) に $d\theta\cdot\cot\alpha$ をかけると，次の形を得る。

$$(d\theta)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}\pm(\cot\alpha/V)(dV)_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}\mp\frac{\sin\theta\cdot\sin\alpha}{\sin(\theta\mp\alpha)}\cdot\frac{(dr)}{r}_{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=0$$

Q，F，G を次の如く定義する

$$Q=(\cot\alpha)/V \tag{31}$$
$$F=(\sin\theta\cdot\sin\alpha)/\sin(\theta+\alpha) \tag{32}$$

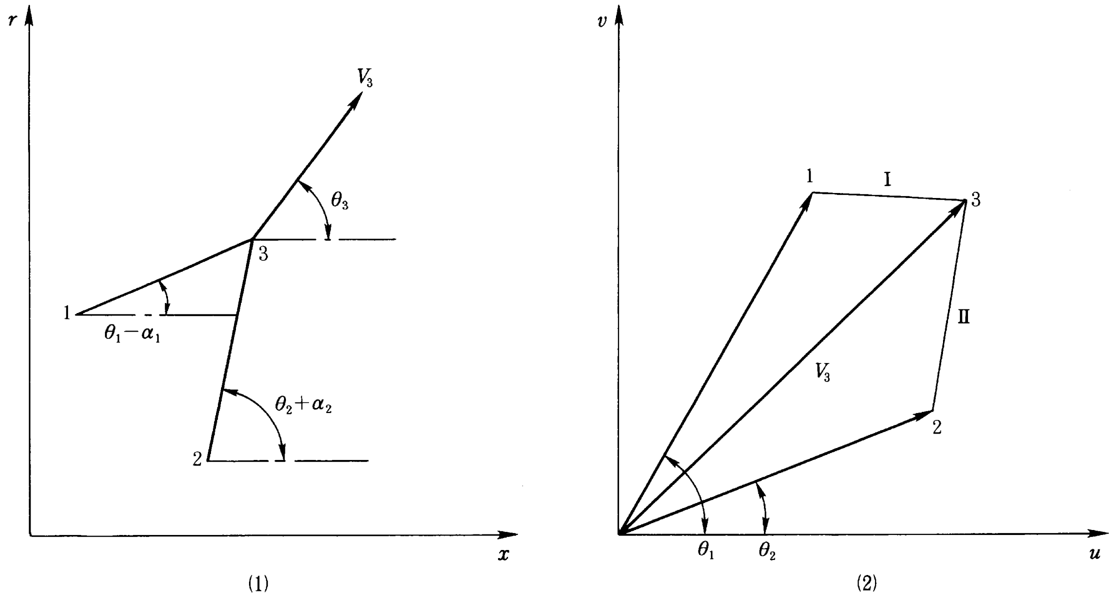


図10　特性曲線の１つのステップ

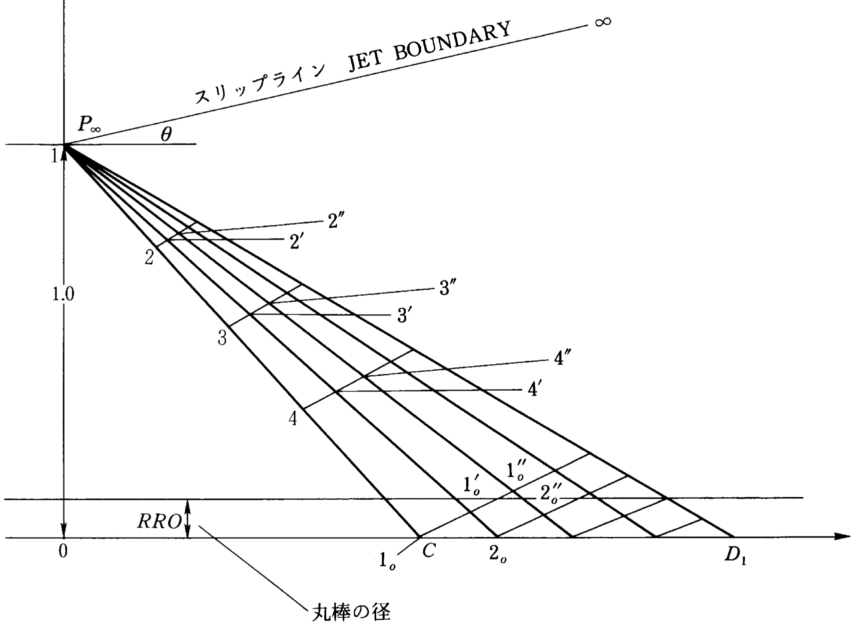


図11　特性曲線法による流入擾乱の計算

$$G=(\sin\theta\cdot\sin\alpha)/\sin(\theta-\alpha) \qquad (33)$$

図 11の１－３，２－３に応用すると（図 11）

$$\theta_3-\theta_1+Q_1(V_3-V_1)-G_1/r_1(r_3-r_1)=0 \qquad (34)$$

$$\theta_3-\theta_2-Q_2(V_3-V_2)+F_2/r_2(r_3-r_2)=0 \qquad (35)$$

１，２に於てすべての状態が与えられており，r_3はすでに求められているので，この等式は同時に，θ_3，V_3 についてとかれうる。

このようにして第一段階の近似が完成する。この近似は，１－２，２－３の平均的状態を計算することによって改良される。第一近似によって，r_3，x_3，V_3，θ_3が求められているので，(34）式に於てθ_1のかわりに$\theta_{1-3}=(\theta_1+\theta_2)/2$，$\alpha_{1-3}=(\alpha_1+\alpha_3)/2$，このようにして，$Q_{1-3}$，と$\bar{G}_{1-3}/r_{1-3}$を計算して使用することにする。このような過程を２，３回くりかえすことにより，良好な近似が得られる。本報告に於てはすべて３回くりかえしが行われた。

中心軸上に向うプラントル・メイヤー型有心膨脹波の特性曲線による解法は，次のように行われた。図11に於

て，初期條件は，一定円周上の擾乱源による圧力変動をさしており，この部分の初期條件は二次元のプラントル・メイヤー流によって与えられる。これは軸対称流に於ても前述のように局所的に二次元解が成立することによる。

よって１，２点から２′点の状態を前述の方法によって計算する。又２，２′，３から３′の点が計算され得る。以下同様である。又中心線上に於ては 1_0, $1_0'$から 2_0の値が計算され，$1_0'$, $1_0''$の値より $2_0''$の値が計算される。以下同様である。なお 1_0 と $1_0'$から 2_0を計算する法は，(34) に於て $r_{3=0}$，$\theta_{3=0}$ として V_3 の値を求める。

軸対称超音速流中の有心膨張波（プラントル・メイヤー型波）について，前節にのべた線型理論による解析結果と，今回の特性曲線法によるものとの比較を図12に示す。ΔC_{p0} は擾乱源としての圧力変動 δ に対応し，ノズルからの噴流のばあいはノズル出口における外圧との圧力差となる。すなわち $A-A'$ の間の圧力係数差であり，ここに A はノズル内流の状態を，A' は外気圧まで膨脹した点を意味する。

又 B はノズル内流でまだ外圧による擾乱をうけていない点であり，B' は噴流内ですでに最初の膨脹波を通過したあとの点である。$A-B$, $A'-B'$ はマッハ線（特性曲線）であり，最初の膨脹波の始る線（これは直線である）と膨脹波の終る線である。

二次元のばあい $A-A'$ 間の圧力変動と $B-B'$ 間のそれとは同一の値をとるが，軸対称流においては，その変化にその点の半径 r が影響するため，これが異ることとなる。線型理論では前節で見たとおり $B-B'$ の位置の半径 r に応じて $1/\sqrt{r}$ の割合で増大することが分っているが (17)，厳密な特性曲線法による解もこれとよく一致して軸に向って発散する傾向を示す。

ただし特性曲線による解法は一種の数値解法であるため軸上における値を決定することはできないが，充分軸に近い点まで，これらの結果は妥当なものと考えられる。これにより少くとも一定円周上の擾乱源から対称軸に向って流入する，最初の膨脹波について，信頼すべき結果が得られたものと思われる。

次にこの中心軸に向う膨脹波の下流を計算するためには，軸上に於けるこの波の反射を考えねばならない。この現象は入射波が軸を通過する（二次元におけるように）ものともみられるが，計算上からも座標 r の負の領域を考えにくいため波は x 軸で反射するものと解釈される。（二次元に於ても軸を固定壁でおきかえて反射として考えてもよい)。

この軸上の反射に対して，実際の計算に於ては x 軸をそれをかこむ有限の太さの円筒でおきかえて反射をあつかい，その半径を０に近づけた時の極限として解釈することとする。これは本質的に軸上で発散する現象に対して不充分と考えられるかもしれないが，擾乱が一本の特性曲線上に集中する線型理論と比べて，厳密解では擾乱はプラントル・メイヤー型扇型波にひろがるため軸上の一点の発散は緩和されるとも考えられる。

３．特性曲線法による噴流周期構造の解析

軸対称ラバウル管から噴出する超音速不足膨脹流がソロバン玉状の美しい波形を示すことは古くから知られていた。図２にそのシュリーレン写真，図13 (1) (2) にその流れの概念図を示した。なお図13 (3) には比較と

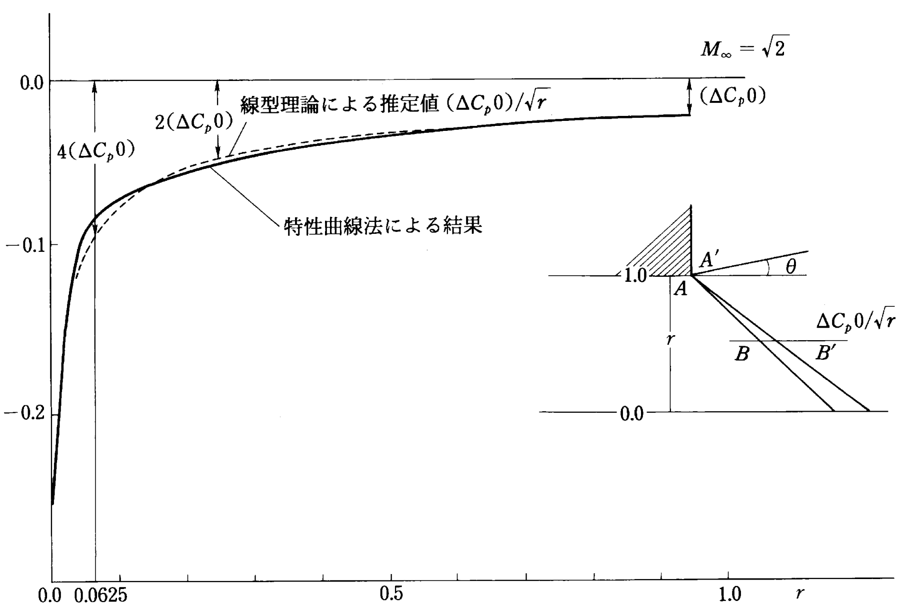
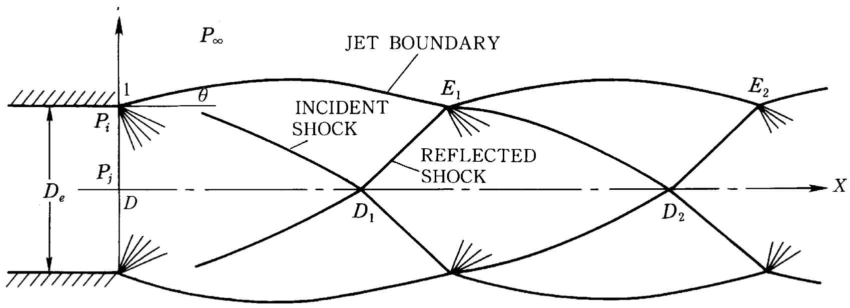
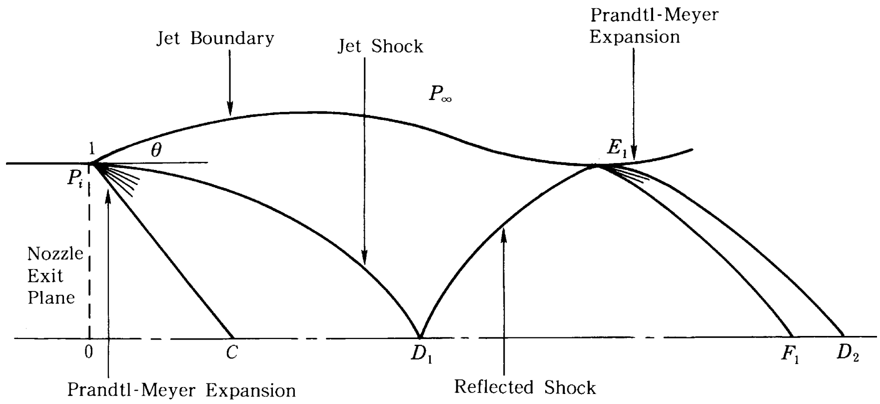


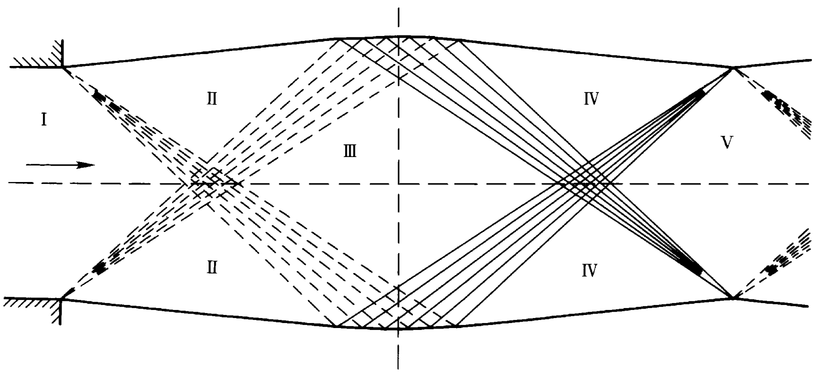
図12　最初の膨脹波による圧力変化



(1) 不足膨脹噴流　軸対称流



(2) 不足膨脹噴流　軸対称流



(3) 不足膨脹噴流　2次元流

図13　流れの説明図

して二次元超音速噴流の概念図を示す。

Prandtl[10) はその構造を線型方程式の基本振動とみて，ベッセル関数の第1零点から波長λと出口直径 b との比を噴流の平均マッハ数 M_j より

$$\lambda = 1.306\sqrt{M_j^2-1}\ b \tag{36}$$

と与える。しかし観測される波長は，むしろ

$$\lambda = \sqrt{M_j^2-1}\ b \tag{37}$$

程度であり，この差は無視しえないものであった。

他方二次元噴流ではBusemann[11) の特性曲線よる解析結果

$$\lambda = 2\sqrt{M_j^2-1}\ b\ (b\text{ は出口幅}) \tag{38}$$

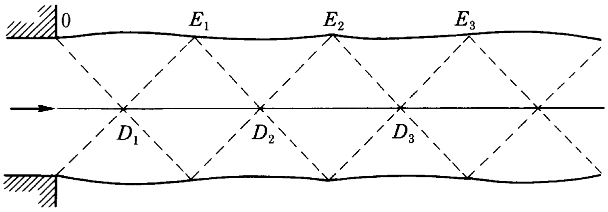
であり，これは実験とも一致している。その後軸対称流についてはPack[12) が高次項まで考慮し

$$\lambda = 1.22\sqrt{M_j^2-1}\ b \tag{39}$$

を得たが，これも(36)よりは改良されたものの(37)に対しては，まだ不充分であった。これに対しWard[13) は波の特異性を超函数的に扱い

$$\lambda = 4\sqrt{M_j^2-1}\ b \tag{40}$$

を得た。この解は出口圧力差が極めて小さい時に実験的



噴流模式図

図14　Ward による３次元噴流解析図

にも確認されている[14]（図14)。

しかし出口圧力差が少し増すと，波長はほぼ (37) の値となり，噴流は図13 (1) (2) の形をとる。この現象は解析的には，まだ充分説明されていない。

特性曲線による計算も例えばSauer[9]等によって試みられているが，軸上の発散の処理が不充分のためであろう途中までしか求められていない（図９)。

近年計算機計算の進歩と共に，それによる解法も発表されているが[4]，これによってもまだ充分な解決に至っていないと見られる（図３)。

以下には出口圧力差が極めて小さく特性曲線上で発散を示すWard[13]の解のような場合を除外し出口圧力差のやゝ大きい (27) の状態についての特性曲線による解明を試みる。実験からも明白なようにこの現象はPrandtl[10]の考えたようなゆるやかな振動ではなく，明瞭な不連続な波形をもった流れであり，特性曲線法による解法が特に適していると考えられる。

前述のように軸対称ノズルから或程度圧力の低い大気中に超音速流が噴出するばあい，流れの膨脹はまずノズル出口角からプラントル・メイヤー型の膨脹が始まる。この最初の膨脹については前節の計算がそのまま適用される（図11)。

二次元のばあいは，この最初の膨脹は完全なプラントル・メイヤー波であり，その下流は再び一様流となる（図13 (3) の領域Ⅱ)。しかし軸対称流では，最初の膨脹波のあと噴流境界で大気圧に等しい一定圧力を保つためには，境界からつねに内側向けに圧縮波を送り出さなければならない（図９)。外側に凸な噴流境界と一定マッハ角を保って内側に向う圧縮波は軸に向うに従い重りあい，図13 (1) INCIDENT SHOCK (又は (2) Jet shock)を形成する。このような波の重りあいについては，物理面上でマッハ角一定となる線型理論では扱うことが出来ない。

前節に見たように，最初の膨脹波も軸に近づくと発散的に強度をますが，これを追う形のJET SHOCKにより打消され結果的には軸上(13図 D_1 点) からREFLECTED SHOCKとして反射される。

これが13図 E_1 点で噴流境界に達し，再びそこからプラントル・メイヤー型膨脹波が始り噴流周期構造の二期目にうつることとなる。

二次元噴流の場合は図13 (3) にみられるように最初のプラントル・メイヤー波は対称軸上で上下両側からきた波同志干渉するが，そのまま膨脹波としてこれを通過し反対側の噴流境界に達してはじめて圧縮波として反射される。これら概念図13 (1) と13 (3) との比較からも，軸対称噴流の波長λが (37) の如く二次元噴流のλ$=2\beta_j b$ に比べ半分に近いことが推察される。

このように軸対称超音速噴流の内部構造は一見簡単にみえても速度分布等は一様の所はなく複雑であり，厳密方程式にもとづく数値解法によっても軸上の発散的な物理量変化の取扱いに伴う誤差等により，明確な周期が容易に求められない。今回の特性曲線に基く解においては，ほゞ明瞭な周期構造を認めることができた。なお軸上における波の反射の扱いについては，前述の如く軸をふくむ細い円筒固定面からの反射として扱っている。

図15以下には得られた計算結果を示す。図15は出口マッハ数1.4のノズルについて，出口圧力／大気圧比1.08の場合の噴流内圧力分布を示す。ノズル出口半径を単位とした図上でほぼ２倍程度の波長が表現されている。このばあい出口圧力比が１に近いため，噴流内で平均マッハ数はノズルマッハ数1.4に近いと考えられλ$=\beta_j b$ が

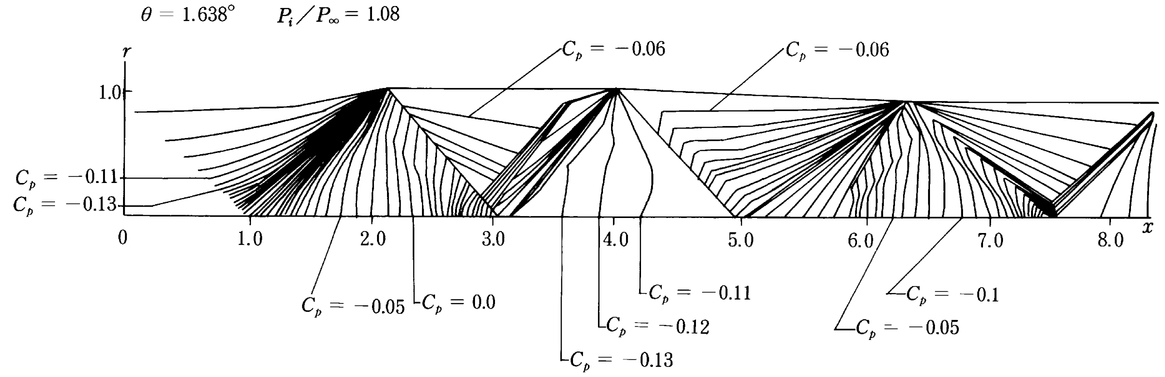


図15　$M=1.4$ に於ける等圧線図（１間隔 C_p ：0.01)

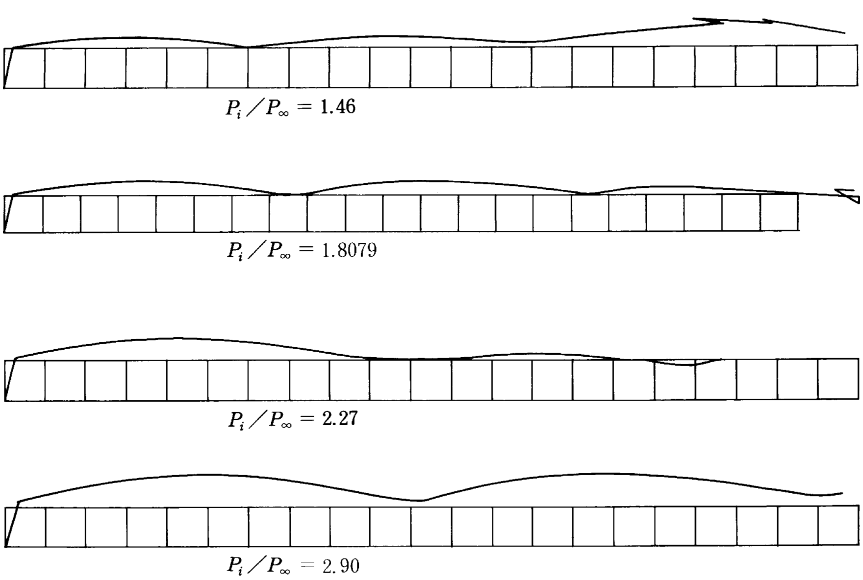


図16　$M_i = 2.0$ノズルに於ける出口圧力比P_i / P_∞と噴流境界形状の関係

ほぼ成立している。又二次元噴流では内部は膨脹，圧縮波以外は一様であった（図13 (3)）のに対し，かなり複雑な圧力—速度分布となっていることが分る。

図16にはノズルマッハ数2.0の噴流に於て，出口圧力／大気圧力比の変化に対する噴流境界形状と波長の変化を示している。大気圧が下り出口圧力比が増すと波長が急激に増大する様子が示されている。

出口圧力比の変化に対する波長の変化をまとめたものが図17 (1) ～ (4) である。比較にはNASA TR-6[18]の実験値を用いているが，一致は概ね良好である。実験値

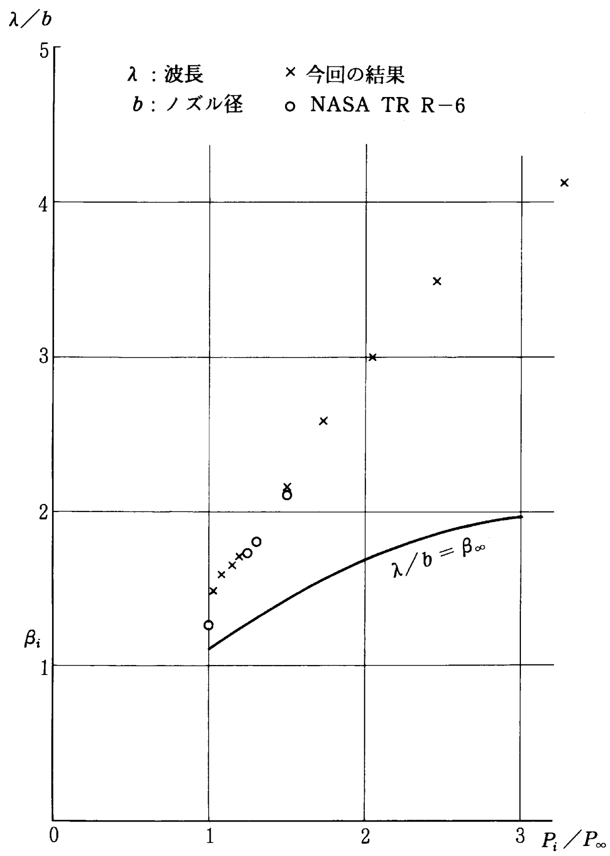


図17 (1)　$M = 1.5$に於けるP_i / P_∞とλ / bの関係
$\beta_i = 1.12$

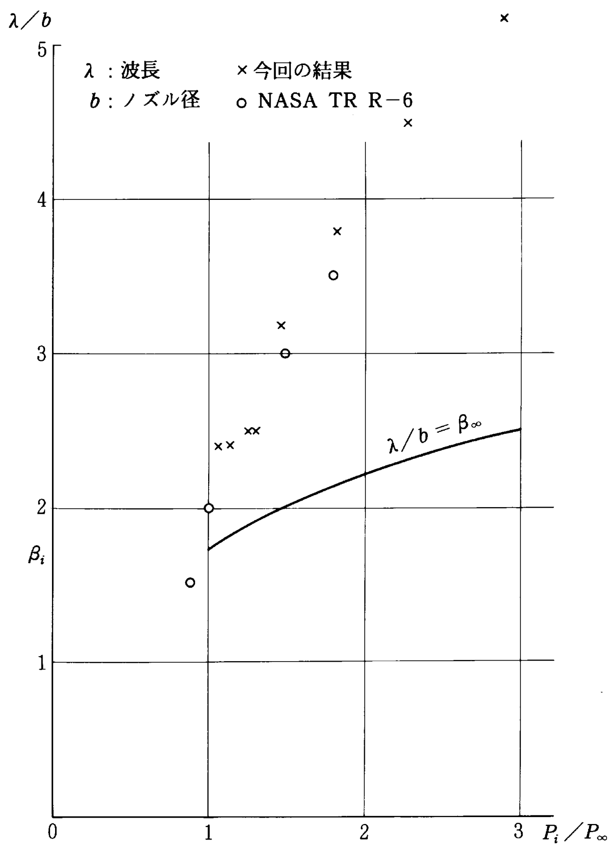


図17 (2)　$M = 2.0$に於けるP_i / P_∞とλ / bの関係
$\beta_i = 1.73$

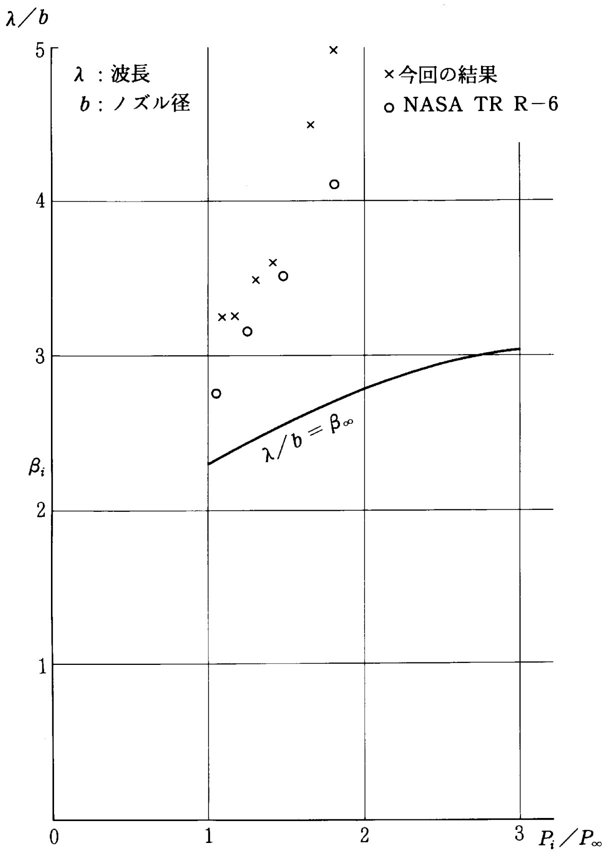


図17 (3)　M＝2.5 に於ける $P_i／P_\infty$ と $\lambda／b$ の関係
β_i ＝2.29

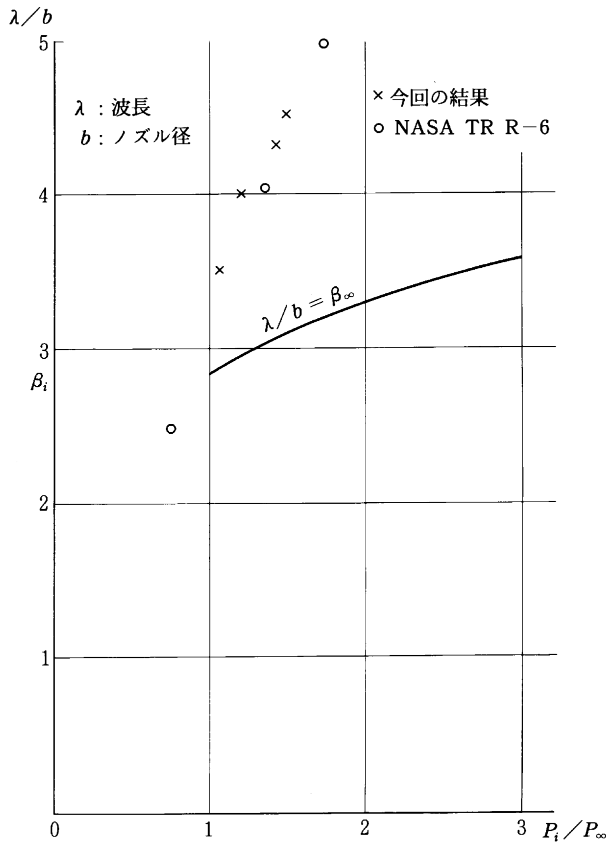


図17 (4)　M＝3.0 に於ける $P_i／P_\infty$ と $\lambda／b$ の関係
β_i ＝2.82

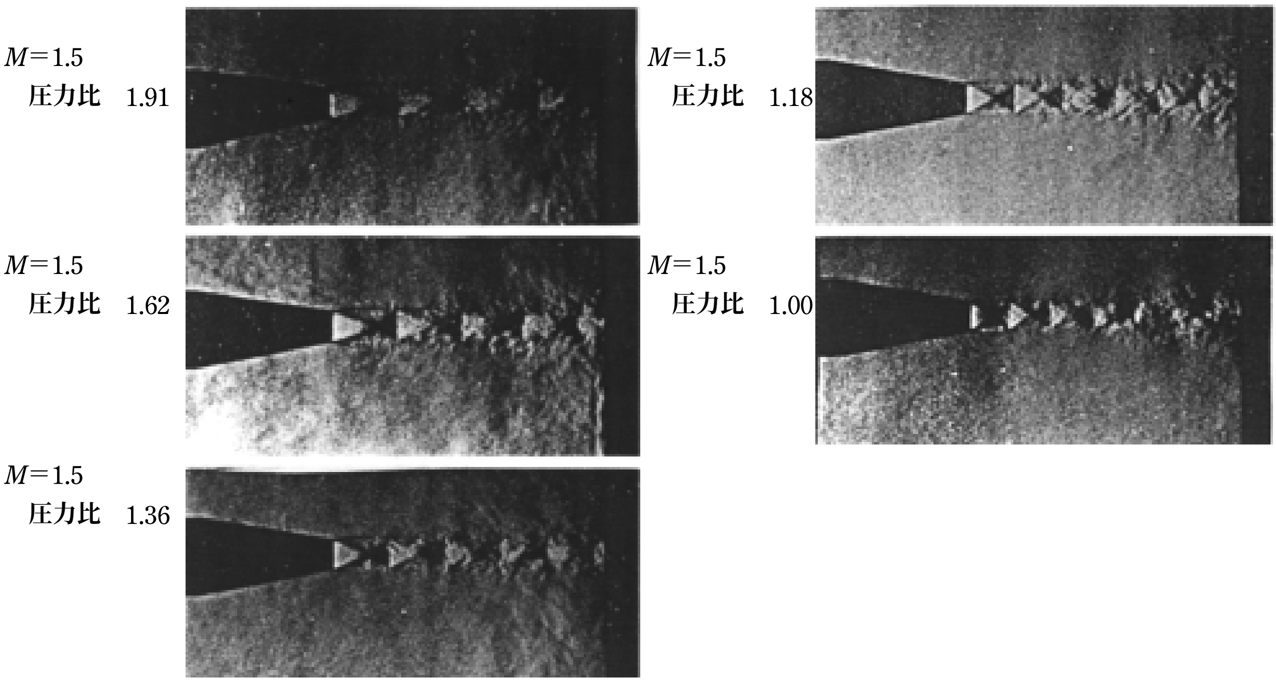


図18　NASA TR R6

のばあい観測された波形は図18にみられるように，ほぼ概念図13 (1) (2) の形が成立しているように見える。この形状に対しては波長公式（37）が考えられるが，その際噴流内平均マッハ数 M_j としては，ノズル内気流が単にその大気圧まで断熱的に膨脹したと仮定したマッハ数 M_∞を用いるとはるかに小さい値しか得られない（図19 $\lambda / b = \beta_\infty$の線）。圧力比 $P_i / P_\infty = 1$すなわち出口圧力差のない状態ではβ_jはノズルマッハ数によるβ_iに近いと思われほゞ実験値と一致するが，圧力比が少し大きくなるとこの仮定は成立しない。波長公式（37）に合わせるためには噴流内平均マッハ数としてM_∞よりかなり大きい値を与えなければならない。

これは最初のプラントル・メイヤー型膨脹によるマッハ数の増大が，前節にも見たように軸近傍では噴流境界部に比べて非常に大きく，噴流内を一つの平均マッハ数 M_j の場とみることができないためと考えられる。事実 Sauer による解析（図９）をみても中心附近のマッハ数は境界部にくらべてかなり高く特性曲線が軸となす角（マッハ角）が相当ゆるやかになっていることが分り，これは波長の増大につながるものである。

結論としていえば出口圧力比が充分１に近いときは噴流構造は波長公式（37）にみられるような簡単なものでその値もノズルマッハ数 M_jによりほぼ推定される。

しかし出口圧力比が少し大きくなると，噴流構造は一見簡単であるが，その実全体を一つの平均マッハ数 M_j の場とみなすことは無理となる。これは圧力比の大きい場合の噴流構造を線型理論によって解析することの困難を示しているといえよう。

結　論

超音速流れ場の基本構造である有心膨脹波を三次元軸対称の場合，特に対称軸に向い入射する状態について解析を行った。線型理論からこのような波を表現する相似解を見出し，これによって特性曲線法において生ずる発散的な物理量の妥当性をたしかめることができた。応用例として不足膨脹噴流の計算を行い，二次元流と異る三次元流独特の複雑な構造を知り，実験値とよく一致する結果を得ることが出来た。

文　献

(1) 犬井鉄郎：応用偏微分方程式論（岩波）

(2) Kawamura，R，and Tsien, F. S：Internal supersonic flow in a circular cylinder，Proc. 2nd Japan National Congress Appl. Mech. 259（1952）

(3) Ward, G. N, Linearized theory of steady High speed flow，Cambridge Univ. Press （1955）

(4) Davis，M. P. , Mace，A. C. H and Markatos，N. C, On numerical modelling of embedded Subsonic flow, Numerical Method in Fluid，Vol. 6，No. 3（1986）

(5) Johannesen，N. H，and Meyer，R. E：Axiallysymmetrical supersonic flow near the centre of expansion，Quart. J. Mech，and Appl. Math. Vol. 3 p173 （1950）

(6) 谷喬：ロケット胴体をまわる超音速流の一近似解法（Ｉ）航技研報告 TR－92 （1965）

(7) Busemann，A.：Die achsensymmetriche kegelige Überschallströmung，Luftfahrtforshung 19 No.4 (1942）

(8) Prandtl，L and Busemann，A Stodola-Festsch-rift, Zurich （1929）

(9) Sauer，R：Einführung in die theoretishe Gasdynamik，Springer （1951）

(10) Prandtl, L.，Uber die stationaren Wellen im einem Gasstrahl，Phys. Zeit，5（1904），p599

(11) Busemann, A. ：Gasdynamik，Handbuch der Experimentalphysik，Vol. Ⅳ Part 1，Leibzig 1931

(12) Pack，D. C.，A Note on Prandtl's Formula forthe Wave - Length of a Supersonic Jet，Q. J. Mech. and Appl. Math. Vol. 3,（1950），pp173 - 181.

(13) Ward, G. N.，The approximate external and internal flow past a quasi-cylindrical tube moving at supersonic speed，Q. J. Mech. and Appl. Math. Vol.1（1948）

(14) 高野暲，谷喬，“軸対称超音速噴流の実験的研究”，航空学会誌第２巻第９号

(15) Cline, M. C : Computation of Steady nozzle flow by a Time-Dipendent Method，AIAA J., Vol. 12，No. 4，1974，pp.419－420

(16) Hayashi，M. and Seto，K：Analylitical and Experimental Study of Two-Dimentional Underex-panded Jets，Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 25，No. 67，1982，pp. 37－52

(17) S. Crist，P. M. ShermanAN，Study of Highly underexpanded Sonic Jet, AIAA J., Vol.4，No. 1，1966, pp. 68－71

(18) Engene S. Love：Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric free Jets, NASA TR R－6, pp77－85

Appendix　軸対称物体まわりの流れ

線型超音速流中の軸対称物体まわりの流れに対しては Kármán − Moore による軸上湧出し分布 $f(\xi)$ を用いた解（$M=\sqrt{2}$ に対して）

$$\varphi(x,\ r) = -\int_0^{x-r} \frac{f(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2}} \qquad \text{(A 1)}$$

が知られている。しかしこの解は物体表面がなめらかな形状に適用されるものである。ロケット円錐頭部と円筒胴体のつぎめのような表面傾斜の不連続があると，対応する軸上の湧出分布 $f(\xi)$ は発散し，解の構成は困難となる。これは前節に見たように有限円筒面上の有限な物理量変化は対応する中心軸上の物理量変化の無限大をもたらすためである。

このような胴体表面傾斜不連続を表現する解は湧出波となるため，図Aに於ける，

$t=x/r=1$，$(t+1)/2=S=1$ の面が基準となり，相似解 f_n もこの面を原点にとることが有利となる。変数 S より $\sigma=1-S$ にうつすと相似解

$$\varphi_n = r^n f_n(x/r)$$

は超幾何関数公式

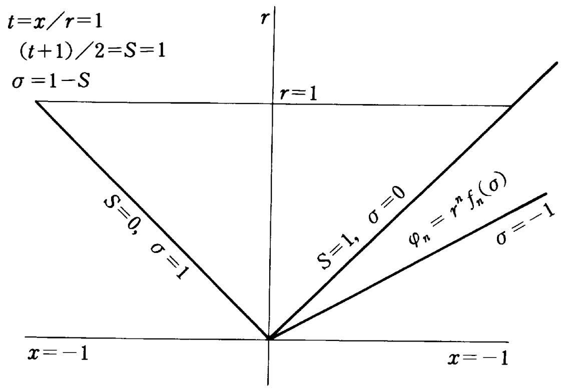
$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ;\ Z) = F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-Z)$$

に於て $\alpha=-n,\ \beta=-n,\ \gamma=\frac{1}{2}-n$ により

$$\alpha+\beta+1-\gamma = \frac{1}{2}-n$$

となるため（12）と同型

$$f_n = F(-n,\ -n,\ \frac{1}{2}-n,\ \sigma) \qquad \text{(A 2)}$$



図A　x，r，S，σ の関係

と与えられる。収束域は $|\sigma|<1$ である（図A）

第１節の考察から基本擾乱流出波として

近似解

$$\bar{\varphi}_a = \delta(x,\ r)/\sqrt{r}$$

に対応する

$$\varphi_{\frac{1}{2}} = 2\delta\sqrt{r}\, f_{\frac{1}{2}}(\sigma)$$

が採用される。これより物体表面に於ける u，v の不連続が与えられる。

不連続点下流に於ける表面傾斜と合わせるためには第一節同様高次の相似解 $\psi_{3/2}$，$\psi_{5/2}$ 等を用いて v を補正する必要がある。この解法は本質的に，以前に求めた近似解 (6) と一致するものである。