

## 縮約モデルと粒子フィルタを用いたリアルタイムデータ同化計算

菊地亮太, 三坂孝志, 大林茂  
東北大学 流体科学研究所

## Real-Time Data Assimilation Using Particle Filter and Reduced Order Model

by  
Ryota Kikuchi, Takashi Misaka, and Shigeru Obayashi

## ABSTRACT

In this research, aiming at real-time data assimilation, a reduced order model (ROM) and a particle filter (PF) are applied to predict the Karman vortex around a circular cylinder. The ROM is an efficient tool to calculate a flow field in real-time because the ROM consumes extremely less computational time than the original numerical model. The PF is employed to estimate coefficients of the ROM by using observed velocity components in the wake of the circular cylinder. Comparing the result of the ROM and that of the numerical analysis by Building Cube Methods (BCM), the phase difference of the Karman vortex between the ROM and the observations was corrected. The proposed method could estimate the flow field accurately in real-time even though the observation contained artificial measurement errors.

## 1. はじめに

航空旅客輸送量は世界的に拡大傾向にあり、航空機運航の効率化が求められる。運航の効率化においては気象の影響が大きく、特に空港周辺で発生する低層風擾乱による着陸復行や代替地着陸は、運航定時性の確保を困難にする。一方で、航空旅客の拡大に伴い、旅客機事故全体に対する乱気流事故の割合が高まっている。低層風擾乱の解析・予測は運航効率の観点のみならず航空機の安全向上においても非常に重要である[1]。

現在の気象予測で用いられている気象予測モデルは、大規模気象・メソスケール気象以上の現象を対象にしている。そのため、気象予測モデル単独では空間分解能・地表面の再現性が問題となり、低層風擾乱の評価に適さない。そこで、気象予測モデルとラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation, LES) を組み合わせた手法が提案されている[2-4]。しかし、気象予測モデルでは大規模気象からのダウンスケーリング[5]、LES では高解像度の計算が必要となることから計算負荷が大きくなる。したがって、現状の計算資源ではリアルタイムに低層風擾乱を予測することは困難である。

本研究では、リアルタイム低層風擾乱予測システムを目指して、固有直交分解を用いた縮約モデルとデータ同化手法である粒子フィルタを組み合わせた手法の構築を行っている。大規模データから主成分を抽出するのに有効な固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition, POD) [6-8] を流れ場に適用し、流れ場の特徴的な構造を有する主成分から縮約モデル[6,9]を定義する。縮約モデルにより、流れ場を適切に低次元の常微分方程式によって表現することにより、流れ場の計算時間を LES と比較して大幅に削減することができる。さらに、縮約モデルを構成する係数の決定に逐次データ同化手法である粒子フィルタを用いることで、観測値を取り入れる[10-12]。これにより、観測データから縮約モデルの係数を推定し、リアルタイムに流れ場の計算を行う。

本稿では、検証問題としてレイノルズ数  $Re=100$  の円柱後流に発生するカルマン渦列を対象としての計算を行い、その結果から縮約モデルを構築する。一方で、計算結果に対して実観測を模擬した誤差を加えることにより、疑似観測を作成する。疑似観測と縮約モデルにデータ同化を適用することで、観測に則した流れ場を推定できるか検証する。また、疑似観測に含まれる誤差およびデータ同化を行う際に用いるシステムノイズの大きさを変化させた場合、流れ場の推定精度の評価を行う。

## 2. 解析手法

## 2. 1 数値解法

本研究では、円柱周りの流れの非定常解析を実施した。流体計算手法として Building Cube Methods (BCM) を用いる[13-15]。BCM においては、流れ場を“Cube”と呼ばれる立方体領域に分割し、各 Cube 内に“Cell”と呼ばれる等間隔直交格子を生成して、流体計算を行う。基礎方程式には、3次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いる。数値解法は以下の通りである。対流項には 3 次精度河村・桑原スキーム、粘性項には 2 次精度中心差分を適用し、時間積分は 4 次精度ルンゲクッタ法を用いた。物体境界には Immersed boundary 法を用いて、曲面の再現性を向上させた。低レイノルズ数での解析であるため、壁面モデルや乱流サブグリッドスケールモデルは用いていない。表 1 に計算条件、図 1 に計算格子を示す。円柱直径 1.0[m]、一様流速 1.0[m/s]、粘性係数  $1.2 \times 10^{-2} [m^2/s]$  として計算を行った。

表 1 BCM の計算条件

Number of Cube	592
Cells in a cube	$16 \times 16 \times 16$
Total number of cells	2,424,832
Minimum cell size	0.039063
Reynolds number	100
Time step	0.004

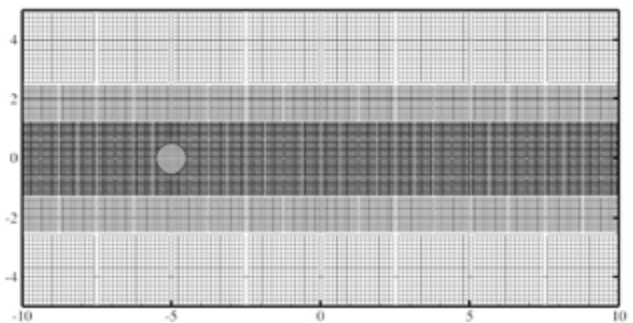


図 1 円柱周りの計算格子

## 2. 2 固有直交分解を用いた縮約モデル

## 2. 2. 1 固有直交分解

POD を流れ場に適用することで、流れ場の特徴的な構造を抽出し、縮約モデルの構築を行う。LES の計算結果に対して、POD を適用する場合、大規模の固有値問題を解く必要があるため、計算負荷の観点で現実的ではない。そこで

瞬時の流れ場をもとに、小規模の固有値問題に帰着させる Snapshot POD を用いる[16].

ある瞬間の流れ場の風速成分を  $\mathbf{U}_i$  とする. このとき,  $i$  は時間を表しており, 離散化した時間  $t_1, \dots, t_k$  における瞬時場を用いる.  $k$  は Snapshot POD に用いる瞬時場の数である. Snapshot POD で用いる流れ場の平均値  $\bar{\mathbf{U}}$  および瞬時場から平均値を引いた擾乱成分  $\mathbf{V}_i$  は式(1)および(2)のように定義される.

$$\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{U}_i \quad (1)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}} \quad (2)$$

擾乱成分  $\mathbf{V}_i$  を, 縦ベクトルとして並び替え, 式(3)に示す通り, 行列  $\mathbf{X}$  に格納する. そして, 式(4)に示した  $k \times k$  次元の固有値問題を解く.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k) \quad (3)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad (4)$$

$\mathbf{u}_i$  は共分散行列  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  の固有ベクトル,  $\lambda_i$  は固有値である. 特徴的な構造を表す POD 基底ベクトル  $\phi_i$  は式(5)で定義される. また, 式(6)に示す通り, 擾乱成分  $\mathbf{V}$  は POD 基底ベクトルの線形結合によって表すことができる. このとき,  $a_i$  は時間発展を表す係数である.

$$\phi_i = \mathbf{X} \mathbf{u}_i / \sqrt{\lambda_i} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}(x, t) = \sum_{i=0}^r a_i(t) \phi_i(x, t) \quad (6)$$

## 2. 2. 2 縮約モデル

Snapshot POD によって計算された POD 基底ベクトル  $\phi$  を利用して, 縮約モデルの構築を行う. 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を直接 POD 基底ベクトルに射影することにより, POD によって流れ場を展開する際の係数である  $a_i$  から成る縮約モデルを構築できる. 流体計算で必要とされる格子数の計算を行うことなく, 主要な POD 基底ベクトルにかかる展開係数の計算のみで, 流れ場を解析することが可能である.

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と POD 基底ベクトルの内積を式(7)に示した. 式(6)を式(7)に代入して, 内積の計算を行うことで, 式(8)に変換される. ここで  $\rho$  は大気密度,  $p$  は圧力,  $\mu$  は粘性係数である.

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \phi_i \right\rangle = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \frac{da_j}{dt} \langle \phi_i, \phi_j \rangle + \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r a_i a_j \langle \phi_k, (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j \rangle \\ = \frac{\mu}{\rho} \sum_{i=0}^r a_i \langle \phi_i, \nabla^2 \phi_j \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

このとき, それぞれの POD 基底ベクトルは非圧縮条件を満たしている. また POD 基底ベクトルは互いに正規直交しているため,  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$  は  $\delta_{ij}$  (Dirac のデルタ関数) になる. これより, 式(8)は以下に示す式(9)のように変換できる. 式(9)が非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を POD 基底ベクトルに射影した縮約モデルである.  $a_i$  を時間発展形で記述することにより, 流れ場の時間発展を表すことができる. また, 初期条件は速度場を POD 基底に射影することで得られる.

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r F_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=0}^r G_{ij} a_j \\ F_{ijk} &= -\langle \phi_i, \phi_j \cdot \nabla \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

$$G_{ij} = \frac{\mu}{\rho} \langle \phi_i, \nabla^2 \phi_j \rangle$$

$$\text{subject to } a_i(t_0) = \langle \mathbf{u}(x, t_0) - \bar{\mathbf{u}}(x), \phi_i \rangle$$

## 2. 3 粒子フィルタ

疑似観測値を粒子フィルタにより, 縮約モデルに取り込み, データ同化計算を行う. 粒子フィルタは, 非線形・非ガウス型に関わらず, あらゆる状態空間モデルに適用できるデータ同化手法である. 粒子フィルタは, 状態量の確率分布を多数の粒子の実現値によって近似的に表現する手法である. 各粒子について計算を行う予測ステップと, リサンプリングに基づくフィルタリングのステップを交互に繰り返すことで状態推定を行う.

非線形・非ガウス型の状態空間モデルを式(10)に示す.  $\mathbf{x}_t$  は時刻  $t$  の  $k$  次元の状態ベクトル,  $\mathbf{y}_t$  は時刻  $t$  の 1 次元の観測ベクトル,  $\mathbf{v}_t$  と  $\mathbf{w}_t$  はそれぞれシステムノイズと観測ノイズである.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t) \end{aligned} \quad (10)$$

粒子フィルタの一期先予測分布は, 各粒子について計算して得られる予測粒子によって式(11)のように近似される.

$\delta$  は, Dirac のデルタ関数とし,  $x_{t|t-1}^{(i)}$  は時刻  $t$  における各粒子の予測分布を表わしている.

$$p(x_t | y_{1:t-1}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \quad (11)$$

ここでは,  $N$  は全粒子数である. 本研究では,  $N$  は 250 個を用いた. 観測値  $y_t$  が与えられた時の粒子ごとの尤度  $\lambda_t^{(i)}$  を規格化した重み  $\beta_t^{(i)}$  を式(12)に示した. さらにフィルタ分布は重み  $\beta_t^{(i)}$  を用いて式(13)のように表わされる.

$$\beta_t^{(i)} = \frac{\lambda_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \lambda_t^{(j)}} \quad (12)$$

$$p(x_t | y_{1:t}) \cong \sum_{i=1}^N \beta_t^{(i)} \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \quad (13)$$

ここで各粒子が重み  $\beta_t^{(i)}$  に比例する割合で抽出されるようにリサンプリングを行い、計  $N$  個の粒子を復元抽出する。これよりフィルタ分布は式(14)のように変形することができる。

$$p(x_t|y_{1:t}) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_t - x_t^{(i)}) \quad (14)$$

本研究では、縮約モデルを構成する  $a_i$  に対して、粒子フィルタを用いて観測値を取り込み、係数の逐次推定を行う。

### 2. 4 検証問題の条件

本研究では、上記手法の検証問題として BCM により計算を行った  $Re=100$  の円柱後流に発生するカルマン渦列を用いる。瞬時場の水平流速成分  $U$  および垂直速度成分  $V$  を図 2 および 3 に示した。計算結果に実観測を模擬した誤差を含めた疑似観測を作成する。正規分布乱数を粒子フィルタで用いる粒子数だけ発生させ、BCM による計算結果に足し合わせることで、疑似観測を作成した。観測点は円柱の後流に 3 点設定し(図 2 および 3 中の黒丸印で示した  $obs1, obs2, obs3$ )、 $U$  および  $V$  を観測値として用いる。疑似観測を作成する正規分布乱数は、 $N(0,0)$ ,  $N(0,0.05)$ ,  $N(0,0.1)$ ,  $N(0,0.2)$ ,  $N(0,0.5)$  の 5 種類を用いて、検証を行った。

データ同化を行う間隔は、0.4 秒毎とし、40 秒間の流れ場の推定において、100 回のデータ同化処理を行った。初期分布を近似する粒子は、縮約モデルを構成する係数  $a_i$  の初期値に対して、粒子数だけ発生させた正規分布乱数  $N(1,1)$  の値を掛け合わせることで、初期粒子を作成した。また、リサンプリング後に各粒子の係数  $a_i$  に対して、正規分布乱数を掛け合わせた。これは、粒子フィルタによるリサンプリングを行うごとに、特定粒子の重みが大きくなってしまいうのに対して、粒子の多様性を確保するためである。リサンプリング後に発生させるシステムノイズは正規分布乱数  $N(1,0)$ ,  $N(1,0.05)$ ,  $N(1,0.1)$ ,  $N(1,0.2)$ ,  $N(1,0.5)$  の 5 種類を用いて、検証を行った。

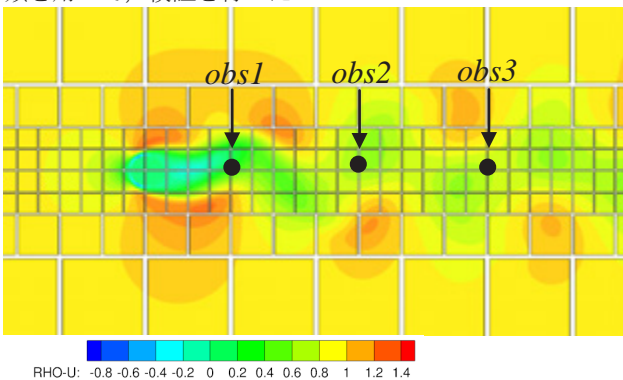


図 2 カルマン渦の計算結果 (風速  $U$ )

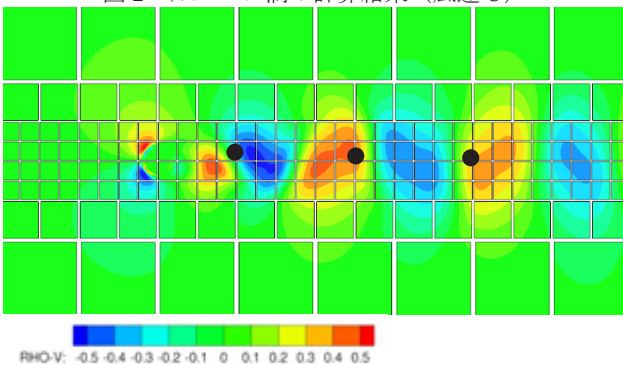


図 3 カルマン渦の計算結果 (風速  $V$ )

### 3. 結果および考察

#### 3. 1 縮約モデルによる計算

BCM の計算結果から 0.04 秒ごと 600 個の瞬時場を用いて、Snapshot POD を適用した。図 4 に各 Mode のエネルギー比率を示した。Mode1 および Mode2 が支配的であり、合わせて約 96.0% を占めている。また、エネルギー比率においても、POD 基底ベクトルと同様に 2 個ずつ対になっており、エネルギー比率がほぼ同じ値を持つことが見て取れる。これらの 8 つの POD 基底ベクトルを用いて、縮約モデルの構築を行った。なお、Mode1 から Mode8 までで全体のエネルギーの 99% 以上を占めている。

$U$  および  $V$  の POD 基底ベクトルを Mode1 から 8 まで図 5 および 6 に示した。Mode1 と Mode2 は対になっており、空間的に位相が 90 度ずれた形で表現されている。また Mode3 と Mode4、それ以降の Mode も同様に対をなしている。

図 7 に、図 2 中で示した観測点  $obs1$  における  $U$  の BCM による計算値、疑似観測値(正規分布乱数  $N(0,0.1)$ )、縮約モデルの計算値をそれぞれ示した。この時、縮約モデルの計算値は、BCM による計算値に対して、カルマン渦の時間変化に対する水平風速の位相を意図的に約 180 度ずらしてある。また、BCM の計算値に正規分布乱数を発生させた疑似観測が作成できていることが確認できる。

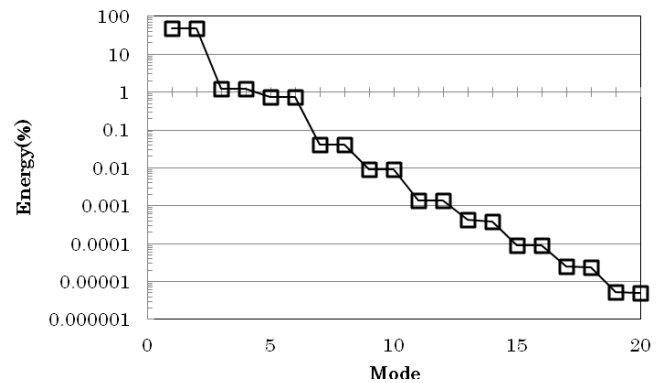


図 4 Mode ごとのエネルギー比率

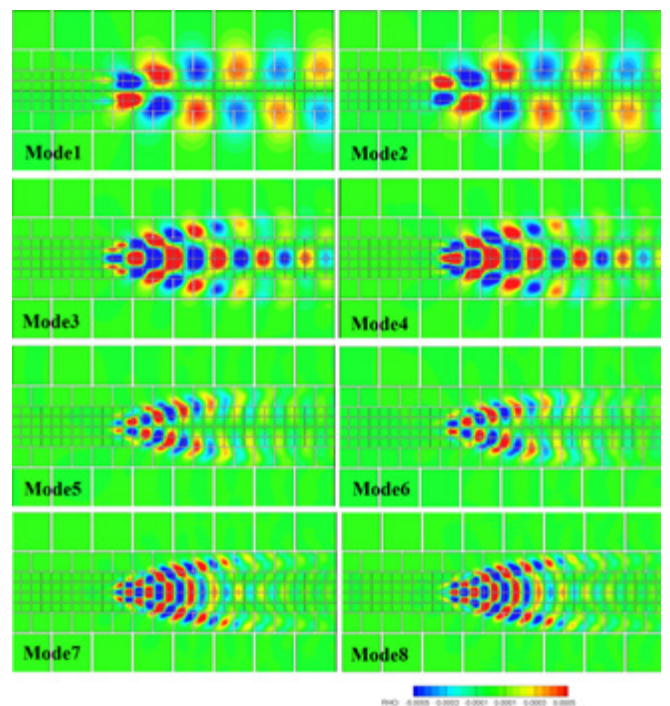


図 5 Mode1 から 8 の POD 基底ベクトル(風速  $U$ )

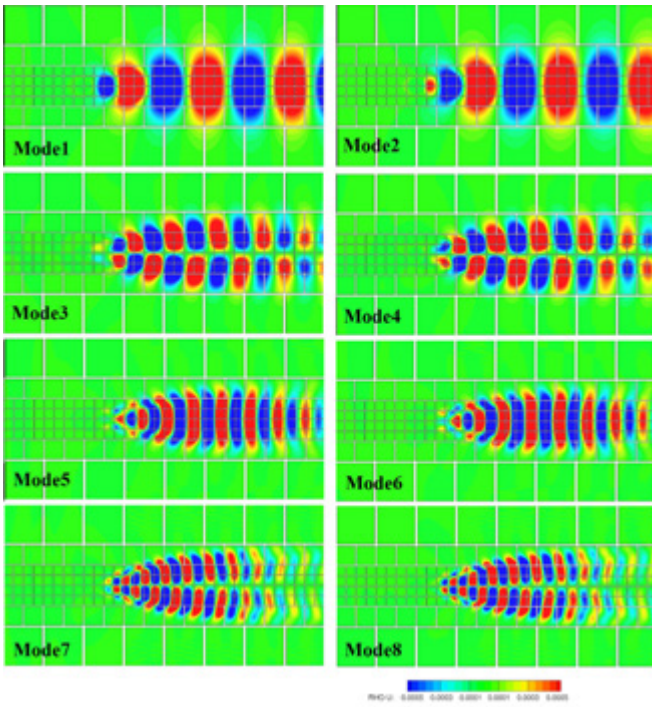


図6 Mode1から8のPOD基底ベクトル(風速  $U$ )

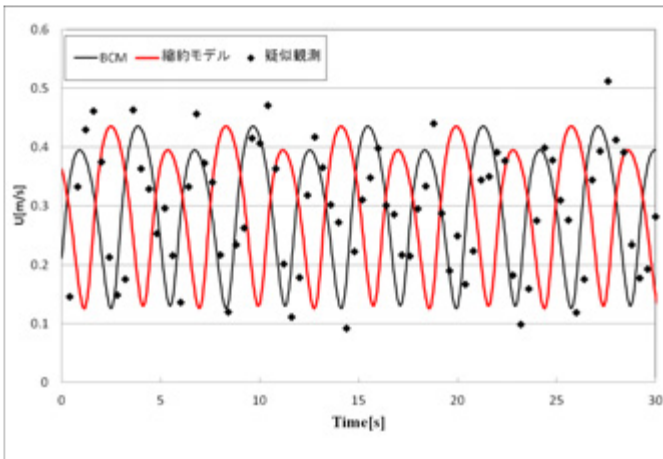


図7  $obs1$ における水平風速  $U$ の時間発展

### 3. 2データ同化計算

粒子フィルタを用いて、疑似観測値と縮約モデルを組み合わせたデータ同化計算を行った。この時、リサンプリング後のシステムノイズは  $N(1,0.1)$ を用いた。図8はデータ同化計算を40秒間実施した際の風速  $U$ の分布を示した。図8中の黒丸印の  $obs1$ における同化計算、BCM、疑似観測の風速  $U$ の時間履歴を図9に示した。図7では縮約モデルと疑似観測値の間の位相に約180度の差があったが、データ同化計算を4秒程度行ったところで、疑似観測値とデータ同化計算の風速  $U$ の時間変化に対する位相が概ね一致した。観測値を縮約モデルに取り込むことで、カルマン渦の時間変化に対する位相ずれを修正することができた。また、4秒後以降は、位相に関する変化はほとんど見られない。これは粒子フィルタのリサンプリングによって位相が観測に近い粒子を複製、位相が遠い粒子を排除したことによる結果である。図10に  $obs1$ における風速  $U$ の疑似観測値と同化計算結果の真値に対する誤差の時間履歴を示した。位相を修正している4秒程度までは疑似観測値と比較して同化計算の誤差が大きくなる。位相を修正した4秒後以降では、同化計算の誤差が急激に小さくなる。疑似観測では  $obs1$ の

風速  $U$ における40秒間の平均誤差は  $0.086\text{m/s}$ であるが、データ同化計算では  $0.044\text{m/s}$ の誤差となった。同化計算によって誤差があるような観測においても、BCMで計算した元の流れ場に近い値を推定することができた。以上より、カルマン渦の位相が違う場合および観測に誤差が含まれている場合の両方において、逐次流れ場の計算を修正できることを確認した。

計算機には、CPUにIntel Xeon X7560を搭載した東北大学流体科学研究所所有の計算機SGI Altix UV1000を用いた。BCMの計算では、OpenMPによって32CPUによる並列化演算を実施した。また本手法では、同計算機において4CPUによる並列化演算を実施した。それぞれ40秒間の流れ場の計算を行うのに、BCMでは約4時間、本手法では約20秒を要した。以上より、本手法を用いることで、リアルタイムにデータ同化を実行できることを確認した。

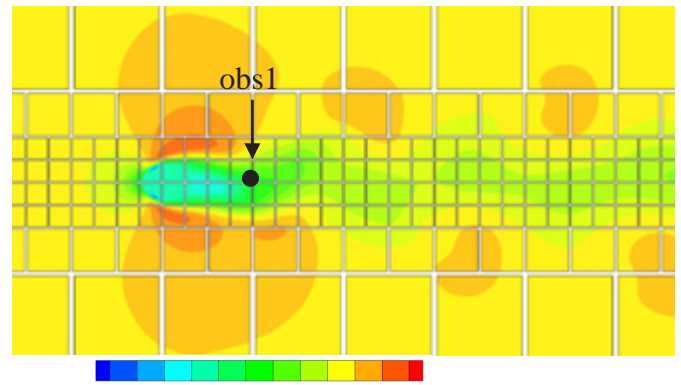


図8 データ同化計算結果(風速  $U$ )

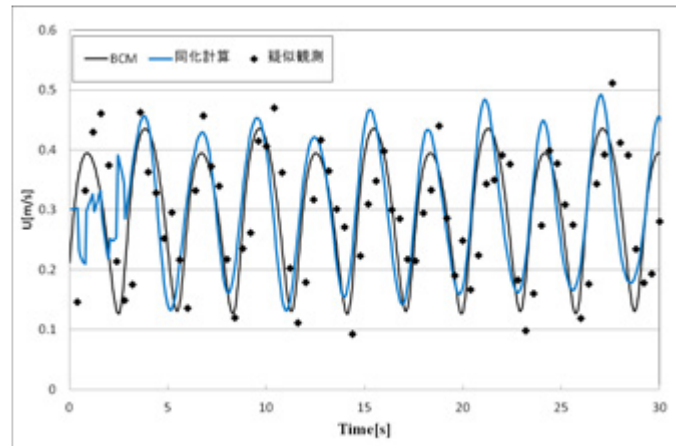


図9  $obs1$ における風速  $U$ の時間発展

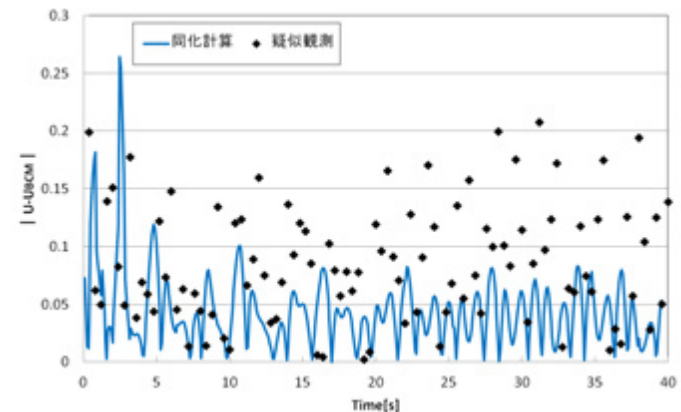


図10  $obs1$ における風速  $U$ の誤差の時間発展

### 3. 3 観測誤差に対する評価

疑似観測に含まれる観測誤差を、正規分布乱数  $N(0,0)$ ,  $N(0,0.05)$ ,  $N(0,0.1)$ ,  $N(0,0.2)$ ,  $N(0,0.5)$ として、それぞれデータ同化計算を行った。この際、その他の条件は 3.1 および 3.2 と同様である。図 11 はデータ同化計算により推定した風速および疑似観測と同時刻の BCM の値の二乗平均平方根誤差(RMSE)を示した。図 9 において、観測誤差が含まれていても、その情報を用いて流れ場の推定を行うことができることを確認した。図 11 において、観測誤差の標準偏差が大きくなるにつれ、RMSE が大きくなるが、疑似観測に含まれる誤差を取り除いた流れ場の推定を行えることが確認できた。この時、観測誤差が含まれない  $N(0,0)$ の場合においてのみ、同化計算における RMSE が大きくなっていることがわかる。これは、同化計算を行う際、縮約モデルにシステムノイズを与えて、粒子ごとの結果に対して多様性を与えていることが原因であると考えられる。

### 3. 4 システムノイズに対する評価

縮約モデルに含まれるシステムノイズを、正規分布乱数  $N(0,0)$ ,  $N(0,0.05)$ ,  $N(0,0.1)$ ,  $N(0,0.2)$ ,  $N(0,0.5)$ として、それぞれデータ同化計算を行った。この際、その他の条件は 3.1 および 3.2 における条件と同様であり、初期のシステムノイズはそれぞれのケースにおいて同様の正規分布乱数を用いた。図 12 はデータ同化計算を行い、推定した風速および疑似観測と同時刻の BCM の値の RMSE を示した。図 12 において、システムノイズが大きくなるにつれ、RMSE が大きくなるが、疑似観測に含まれる観測誤差と比較すると RMSE は小さいことが分かる。この時、観測誤差が含まれない  $N(0,0)$ の場合においてのみ、同化計算における RMSE が大きくなっていることがわかる。これは、システムノイズがないことで、粒子の多様性が失われ、流れ場の推定を行えなくなったことに起因する。また、システムノイズ  $N(0,0.05)$ の場合に、RMSE の分布が最小になっており、システムにおける多様性の幅に最適値があることを示唆している。

## 4. 結論

本研究では、リアルタイム低層風擾乱予測システムの実現を目指して、固有直交分解を用いた縮約モデルと粒子フィルタを組み合わせた手法の構築を行い、その検証計算を行った。まず、BCM を用いて、レイノルズ数  $Re=100$  の円柱後流に発生するカルマン渦列の計算を行い、計算結果を元に縮約モデルの構築および疑似観測の作成を行った。次に、粒子フィルタを用いて、疑似観測と縮約モデルのデータ同化計算を行い、縮約モデルを構成する係数の推定を行った。これより、縮約モデルの初期値におけるカルマン渦の位相と、観測によって得られる実際のカルマン渦の位相に差がある場合においても、粒子フィルタによって係数を推定することで、位相ずれを修正することが出来た。さらに、観測誤差およびシステムノイズの大きさによる流れ場推定精度の評価を行った。観測誤差およびシステムノイズの大きさを変化させた場合においても、誤差を取り除いた流れ場の推定を行えることが示された。ここでシステムノイズを与えない計算においては、流れ場の推定が正しく行えていないことが確認できた。また、システムノイズ  $N(0,0.05)$ において、RMSE が最小値を取ることから、システムにおける多様性に最適値がある可能性があることがわかった。本手法を適用した場合、40 秒間の流れ場推定を約 20 秒で実施しており、リアルタイムデータ同化の可能性が確認できた。

現在、実験流体力学(EFD)と数値流体力学(CFD)の融合技術に注目が集まっている。例えば、宇宙航空研究開発機構(JAXA)において、EFD/CFD 融合技術として、デジタル/アナログ・ハイブリッド風洞(DAHWIN)の研究開発が行われている。本研究手法を用いることで、このような EFD/CFD 融合技術のリアルタイム化の側面を強く推し進めることができると考えられる。本研究においては、 $Re=100$  におけるカルマン渦の計算により検証を行ったが、今後はさらに非定常性の強い乱流現象に適用することで本手法の実用性の検証を進める。

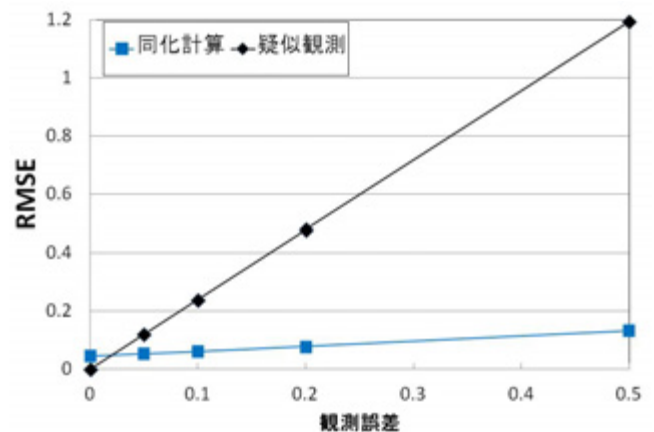


図 11 観測誤差を変化させた場合の RMSE

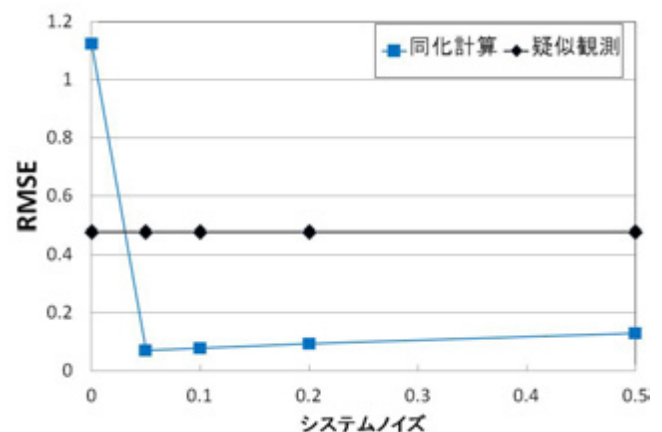


図 12 システムノイズを変化させた場合の RMSE

## 参考文献

- [1] 又吉直樹, 杉浦正彦, 吉川栄一, 吉田智, 森本健志, 牛尾知雄, 河崎善一郎, “庄内空港での低層風擾乱の解析,” 日本航空宇宙学会第 41 期年会講演会, (2010), D10.
- [2] 榎本康太, 小野佳之, 大塚清敏, “気象モデルと LES 解析に基づく複雑地形上の多地点強風予測,” *ながれ*, **31**, 2(2012), pp.157-163.
- [3] K. Shimoyama, H. Nakanomyo, and S. Obayashi, “Simulations of the Wind Environment at Shonai Airport Integrated with Weather Prediction Data,” *ICCFD7*, (2012), Paper No. 4503.
- [4] 菊地亮太, 三坂孝志, 大林茂, 牛尾知雄, 嶋村重治, 又吉直樹 “空港周辺で発生する低層風擾乱の気象モデルと LES による融合解析,” 日本航空宇宙学会論文集, 印刷中.
- [5] M. Sawada, T. Iwasaki, W. Sha, T. Yamazaki, H. Iwai, S. Ishii, K. Mizutani, T. Itabe, and I. Yamada, “Transient Downslope Winds under the Influence of Stationary Lee Waves from the Zao Mountain Range,” *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **90**, 1(2012), pp.79-100.

- [6] 平邦彦, “固有直交分解による流体解析:1.基礎,” *ながれ*, **30**, 2(2011), pp.115–123.
- [7] T. D. Nguyen, T. X. Dinh, J. C. Wells, P. Mokhasi and D. Rempfer, “Pod-Based Estimation of the Flow Field from Free-Surface Velocity in the Backward-Facing Step,” *Seventh International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, (2011), 6D2P.
- [8] A. Oyama, P. C. Verburg, T. Nonomura, H. W. M. Hoeijmakers, and K. Fujii, “Flow field data mining of Pareto-optimal airfoils using proper orthogonal decomposition,” (2010), AIAA Paper 2010-1140.
- [9] K. Kunisch, and S. Volkwein, “Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics,” *SIAM J. NUMER. ANAL.*, **40**, 2(2002), pp.492-515.
- [10] 樋口知之, “粒子フィルタ,” *電子情報通信学会誌*, **88**, 12(2005), pp.989-994, 2005.
- [11] K. Nakamura, T. Higuchi, and N. Hirose, “Application of Particle Filter to identification of Tsunami simulation model,” *SCIS&ISIS 2006*, (2006), pp.1890-1895.
- [12] S. Nakano, G. Ueno, and T. Higuchi, “Merging particle filter for sequential data assimilation,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, **14**, 4(2007), pp.395-408.
- [13] K. Nakahashi, L-S. Kim, “Building-Cube Method for Large-Scale, *High Resolution Flow Computations*, 42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, (2004), AIAA 2004-434.
- [14] K. Nakahashi, “High-Density Mesh Flow Computations with Pre-/Post-Data Compressions, 17<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, (2005), AIAA 2005-4876.
- [15] A. Deguchi, D. Sasaki, K. Nakahashi, “Aeroacoustic Simulations of JAXA Landing Gear by Building-Cube Method and Non-compact Curle’s Equation,” 50<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, (2012), AIAA 2012-0388.
- [16] L. Sirovich, “Turbulence and the dynamics of coherent structures,” *Parts I-III. Q. Appl. Math. XLV*, (1987), pp.561–590.