

非線形 Tricomi 方程式解析を用いたフォーカスboomにおける低boom波形の効果推算

金森正史, 橋本敦, 青山剛史 (宇宙航空研究開発機構), 山本雅史 (計算力学研究センター)

Effect of low-boom waveform on focus boom using nonlinear Tricomi equation analysis

Masashi Kanamori, Atsushi Hashimoto, Takashi Aoyama (JAXA) and Masafumi Yamamoto(RCCM)

Abstract

Focus boom occurs when a flight vehicle accelerates or maneuvers at supersonic speed and its overpressure increases with a factor of three in comparison with an ordinary sonic boom. As a result, upcoming supersonic transport(SST) will be likely to be restricted its flight conditions. This paper presents the effects of several sonic boom waveforms and flight conditions on the peak overpressure of the focus boom. The authors have developed a focus boom prediction program named FFnoise, which combines a splitting scheme and multi-grid like acceleration, resulting in a remarkable speed of solving nonlinear Tricomi equation with sufficient accuracy. The predictions by FFnoise show the competitiveness of the low-boom waveform not only on steady but also on unsteady flight conditions.

1 はじめに

超音速旅客機の実現に向けて、ソニックboom低減の必要性が叫ばれるようになって久しいが、超音速飛行中の加速やマニューバによって発生する、より強いソニックboomの存在もまた、一部の研究者により主張されてきた。このように通常より強いソニックboomは特にフォーカスboomと呼ばれている。フォーカスboomの波形は、定常飛行時のソニックboom波形に依存するが、一般に非対称性のあるU字型となり、実際に観測されたデータによると、ピーク圧力は通常のソニックboomの3倍程度まで増大することが知られている。フォーカスboomは本質的に飛翔体の非定常運動から発生し、一般に急激な運動をすればするほど、ピーク圧力は増大する。ICAO(International Civil Aviation Organization)では、今後開発されるであろう超音速旅客機のソニックboomに対する制約を設定する動きがあるが、更に強度の高いフォーカスboomに関しても、そのような制約が課せられることは明らかであろう。その結果、超音速旅客機は今後、定常飛行状態はもちろんのこと、加速やマニューバ等の運用面でもまた制約を課せられることになる。そのため、ソニックboom波形及び飛行条件に対するフォーカスboomの感度を知ることが、将来の超音速旅客機実現に向けて極めて重要になる。

以上の要求から、JAXAではこれまでにフォーカスboomの適切な予測手法の開発を進めてきた。フォーカスboom予測に関する研究は、モデル方程式である非線形 Tricomi 方程式の導出に始まり^{1, 2)}、簡単な解析的手法³⁾を経て、現在では数値解析による方法^{4, 5, 6, 7)}が主流となっている。著者らはこれまでに、非線形 Tricomi 方程式の解析プログラムを構築し、それによってフォーカスboomが再現されることを確認した⁸⁾。また、そのプログラムを発展させ、高速で精度良くフォーカスboomを予測するプログラム FFnoise を開発し、予測結果が実験と良く一致することを確認した⁹⁾。

そこで本稿では、まず FFnoise によるフォーカスboomの予測精度を示す。その後、FFnoise を用いて様々な入力波形及び飛行条件に対するフォーカスboom波形を取得し、入力波形及び飛行条件がフォーカスboom波形に及ぼす影響について考察する。特に、JAXA で進行中の D-SEND プロジェクト^{10, 11)}の供試体が作り出す低boom波形の、フォーカスboomに対する影響について議論することを目的とする。

2 フォーカスboomとその発生メカニズム

2.1 フォーカスboomとは

前節で述べたように、フォーカスboomは飛翔体の非定常運動によって生じるものであり、そのため、地上に固定された座標系でこれを議論するのが便利である。この座標系において、

飛翔体から発生する波動の伝わる経路である波線を考える。定常飛行の場合、各時刻で発生する波線は互いに交わることはない。しかし、加速やマニューバを行う場合にはそれらが衝突を起こす場合がある。このときに発生する波線の包絡線を焦線(Caustic)と呼び、その近傍では定常飛行時の数倍と言われるピーク圧を持つソニックboomが発生するということが知られている。Fig.1 にその様子を示す。これは Pushover と呼ばれるマニューバで、水平飛行状態から操縦桿を押し倒し、機首を下げた状態でパワーダイブする飛行であり、その際に発生するフォーカスboomを示しているが、水平加速飛行時にも同様の現象が発生する。焦線近傍では、飛翔体から発生した波線が集積し非常に強いU字波が発生しているのに対して、焦線より左側($Z > 0$ に対応する領域)では、先に到達したN波のあとから、焦線近傍で回折したU字波が観測される。一方で、焦線より右側の領域では evanescent wave と呼ばれる低周波の波動が現れる。

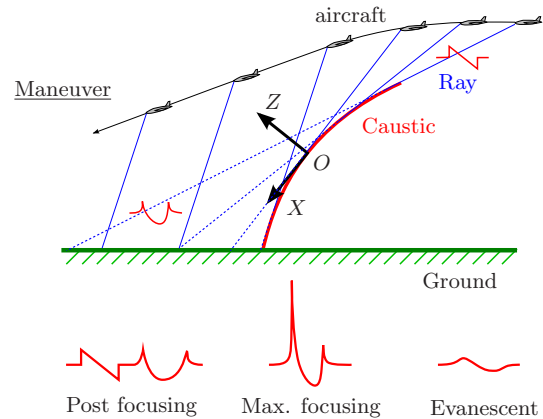


Fig.1 Ray and caustic geometry of a pushover focus

2.2 フォーカスboomのモデル方程式

Fig.1 に示すように、焦線上に原点を置いた局所的な座標系を考える。すなわち、焦線に対して接線方向に X 、法線方向に Z 、それに対して右手系をなすように Y をそれぞれとる。本解析では、 XZ 平面内で起こるフォーカスを、後述する遅延時間 τ と無次元化した座標系 z の空間内で議論するこの空間において圧力場は以下に示す非線形 Tricomi 方程式 (Nonlinear Tricomi Equation, 以降 NTE) を満たす^{1, 2)}。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

ここで p は、一様流圧力 P_0 からの変動値を入力波形の最大振幅 P_{ac} で無次元化したものである。また、遅延時間 τ 及び座標 z は

次のように定義される。

$$\tau = (t - X(1 - Z/R_{\text{sec}})/c_0)/T_{\text{ac}} \quad (2)$$

$$z = Z/\delta = Z/(2/c_0^2 T_{\text{ac}}^2 R_{\text{cau}})^{-1/3} \quad (3)$$

ここで R_{sec} , R_{cau} 及び c_0 はそれぞれ原点における焦線の曲率半径、波線に対する焦線の曲率半径及び一様流の音速である。 T_{ac} は特性持続時間 (characteristic duration) と呼ばれる。 δ は回折境界層 (diffraction boundary layer) と呼ばれる、回折効果が支配的となる領域の厚みである¹²⁾。 μ は回折に対する非線形効果の度合いを表すパラメータであり、次のように評価される。

$$\mu = 2\beta M_{\text{ac}} [R_{\text{cau}}/(2c_0 T_{\text{ac}})]^{2/3} \quad (4)$$

ここで $\beta = (1 + \gamma)/2$, $M_{\text{ac}} = P_{\text{ac}}/(\rho_0 c_0^2)$ はそれぞれ、媒質の非線形パラメータ、音響マッハ数である。 γ は比熱比であり、下添え字 0 は媒質の状態量を表す。 P_{ac} は後述する入力波形の最大振幅である。飛行条件に応じて R_{cau} が大きく変化することから、 μ が NTE に対して飛行条件を与えるパラメータとなる。その効果については、次節以降で詳説する。

この解析における入力、Fig.2 中の Incoming wave である $F(\tau)$ であり、この境界における境界条件は次式で与えられる。

$$z^{1/4} \frac{\partial p}{\partial \tau} + z^{-1/4} \frac{\partial p}{\partial z} = 2 \frac{dF}{d\tau} \left(\tau + \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \quad (5)$$

この方程式の解の模式図を Fig.2 に示す。この図における入力波形は N 波であり、これが焦線近傍へと伝播していくと次第に振幅が大きくなり、かつ波形は U 字形へと変形する。

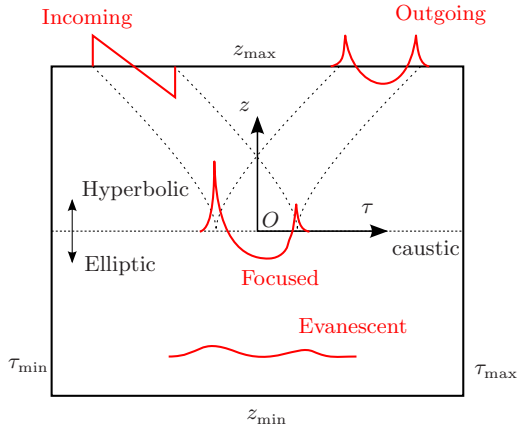


Fig.2 Waves and signatures near and at a caustic on $z-\tau$ space

(1) 式の特性速度は $\sqrt{z - \mu p}$ であり、 $z - \mu p$ の符号に応じて楕円型から双曲型へと変わるため、数値的にこの方程式を解くのは困難が伴う。そこで本稿では、(1) 式を線形 Tricomi 方程式と Burgers 方程式に分ける分離解法^{4, 5, 6)}を採用している。これについては次節にて詳説する。

一方で、(1) 式に対して減衰作用を加えた Lossy NTE と呼ばれるモデルも提案されている¹³⁾。Lossy NTE は、(1) 式に熱粘性及び分子振動緩和効果を加えたものであるが、本稿ではこれを扱わず、(1) 式を解析して実験結果と比較し、減衰作用の必要性について論じる。

3 非線形 Tricomi 方程式解析プログラム FFnoise の詳細

本節では、NTE 解析プログラム FFnoise の解析アルゴリズムを詳説し、検証結果を紹介する。

3.1 FFnoise の解析アルゴリズム

前節で述べたとおり、FFnoise は (1) 式を 2 つの方程式に分離し、別々に解析する分離解法⁶⁾を採用した。以降では、その手法について紹介する。(1) 式に擬似的な時間発展項 $\partial/\partial t$ を導入し、更に次のような圧力のポテンシャルを導入する。

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Leftrightarrow \phi = \int_{-\infty}^{\tau} p(\xi) d\xi \quad (6)$$

その結果、(1) 式及び境界条件 (5) 式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 \right] \quad (7)$$

$$z^{1/4} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + z^{-1/4} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2F\left(\tau + \frac{1}{3} z^{3/2}\right) \quad (8)$$

本解法では、(7) 式を以下の 2 つの方程式に分離する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 \right] \quad (10)$$

(9) 式及び (10) 式はそれぞれ線形 Tricomi 方程式及び Burgers 方程式であり、前者は周波数領域で、後者は時間領域でそれぞれ解く。(9) 式は周波数空間上で次のような偏微分方程式となる。

$$i\omega \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z\omega^2 \Phi \quad (11)$$

z 方向に 2 次精度中心差分で、 t 方向に 1 次精度後退差分で離散化することで、陰的に解く。これによって得られた解を逆変換することによって時間領域の解を得る。

次に (10) 式を解く。この方程式は、 p に対する Burgers 方程式となっている。Burgers 方程式の解法は、Poisson solution による解法¹⁴⁾や差分法によって直接解析する方法¹⁵⁾などが知られているが、本稿では Burgers Hayes 法¹⁶⁾と呼ばれる、ポテンシャルを利用した解法を導入した。この方法では、圧力の Burgers 方程式を解く代わりに、圧力のポテンシャルである ϕ の方程式 (10) を扱う。その手順は以下のとおりである。

1. 前時間ステップの波形 $p_0(\tau)$ 及びポテンシャル $\phi_0(\tau)$ に対して、次式に従って波形を伝播させる。

$$\tau = \theta - \mu t p_0(\theta) \quad (12)$$

$$\phi(t, \tau) = \phi_0(\theta) - \frac{\mu t}{2} p_0(\theta)^2 \quad (13)$$

θ は波形歪を適用後の新しい座標系に対応するダミー変数である。

2. 不等間隔となった座標系を等間隔のものにサンプリングしなおす。その際、 $\phi(t, \tau)$ は次のように最大のものを取る。

$$\phi(t, \tau) = \max \left\{ \phi_0(\theta) - \frac{\mu t}{2} p_0(\theta)^2 \right\} \quad (14)$$

以上の操作によって得られたポテンシャル ϕ を中心差分で評価することで圧力 p が得られ、かつその結果は Area balancing を行った結果と同一のものとなる。このように、Burgers Hayes 法は Area balancing の複雑な処理を、簡潔かつ高速に行うことを可能にする。

更に FFnoise では、Multigrid 法に似たアルゴリズムを採用することによって収束を速めている。すなわち、最終的な格子

に対して粗い格子を数段階にわたって用意し、粗い格子における計算を収束させてから、1 段階細かい格子へと補間して再計算を行っている。のちの例で示すように、フォーカスブームを正しく推算するためには、非常に多くの格子点数が必要になるが、このような手法を用いることによって、従来の解析手法と比較して、10 倍程度的高速化が可能になった。なお、前述の分離解法による結果は初期条件に依存しないことが確認されているため⁶⁾、格子間の補間による問題は発生しない。

3.2 検証結果

ここでは、前述の解析プログラムの結果を、2008 年に米国内の砂漠で行われた SCAMP と呼ばれる大規模実験の実験結果¹⁷⁾と比較する。この実験では、地上にマイクロアレイを配置し、マニユーバした F-18B 戦闘機の作るフォーカスブームを計測した。その際に得られた各種条件を Table 1 にまとめた。入力波形は文献¹³⁾に示されたものを用いた。

Table 1 Calculating conditions

P_{ac}	91300	Pa
T_0	284	K
ρ_0	1.12	kg/m ³
P_{ac}	57	Pa
M_{ac}	4.46×10^{-4}	—
$f_{ac} = 1/T_{ac}$	8.17	Hz
R_{cau}	4.88×10^4	m
μ	0.0878	—

以上の条件を導入し、解析を行った結果を Fig.3 に示す。Fig.3 において、赤、青、緑がそれぞれ実験結果、Lossy NTE による解析結果、そして本稿で述べた NTE 解析プログラムによる結果である。なお、格子点数や時間ステップなどの計算条件は、すべて Lossy NTE のものに合わせてある。

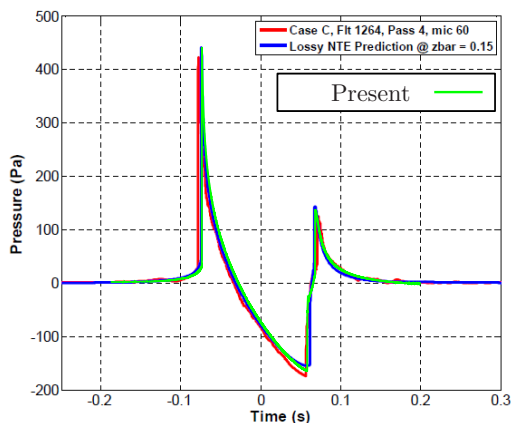


Fig.3 Comparison of the measurement from SCAMP¹³⁾ with two predicted results(lossless and lossy NTE)

Fig.3を見ると、FFnoiseの結果と Lossy NTEの結果とを比較して、最大ピーク圧力値についてはほぼ同じ値であることが分かる。ここで、FFnoiseと Lossy NTEは物理モデルが異なるという点に注意されたい。すなわち、Lossy NTEは物理的な減衰構造を加味しているが、FFnoiseはそれを加えていない。そのため、解法が同じであればこれらの結果は異なってくると考えられる。実際、FFnoiseと Lossy NTEは、Burgers方程式の解析手法に違いがある。文献¹³⁾では Poisson solutionを用いているが、本稿では Burgers Hayes法を用いて解析を行っている。

Burgers Hayes法の場合、Aging及び Area balancingの操作を行った後に補間を行うため、解は数値的に安定な方向に向かうと考えられるが、Poisson solutionを用いた場合、ほぼ解析的な操作によって波形の歪み及び衝撃波の導入を行うため、波形の数値的不安定性が大きいことが知られている。実際、Lossy NTEの解析においては、物理的な減衰作用を付加しないと、安定に計算できないとのことである。それに対して本解析の結果は、物理的な減衰作用を加えることなく、安定にフォーカスブームを解析することができている。また、Poisson solutionと比較して計算が単純であり、その結果高速に解を得られるという点も強調しておきたい。

一方、FFnoiseの結果及び実験結果とを比較すると、全体的に波形が良く一致していることが確認できるが、最大ピーク圧力値については、FFnoiseの結果が実験値よりも高めの予測を示している。これについては Lossy NTEの結果についても同様であるが、FFnoiseに減衰作用を加えることによって、実験値を適切に再現できる可能性が示唆される。このことは、Fig.4に示すピーク圧力値の格子依存性からも明らかである。これは、縦軸に FFnoiseの解析結果におけるピーク圧力値、横軸にその時の格子点数をそれぞれ設定したグラフであるが、格子点数を増やしていくと、ピーク圧力値が上昇し続けることが分かる。同時に、フォーカスブーム解析は格子点数に対する依存性が非常に大きいことが分かる。しかし、最も重要である最大ピーク圧力値については、実験値との差異が約 5% 程度であり、これ以降はこの解像度の格子で議論を進める。

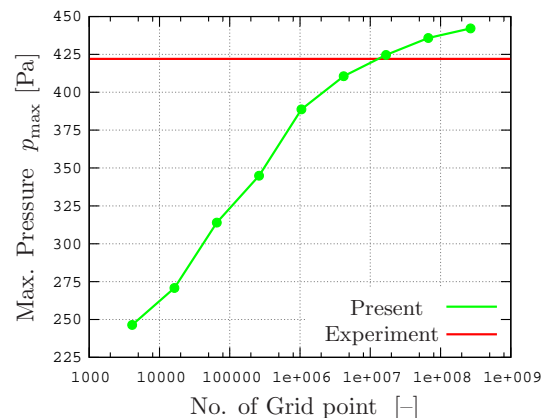


Fig.4 Grid dependence of the maximum peak pressure

4 さまざまな飛行条件におけるフォーカスブーム波形の変化

本節では、N波や低ブーム波形のフォーカスブーム波形を、さまざまな飛行条件を仮定して推算し、その傾向について考察する。

4.1 飛行条件とパラメータ μ の関係

フォーカスブームにおける飛行条件の変化は、NTEでは(4)式で与えられるパラメータ μ によって加味される。その中で飛行条件に対応するパラメータは P_{ac} , T_{ac} , R_{cau} であり、最初の2変数については、Table 1で与えられるものを典型的な例として導入した。波線に対する Causticの相対曲率半径 R_{cau} を、本稿では次の手順で求めた。

1. 飛行体の飛行経路を設定し、その各点を出発点として下記

の方程式¹⁸⁾を解くことにより、波線 \vec{x} を求める

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c_0 \vec{n} + \vec{V}_0, \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = (I - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{\nabla}(-c_0 - \vec{V}_0 \cdot \vec{n}) \quad (15)$$

ここで、 \vec{n} は飛翔体の作るマッハ円錐の法線ベクトルであり、波線の進行方向を表す。また、 \vec{V}_0 は各高度における風速ベクトルであり、今回はこれをゼロとした。なお、定常飛行をしている場合でも、波線は直線とはならず次第に曲がっていく。これは、音速 c_0 が温度 T の関数であり、 T が高度に応じて変化するためである (Fig.5 参照)。

2. Caustic の曲率半径 R_{sec} を次の手順で求める
 - (a) 適当な高度 z を設定し、flight path 上の各点から発生させた波線と、 $z = \text{const.}$ との交点 x を求め、その中で最も小さいものを、その高度における Caustic の x 座標とする
 - (b) Caustic 上の3点を円でフィッティングし、その時の半径を Caustic の曲率半径とする
3. 波線の曲率半径 R_{ray} を、上記の方法と同様にして求める
4. 波線に対する Caustic の相対曲率半径 R_{cau} を次の手順より求める。

$$R_{\text{cau}} = ((R_{\text{ray}})^{-1} - (R_{\text{sec}})^{-1})^{-1} \quad (16)$$

上式では便宜上、 R_{cau} が R_{ray} 及び R_{sec} の差で定義されている。これは、波線と Caustic がそれぞれ下及び上に凸となるためであり、 R_{ray} 及び R_{sec} の絶対値の和を取れば良い。すなわち、

$$R_{\text{cau}} = (|R_{\text{ray}}|^{-1} + |R_{\text{sec}}|^{-1})^{-1} \quad (17)$$

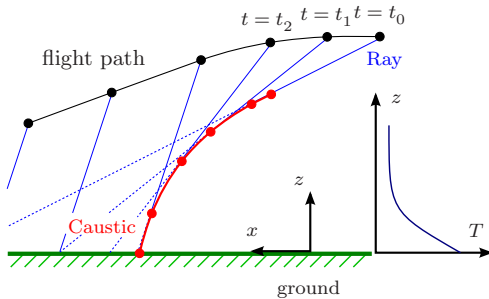


Fig.5 Procedure for calculating caustic

厳密には、Caustic は波線の包絡線であり交点ではないが、波線の出発点を十分近くにとることによって、Caustic を近似できるものとした。以上の方法により、水平加速を行った場合の、地上における Caustic の曲率半径及びパラメータ μ をまとめたものを Table 2 に示す。また、解析の一例として、加速度 $1[\text{m/s}^2]$ の飛行状態を模擬した場合の波線と Caustic の様子を Fig.6 に示す。Table 2 を見ると、加速度に応じて Caustic の曲率半径が次第に減少し、それに合わせてパラメータ μ も減少していることが分かる。本稿で考えるように線形加速の場合には、加速度の変化に対して μ にさほど大きな変化は無いが、その他のマニューバや、或いは加速との組み合わせによって、曲率半径は容易に小さくなりうる。そのため、本稿では μ を 0.01 から 0.2 まで 0.01 刻みで解析を行い、各種入力波形に応じてフォーカスブームの最大ピーク圧力値がどのような影響を受けるのかを考察した。

4.2 各種入力波形の選択

本稿では、入力波形として Fig.7 に示す 6 種類を選択した。これらの波形は、D-SEND#2 の地上波形を元に、フォーカスブー

Table 2 Relation between the acceleration, the radius of curvature of the caustic and the parameter of nonlinearity

Acceleration $a [\text{m/s}^2]$	Radius $\times 10^{-4} [\text{m}]$			Parameter $\mu [-]$
	R_{ray}	R_{sec}	R_{cau}	
0.2	8.98	2940	8.95	0.101
0.4	9.09	359	8.87	0.100
0.6	9.20	158	8.69	0.0987
0.8	9.31	92.7	8.46	0.0970
1	9.41	91.2	8.53	0.0975
1.2	9.51	53.6	8.08	0.0940
1.4	9.61	67.8	8.42	0.0966
1.6	9.67	43.4	7.91	0.0927
1.8	9.79	35.8	7.69	0.0910
2	9.87	41.3	7.97	0.0931

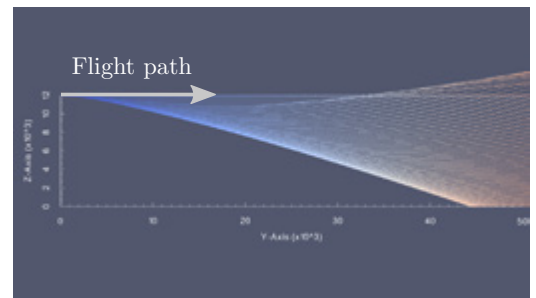


Fig.6 Example of caustic and rays emanating from supersonic vehicle accelerating at $1 [\text{m/s}^2]$

ムに対する低ブーム波形の要素の効果を調べることを目的として設定した。すなわち、Table 3 に示すように、ソニックブームとして最も基本的な N 波に対して、低ブーム波形の特徴である有限の立ち上がり時間、先頭の立ち上がり圧力の低減、先頭立ち上がり後の平滑さ (Flat top) を順次付加した波形である。いずれも、波形の持続時間及び振幅を、それぞれ波形の長さ及び最大振幅で正規化している。立ち上がり時間は、Error function によって表現し、その時間は波形全体の 10% に設定した。また、C- N wave 及び FT wave の先端立ち上がり圧力は、 N 波のものの 75% に設定した。以上の設定は、D-SEND#2 波形を参考に設定したものである。

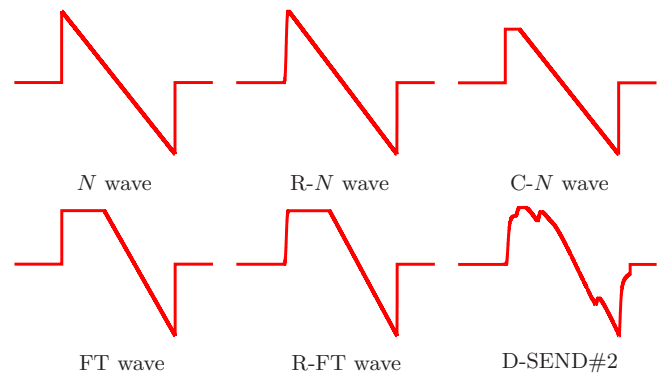


Fig.7 Six waveforms considered in this article

4.3 各種入力波形に対するフォーカスブーム波形の変化

以上の設定に基づいて、様々な入力波形に対するフォーカスブーム波形の変化を解析した結果を Fig.8 に示す。この図は、パ

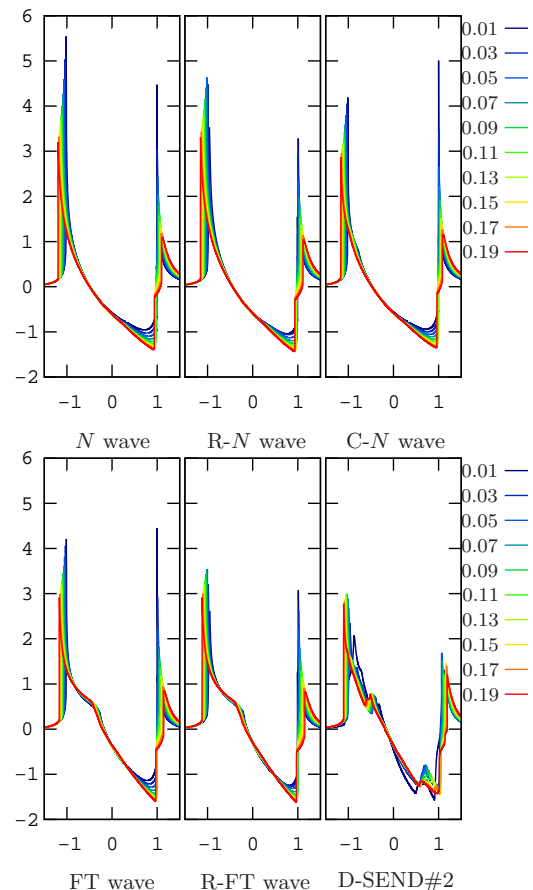
Table 3 Categorization of the six waveforms with respect to the low-boom characteristics

	Rise time	Low front peak	Flat top
<i>N</i> wave			
R- <i>N</i> wave	✓		
C- <i>N</i> wave		✓	
FT wave			✓
R-FT wave	✓		✓
D-SEND#2	✓		✓

ラメータ μ に対応するフォーカスブーム波形を重ねてプロットしたものであり、青から赤になるにつれて μ が大きい波形に対応する。なお、これらの波形は各 μ に対して先端のピーク圧力値が最大になる波形を選んだものであり、後端のピーク圧力値については考慮していない点に注意されたい。これを見ると、一般に μ が大きくなるにつれてフォーカスブーム波形はピークが小さくなり、全体に穏やかな波形となることが分かる。これは、非線形効果が強く作用することによって波形の歪みが大きくなり、その後等面積則に基づいた衝撃波の導入によってピーク圧力が下がるためである。また、Fig.7 と照らし合わせてみると、低ブーム波形がフォーカスブームに及ぼす効果が確認できる。すなわち、*N* wave と R-*N* wave を比較すると、立ち上がり時間を付加することでフォーカスブーム波形先端のピーク圧力が減少していることが分かる。この傾向は FT wave と R-FT wave の比較にも表れていることから、立ち上がり時間の付加によってフォーカスブームのピーク圧力値を減少させる効果があるといえる。同様に、ピーク圧力値の低減効果を調べるために *N* wave と C-*N* wave を比較すると、先端の圧力値はやはり減少しているということが分かる。一方で、C-*N* wave と FT wave とを比較すると、ピーク圧力値の変化という意味ではほぼ同一の効果であることが分かる。従って、先端のピーク圧力値を減少させることで、フォーカスブームのピーク圧力値もまた減少するが、Flat top 部の長さはフォーカスブームに対してほとんど影響しないということが分かる。前述した通り、FT wave に対して立ち上がり時間を付加すると、より一層先端ピーク圧力値が減少することが分かる。

Table 2 に示したように、線形加速の場合にはパラメータ μ は 0.09 から 0.10 の間で変化するととどまる。このような条件時であっても、Fig.8 に示されるように D-SEND#2 波形のような低ブーム波形のフォーカシングは小さいことが分かる。このことから、定常飛行時に低ブームである D-SEND#2 波形は、加速やマニューバ時における飛行においても、*N* 波等と比較してフォーカスブームの低減が可能であるということが分かる。

次に、各フォーカスブーム波形の最大ピーク圧力値 p_{\max} のパラメータ μ 依存性を議論する。Fig.9 は、各種入力波形に対して μ をパラメータとして NTE 解析を行い、そこで得られた最大ピーク圧力値をまとめたものである。Fig.9 を見ると、 μ に対する最大ピーク圧力値の依存性が大きく 2 つのパターンに分けられることが分かる。すなわち、*N* wave や C-*N* wave, FT wave に見られるように、 μ に対して単調に減少するパターンと、R-*N* wave や R-FT wave, D-SEND#2 のように、 $\mu \in [0, 0.2]$ の区間において、ピーク圧力値に極大値が発生するパターンである。後者の共通点は、いずれも有限な立ち上がり時間を有している点である。

Fig.8 Variations of the focus boom waveform for six incoming waveforms (horizontal axis: τ , vertical axis: p)

このように、立ち上がり時間の有無によって極大値が発生する要因は、回折効果と非線形効果のバランスによって説明できる。回折効果は、一般に波形の勾配によって決まる。すなわち、ある波形が回折すると、その波形を微分した形の波形が得られるということが知られている。従って、立ち上がり時間の有無によって、回折波の先端ピーク圧力値は大きく変化することが分かる。実際、*N* や C-*N*, FT のフォーカスブーム波形は、それらに立ち上がり時間を付加した波形のフォーカスよりもピーク圧力値は小さくなっている。一方で、非線形効果は振幅に応じて波の伝わる速度が変わり波形が歪む効果であるが、この時衝撃波が発生すると最初の波形と比較して振幅が小さくなる。このように衝撃波の形成によって振幅が減少する効果を非線形減衰と呼ぶ¹⁹⁾。これらを総合すると、立ち上がり時間の有無に関係なく、非線形性を強くする (μ を大きくする) ことによって、ピーク圧力値は単調に減少するように思われるが、実際にはそうならない。それは、Caustic 近傍ではなく、Caustic へ向かって伝播していく過程 (Fig.2 中の $z > 0$ にあたる部分) においても非線形性が作用するためである。これを R-*N* wave を例にとって説明する。 μ が小さい場合には、Caustic へ向かって伝播する間に作用する非線形性が小さいため波形歪も小さく、その結果 Caustic 上では立ち上がり時間の差によって *N* wave の方が R-*N* wave よりも強いフォーカス波形を記録する。 μ が次第に大きくなると、Caustic に到達する前に非線形性によって立ち上がり時間が減少し、Caustic 上で *N* wave と R-*N* wave の差が無くなることで、結果的に両者のピーク圧力値は近い値を取るようになる。更に μ を大きくすると、Caustic への伝播の最中に非線形性が強く作用するため、上述の非線形減衰が強く現れる。そのため、

Caustic に到達するときには N , $R-N$ 両者ともに振幅が小さく、その結果フォーカス波形もまたピーク圧力値が小さくなる。そのため、有限の立ち上がり時間を持つ波形のフォーカスは μ の変化に対して極大値を持つと考えられる。以上の考察から、有限の立ち上がり時間があり、かつ先端のピーク圧力値が小さい波形に対して、フォーカスブームは小さくできる可能性が示唆される。

Fig.9 に関して更に特筆すべきは、Table 4 にまとめたピーク圧力値の μ に対する感度である。Table 4 は、区間 I における p_{\max} の最大値と最小値及びそれらの差、すなわち Fig.9 のグラフの振幅を示す。Table 4 を見ると、D-SEND#2 波形の変化量 Δp_{\max} は他の波形に対して半分以下と非常に小さな値となっている。 μ が飛行条件に対応するパラメータであることを思い出すと、変化量 Δp_{\max} は次のように解釈できる。すなわち、 Δp_{\max} が大きいということは、飛行条件に応じてフォーカスブームのピーク圧力値が変化しやすいということを意味する。従って、この変化量が大きい波形は飛行条件によってフォーカスブームが大きく変化し、その結果飛行条件が限られることが予想される。それに対して、D-SEND#2 波形のような変化量の小さい波形は、飛行条件の制約が小さい。

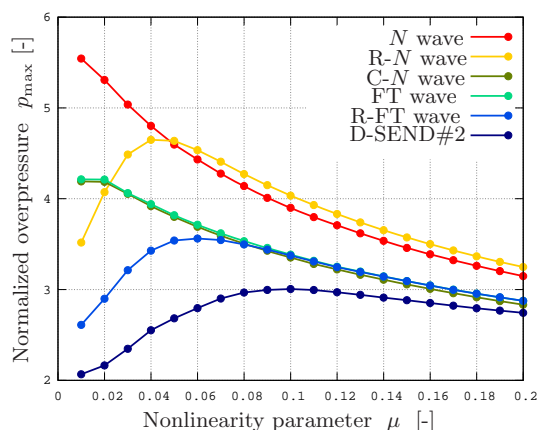


Fig.9 Variation in the maximum peak pressure against the parameter μ

Table 4 Rate of change of the peak pressure with respect to the parameter μ

	$\max_{\mu \in I} p_{\max}$	$\min_{\mu \in I} p_{\max}$	Δp_{\max}
	(1)	(2)	(1) - (2)
N wave	5.544	3.148	2.396
R-N wave	4.649	3.248	1.401
C-N wave	4.191	2.833	1.357
FT wave	4.213	2.876	1.337
R-FT wave	3.562	2.612	0.950
D-SEND#2	3.005	2.067	0.939

5 まとめ

本稿では、超音速機の加速やマニユーバに伴って発生するフォーカスブームを解析するため、そのモデル方程式である非線形 Tricomi 方程式を解析するプログラム FFnoise を開発し、それを紹介した。FFnoise の予測結果は従来法と比較して 10 倍程度高速に得られ、かつ大規模実験によって得られた結果と良い一致を示した。更に本稿では、 N 波や低ブーム波形などを入力

波形として、さまざまな飛行条件において得られるフォーカスブームを解析した結果を示した。それらの結果を見ると、定常飛行時に低ブームとなる波形は、フォーカスブームにおいても良い特性を示すことが明らかになった。すなわち、有限な立ち上がり時間の付加や先端ピーク圧力値の低減などの、いわゆる低ブーム波形の特徴を付加することによって、フォーカスブームの最大ピーク圧力値を低減できることが分かった。また、このような低ブーム波形は、さまざまな飛行条件に対してフォーカスブームの最大ピーク圧力値の感度が低く、その結果、低ブーム波形を発生させる機体はその飛行条件に対する制約が小さくなる可能性が示唆される。このことは、今後導入されるであろうフォーカスブームの最大ピーク圧力値の制限に対して、低ブーム波形を発生させる飛翔体が他の飛翔体に対して優位であるということの意味する。以上の結論として、低ブーム波形を発生させる飛翔体は、定常飛行時の騒音はもちろんのこと、加速或いはマニユーバを行った場合の騒音もまた低減できる可能性を示唆している。

参考文献

- 1) Guiraud. *Journal de Mécanique*, Vol. 4, No. 2, pp. 215–267, 1965.
- 2) Hayes. In *Proceedings of the Sound Conference on Sonic Boom Research*, NASA SP-180, pp. 165–171, 1968.
- 3) Gill and Seebass. *AIAA Paper 73-1037*, 1973.
- 4) Kandil and Khasdeo. *AIAA Paper 2006-0415*, 2006.
- 5) Auger and Coulouvrat. *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 1726–1734, 2002.
- 6) Marchiano and Coulouvrat. *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 114, pp. 1758–1771, 2003.
- 7) Sescu, Afjeh, and Sescu. In *Eighth Mississippi State - UAB Conference on Differential Equation and Computational Simulations*, *Electronic Journal of Differential Equations Conference 19*, pp. 235–244, 2010.
- 8) 金森, 橋本, 村上. 第 50 回飛行機シンポジウム講演論文集, No. 2C08, JSASS-2012-5131, 2012.
- 9) 金森, 橋本, 青山. 2013 年度超音波研究会 (US), 2013.
- 10) D-SEND プロジェクトチーム. <http://www.apg.jaxa.jp/research/d-send/ds-project.html>.
- 11) D-SEND プロジェクトチーム. <http://d-send.jaxa.jp/>.
- 12) Buchal and Keller. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, pp. 85–114, 1960.
- 13) Salamone, Sparrow, Plotkin, and Cowart. *AIAA Paper 2013-0935*, 2013.
- 14) Blackstock. In Gray D. E., editor, *American Institute of Physics Handbook*, chapter 3n, pp. 3–183 – 3–205. McGraw-Hill, New York, 1972.
- 15) Aanonsen, Tjøtta, and Tjøtta. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 75, , 1984.
- 16) Hayes, Haefeli, and Kulsrud. *NASA CR-1299*, 1969.
- 17) Page, Plotkin, Haering, Maglieri, Cowart, Salamone, Elmer, Welge, and Ladd. *AIAA Paper 2013-0930*, 2013.
- 18) Thomas. *NASA SP-255*, 1970.
- 19) 鎌倉友男. 非線形音響学の基礎. 愛智出版, 1994.