

超音速領域における PIV 計測データの補正方法に関する研究 - MTV データとの比較 -

三井克仁, 中野葵, 小池俊輔, 半田太郎

九州大学, 川崎重工業, 宇宙航空研究開発機構, 九州大学

Study on the Correction Method of PIV Data Measured in a Supersonic Region -Comparison with MTV Data-

by

Katsuhito Mii, Aoi Nakano, Shunsuke Koike, and Taro Handa

ABSTRACT

Particle image velocimetry (PIV) has become a powerful tool for the measurements of flow velocities in wind tunnel testing. However, it is generally difficult to apply the PIV to a supersonic flow because of unreliable particle traceability. In the present study, the method for correcting the PIV data measured in a supersonic flow is discussed. The tested flow is an underexpanded jet issuing from an orifice, the diameter of which is 6.0 mm. The jet has a region in which the gas is accelerated in a short distance (11 mm) from a sonic speed to a supersonic speed corresponding to Mach 3.7. The jet also has a normal shock wave called Mach disk across which the gas is decelerated rapidly from a supersonic speed to a subsonic speed. The PIV data is corrected by using the Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) equation based on the assumption that the Stokes' law is satisfied. The corrected PIV data is compared with the data measured by the molecular tagging velocimetry (MTV). The PIV data are reasonably improved in the entire measurement region. Especially, the corrected PIV data agree well with the MTV data downstream of the Mach disk.

1. 諸言

流れの速度を計測する手法は、ピトー管や熱線流速計などのプローブを流れに挿入して計測する手法と、レーザー光を流れに照射して非接触で計測する手法に大別される。超音速流れの速度を計測する場合、プローブを用いる手法では、プローブが流れを乱してしまい、正しい速度データを計測できない恐れがある。しかし、レーザー光を用いて非接触で計測すれば流れを乱さずに正確な計測ができる。このような非接触計測法には PIV (Particle Image Velocimetry)¹⁾ や MTV (Molecular Tagging Velocimetry)²⁾ がある。いずれも流れに混入したトレーサを追跡する“time-of-flight”法であるが、PIV では流れに混入した粒子を追跡し、MTV では分子を追跡して流れの速度を計測する。MTV では急激な加減速のある超音速流れにおいてもトレーサの追従性は問題とならないが、PIV では粒子の追従性が問題となり^{3), 4)}、粒子サイズを約 0.1 μm まで小さくしても超音速流れでは粒子が流れに追従しないこと⁴⁾が報告されている。PIV では面計測が可能なので、大型風洞に適した非接触計測法であり、超音速流れへ適用するための補正法が研究されている³⁾。しかしながら、補正した結果を検証するための実験データがなく、補正法の妥当性が十分に検証されていないのが現状である。

そこで本研究では、急激な流れの加減速が存在する不足膨張自由噴流を PIV で計測し、得られた PIV データを過去に提案された手法³⁾により補正する。この補正データを MTV によって計測されたデータと比較することで、補正法の妥当性を検証する。

2. PIV について

本研究で用いた PIV システムの模式図を Fig.1 の(1)-(7)に示す。光源として、ダブルパルス Nd:YAG レーザー (Quantel, CFR400) (1) の 2 倍高調波 (波長 532nm) を用いた。レーザービームはビームスプリッター(2)を介して、シリンドリカルレンズ系(3)によりシート状にした。フォトディテクタ(4)によりレーザー光を検出し、高速 A/D 変換器でデジタル信号に変換した後、パーソナルコンピュータ(7)に記録した。このようにしてレーザーパル

ス間隔を計測した。レーザーシートはシート面が噴流の中心面を通るように流れ方向に対して垂直に照射した。粒子の散乱光画像をレーザーシート面に対して直角方向から、レンズ (Nikon, f/200mm) を介して CCD カメラ (Lavision, Imager Pro Plus 4M) (5) により取得した。画像の 1 ピクセルは物理面の 5.53 μm \times 5.53 μm に相当する。レーザー発振と画像取得のタイミングは Programmable Timing Unit (Lavision) (6) を用いて設定した。画像対間の時間間隔にあたるレーザー発振間隔 Δt はフォトディテクタを用いて計測した。レーザー発振間隔 Δt は 110ns である。得られた粒子画像は、パーソナルコンピュータ(7)に記録される。画像対のサンプリングレートは 4Hz であり、1 回の実験で 250 画像対を取得し、この実験を 8 回繰り返した。

トレーサ粒子には、ラスキンノズルで霧化した DOS (セバシン酸ジオクチル) 粒子を用いた。霧化に際しては、作動気体である窒素ガス (水分含有量 5ppm 以下) を使用した。DOS 粒子の直径は約 1 μm である⁵⁾。トレーサとして気流に混入させるために、よどみ室上流のバルーン(11)に DOS 粒子を作動気体とともにあらかじめ充填した。

粒子移動量の算出には、PIV 解析ソフト (Lavision, Davis 7.2) を使用した。本ソフトは FFT 相互相関法^{1), 6)}により粒子の移動量を算出する。相関領域は 32 \times 32 ピクセルであり、流速ベクトルは 50% オーバーラップで算出した。計算においては再帰的アルゴリズムを用いた。

また、画像を処理する際に検査領域の過不足により、実際のベクトルとは異なる、大きな誤差を持ったベクトルが発生することがある。このベクトルを誤ベクトルと呼び、この誤ベクトルの発生を抑え、正確な速度ベクトルを求める必要がある。誤ベクトルを除去する手法には、統計に基づく手法と流体の物理法則などを用いた解析的な手法とがある¹⁾。本研究では、前者を用いる。すなわち、取得したベクトルのヒストグラムを求め、このヒストグラムから標準偏差を計算し、標準偏差の 5 倍以上のベクトルを誤ベクトルとして除去する。なお、この処理を 3 回繰り返す。誤ベクトルを除去することによる影響

は、画像を平均することで無視できるので、本研究ではベクトルの補間を行わない。

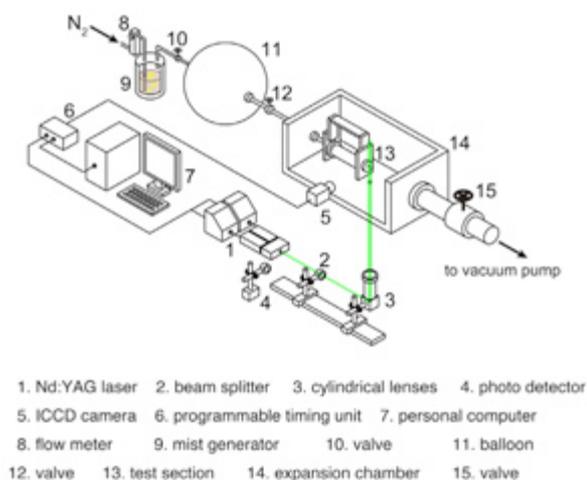


Fig.1 Measurement system and experimental setup for PIV

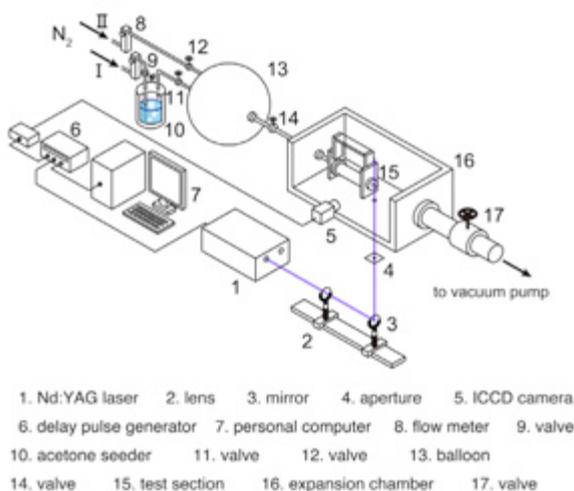


Fig.2 Measurement system and experimental setup for MTV

3. MTVについて

本研究で用いた MTV システムの模式図を Fig.2 の(1)-(7)に示す。光源として、Nd:YAG レーザー (Spectra Physics, 170-10) (1)の 4 倍高調波 (波長 266nm) を用いた。レーザーを、レンズ(2)によりビーム状にした後にピンホール(4)を介して、噴流の中心面を通るように流れ方向に対して垂直に照射し、流れに混入したアセトン分子を励起した。レーザーによって誘起されたアセトンの蛍光をイメージインテンシファイア付きの CCD カメラ (Hamamatsu, C7772S) (5)により撮像した。

蛍光画像は、レーザーが照射されてから、ある遅れ時間後に取得した。遅れ時間は遅延パルス発生装置 (Stanford Research Systems, DG645) (6)を用いて設定した。遅れ時間は計測位置によって異なるが 400-800ns の間で設定した。また、イメージインテンシファイアのゲート開放時間は 20-30ns の間で設定した。1 回の実験で 100 枚の蛍光画像を取得し平均した。この実験を 8 回繰り返

した。なお、画像の 1 ピクセルは物理面の $20.0\mu\text{m} \times 20.0\mu\text{m}$ に相当する。

作動気体として微量のアセトンを混入した窒素を使用した。以下に述べる方法でアセトンのシーディング比を調節した。弁(9), (11)を開け、弁(12)を閉じ、流路 I に窒素を指定の流量でアセトンシーダ(10)に流入させる。アセトンシーダ内でアセトンは蒸気圧に応じて気化し、窒素に混入する。アセトンを含む窒素はバルーン(13)に貯められる。このときのバルーン内のアセトン濃度はアセトンシーダ内の圧力とアセトンの飽和蒸気圧から計算することができる。次に弁(9), (11)を閉じ、弁(12)を開け、流路 II を介して窒素をバルーンに流入させる。なお、流路 II の窒素の流量は、流路 I の場合と同じ値に設定する。それぞれの流路において窒素を流す時間を調節することでアセトンのシーディング比を調節できる。本研究においてアセトンのシーディング比は約 0.6% であり、この場合、アセトンをシードしたことによる作動気体の比熱比の低下は約 0.5% である。なお、アセトンシーダ内のアセトン飽和蒸気圧 p_{sat} は Lozano ら⁷⁾により温度 T の関数として以下の経験式で与えられている。

$$\log_{10} p_{sat} = 7.125267 - \frac{1214.208}{230.002 + T} \quad (1)$$

本実験では、上式を用いてアセトンシーダ内におけるアセトン濃度を計算した。

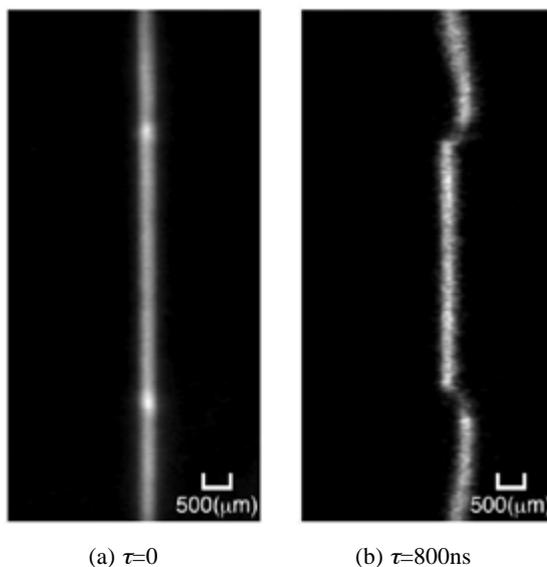


Fig.3 Fluorescence images

実験で取得した画像の一例を Fig.3 に示す。Fig.3(a), (b)はノズル出口から 12.6mm 下流の位置における画像で、それぞれ遅れ時間 $\tau=0$, $\tau=800\text{ns}$ で取得されたものである。また、Fig.4 は Fig.3 における噴流中心軸上の蛍光強度分布を示したものである。本研究では、Fig.4 のように遅れ時間の異なる 2 枚の画像の流れ方向蛍光強度分布を、最小自乗法によりガウス分布でフィッティングして求め、フィッティングにより求めたそれぞれのガウス分布のピーク位置の差 Δx をアセトン分子の移動量として定義する。すなわち、流速 u は次式で求められる。

$$u = \Delta x / \Delta \tau \quad (2)$$

ここで、 $\Delta \tau$ は 2 枚の画像の遅れ時間の差である。

4. 測定対象

PIV を超音速・遷音速流れに適用する場合、PIV 粒子が最も流れに追従しないと考えられるのは粒子が垂直衝撃波を通過する場合である。垂直衝撃波を通過する流れは超音速から亜音速まで急激に減速され、流れを連続体とみなすと流速の変化は不連続なものとして扱われる。このような不連続的な流れの減速に対しての PIV 粒子の追従性は極めて悪くなると考えられる。

衝撃波を通過する粒子の追従性を正確に評価するためには、衝撃波が定在している（振動していない）必要がある。内部流れに発生する垂直衝撃波は一般に流れ方向に振動する⁸⁾ので、定在衝撃波は内部流れでは実現しづらい。そこで本研究では直径 6.0mm のオリフィスから不

足膨張自由噴流を発生させることにより定在する垂直衝撃波を作り出し、測定対象とした。Fig. 1 の(13)と Fig. 2 の(15)のように膨張室内にオリフィスの付いたよどみ室が設置されており、バルーン内の作動気体がよどみ室に流入した後、オリフィスから膨張室に噴出し、不足膨張噴流を形成する。上流よどみ室および膨張室の圧力をそれぞれ 81.0kPa, 10.1kPa に設定する。また、上流よどみ室の温度は 293.5K±1.5K である。これらの条件で不足膨張噴流を発生させると、オリフィスからマッハディスクまでの距離は 11mm, マッハディスク直前のマッハ数は 3.7 となる⁹⁾。

5. PIV データの補正方法

粒子の運動は一般に式(1)で表される Basset-Boussinesq-Oseen (BBO)¹⁰⁾方程式により記述される。

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}d_p^3\rho_p \frac{D\mathbf{u}_p}{Dt} &= \frac{4\pi}{3}d_p^3\rho_p F(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \\ &\quad - \frac{4\pi}{3}d_p^3 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3}d_p^3\rho_f \frac{D}{Dt}(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \\ &\quad + 3d_p^2\sqrt{\pi\rho_f\mu_f} \\ &\quad \times \int_{t_0}^t \frac{(D/D\tau)(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{8}F_e \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 D/Dt は実質微分、 d_p は粒子の直径(m)、 ρ は密度 (g/m^3)、 \mathbf{x} は位置ベクトル、 \mathbf{u} は速度ベクトル(m/s)、 p は圧力(Pa)、 t は時間(s)、 τ は緩和時間(s)、 μ は粘性係数、 F_e は外力のベクトルを表す。また、添え字 f と p はそれぞれ流体と粒子の物理量を表す。上式の右辺の項は粒子に作用する力を表し、それぞれ第一項から順に、流体と粒子の間の速度差に起因する抗力の項、圧力勾配項、付加質量項、バセット項、外力項である。また、 F は以下の式で表される。

$$F = \frac{3}{4}C_d \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{d_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| \tag{4}$$

ここで、 C_d は抗力係数である。

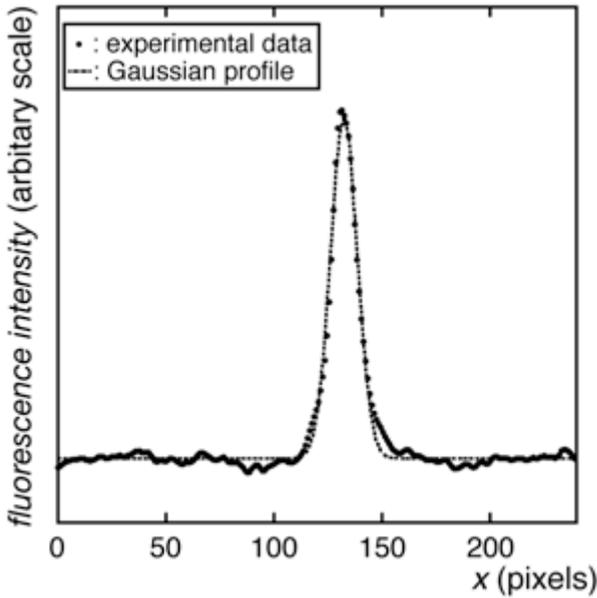
遷音速および超音速流れに PIV を適用する場合、衝撃波などによって発生する急激な流れの加減速により粒子が追従せず、計測された流れの速度は実際の速度と異なる。したがって、以下の方法³⁾により PIV で計測した流れの速度を補正する。

気体流れでは流れの密度は粒子の密度に比べて十分低い（本研究では約 1/1000 以下）ので、流れの速度と粒子速度によって発生する抗力が他の力に比べて支配的になる。すなわち、右辺では第一項のみが残り、流れを定常状態と仮定すると、式(3)は次式のように書ける。

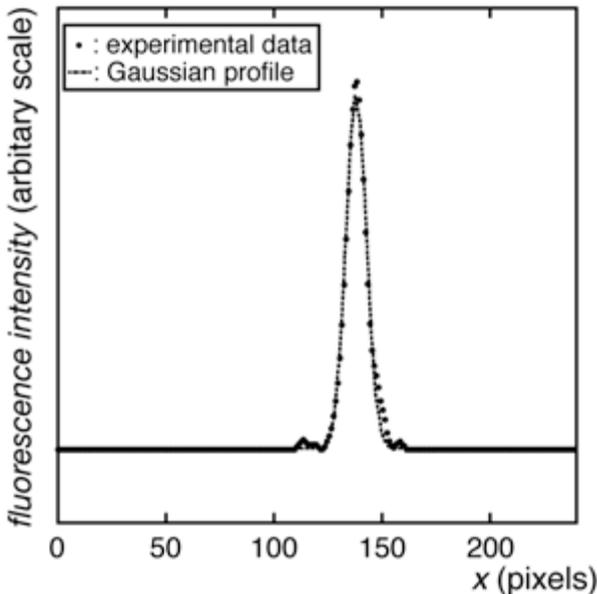
$$u_{pj} \frac{\partial u_{pi}}{\partial x_j} = \frac{3}{4}C_d \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{d_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (u_{fi} - u_{pi}) \tag{5}$$

上式において、 α と β_i をそれぞれ次式

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \frac{3}{4}C_d \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{1}{d_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| \tag{6}$$

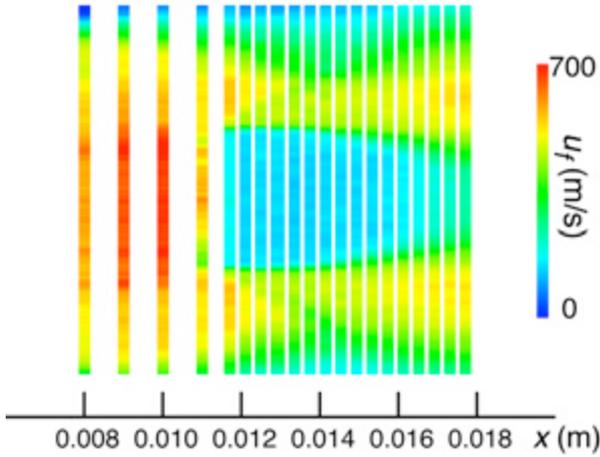


(a) $\tau=0$

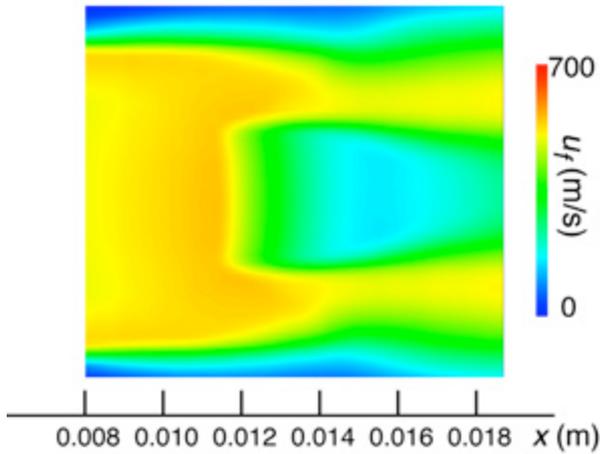


(b) $\tau=800ns$

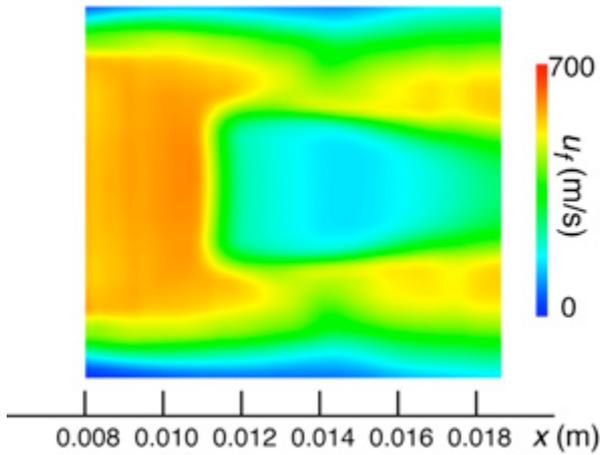
Fig.4 Fluorescence intensity distributions along the central axis of the jet



(a) MTV data



(b) PIV data

(c) Corrected PIV data
Fig.5 Velocity maps

$$\beta_i = u_{pj} \frac{\partial u_{pi}}{\partial x_j} \quad (7)$$

のように定義すると、流れの速度の i 方向成分は、次式のように表される。

$$u_{fi} = u_{pi} + \alpha \beta_i \quad (8)$$

式(8)を用いることにより粒子速度から流れの速度を求めることができる。ただし、 β_i は粒子の速度分布から計算できるが、 α は流れの速度の関数である。以下に α の求め方について述べる。

一般に抗力係数 C_d は相対レイノルズ数 Re_{fp} ($=\rho_f |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| d_p / \mu_f$)、相対マッハ数 M_{fp} ($=|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| a_f$) およびクヌッセン数 Kn ($=\lambda / d_p$: λ は分子の平均自由行程) の関数であるが、本研究では簡単に C_d を Stokes の抗力係数 $C_d = 24 / Re_{fp}$ で表す。この場合、 α は次式、

$$\alpha = \frac{d_p^2 \rho_p}{18 \mu_f} \quad (9)$$

で表され、流れの密度 ρ_f はキャンセルされる。流れの状態変化を断熱変化と仮定すると式(9)は、

$$\alpha = \frac{d_p^2 \rho_p T_s^{3/2}}{18 (T_s + S) \mu_s} \left[T_{0f} - \frac{\gamma-1}{2\gamma R} |\mathbf{u}_f|^2 \right]^{-3/2} \times \left[T_{0f} + S - \frac{\gamma-1}{2\gamma R} |\mathbf{u}_f|^2 \right] \quad (10)$$

と表せる。ここで、

$$|\mathbf{u}_f|^2 = \beta_i \beta_i \alpha^2 + 2 \beta_i u_{pi} \alpha + u_{pi} u_{pi} \quad (11)$$

である。式(10)において、 R は気体定数、 γ は比熱比、 T_{0f} は気流の全温度であり、 μ_s 、 T_s 、 S は粘性係数 μ_f を計算するための Sutherland 式の中の定数である。式(10)では α 以外は既知なので解くことができ、得られた α を式(8)に適用することで流れの速度を得られる。

上述のように、本補正式では、定常流れの仮定と最も単純な抗力係数モデルである Stokes の抗力係数を採用する。これらの仮定のため、厳密な適用範囲は著しく限定される。しかしながら、PIV で測定した粒子流速値と気流の全温度だけから補正値を得られることと、対象とする計測点とその周囲の局所的な PIV の計測値から簡単な計算により補正解を得られることから、補正方法を確立していく第一段階として上記の補正式を検証した。

6. 実験結果および考察

実験結果を Fig.5 に示す。Fig.5(a) は MTV、Fig.5(b) は PIV の速度データである。Fig.5(c) は Stokes の抗力係数を用いて Fig.5(b) の速度データを補正して求めた速度データである。図中の $x(m)$ はオリフィス出口からの距離を表す。

Fig.6 はオリフィスから発生する不足膨張噴流の模式図である。不足膨張噴流では、一般にオリフィス出口で急激に流れが膨張するので、オリフィス出口部で多数の膨張波が発生する。膨張波は噴流境界で圧縮波として反射し、複数の反射圧縮波が集まってバレル衝撃波 (barrel shock wave) と呼ばれる斜め衝撃波を形成する。バレル衝撃波は噴流中心軸上で交差するが、この交差は本実験条件のような高い圧力比ではいわゆる“マッハ反射 (Mach reflection)” の形態を取り、マッハディスク (Mach disk) を形成する。反射衝撃波 (reflected shock wave) 下流の流速とマッハディスク下流の流速は大きく異なるので、反射衝撃波とマッハディスクの交点から不連続面であるすべり面 (slip line) が発生する。

Fig.5(a) の MTV データでは、バレル衝撃波とマッハディスクで囲まれた高速流れが存在する等エントロピー膨

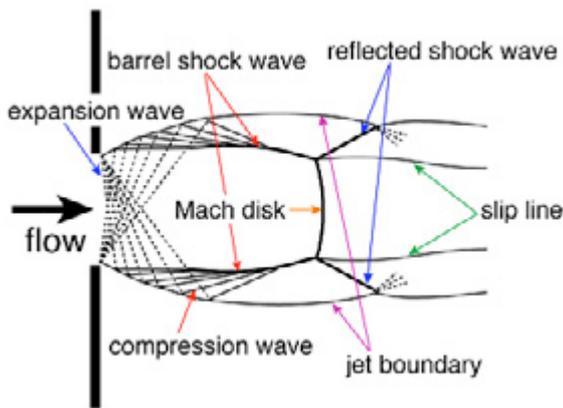


Fig.6 Schematic diagram of an underexpanded free jet

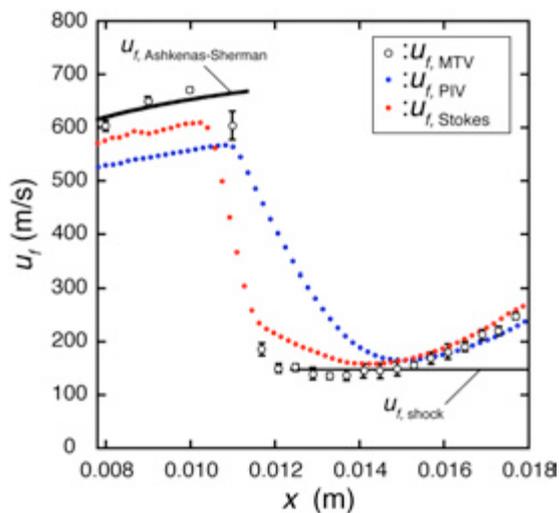


Fig.7 Streamwise velocity distributions along the central axis of the jet

張領域や、マッハディスクや反射衝撃波による急激な流れの減速が観測される。いっぽう、Fig.5(b)の PIV データでは、膨張領域の速度増分は Fig.5(a)に比べて著しく低く、反射衝撃波は観察できない。また、Fig.5(b)ではマッハディスクも不鮮明である。PIV データにおけるこれらの結果は、流れの急激な加減速に粒子が追従していないためであると考えられる。

Stokes の抗力係数を用いて PIV データを補正した結果、Fig.5(c)のようにマッハディスクによる急激な減速過程が鮮明に見られるようになった。いっぽう、反射衝撃波による急激な減速過程は補正後も不鮮明であった。これは、PIV の空間分解能の不足により反射衝撃波をとらえられなかったためと推測される。すべり面 (slip line) の形状に着目すると、Fig.5(b)で観測されるすべり面の形状は Fig.5(a)と異なっているが、Fig.5(c)では Fig.5(a)と似た形状となっており、補正の効果を確かめる。

PIV データと MTV データを定量的に比較できるように、Fig.5(a)-(c)の噴流中心軸上のデータをプロットした。その結果を Fig.7 に示す。図より MTV で計測された速度データ $u_{f, MTV}$ は等エントロピー膨張領域において Ashkenas-Sherman の経験式⁹⁾と良く一致し、マッハディスク前後の $u_{f, MTV}$ の変化も垂直衝撃波前後の関係式¹¹⁾から計算された $u_{f, shock}$ と良く一致する。PIV で計測された

速度データ $u_{f, PIV}$ はマッハディスク上流の等エントロピー領域において $u_{f, MTV}$ に比べて 100m/s 程度低い値となっている。これはオリフィスから噴出した粒子が流れの速度まで加速しなかったためと考えられる。さらに、 $u_{f, PIV}$ はマッハディスク下流の長さ約 4mm の範囲で緩やかに低下し、実際の流れと明らかに異なる分布となっている。これもマッハディスクによる急激な流れの減速に粒子が追従できなかったためと考えられる。これらの粒子の追従遅れは直径が約 0.1 μ m の粒子を用いた Huffman らの不足膨張噴流を対象とした実験⁴⁾においても観測されている。Fig.7 や Huffman らの実験結果は、超音速流れにおける PIV 計測値を考察する際は、粒子の追従性を十分に考慮すべきであることをあらためて示している。

Stokes の抗力係数を用いて補正された速度データ $u_{f, Stokes}$ に着目すると、マッハディスク上流では、 $u_{f, Stokes}$ は $u_{f, PIV}$ よりも $u_{f, MTV}$ に近づく。両者の差異は最大で約 50m/s と補正前に比べて明らかに改善されており、補正効果を確かめる。マッハディスク下流においても良好な補正の効果がみられ、 $u_{f, Stokes}$ は衝撃波下流の不連続な減速過程を補正前に比べて正しくとらえている。マッハディスク下流の加速領域においては、 $u_{f, PIV}$ と $u_{f, MTV}$ の差異は小さい。これは粒子が流れに追従していることを意味している。当然ながら、この領域では $u_{f, Stokes}$ と $u_{f, MTV}$ の差異も小さい。Fig.7 で示された噴流中心軸上では、流れを定常とする仮定は十分妥当であるが、 $u_{f, Stokes}$ においても垂直衝撃波背後では $u_{f, MTV}$ に比べて若干緩やかな分布となっている。これも反射衝撃波の場合と同様に PIV の計測値の空間分解能の不足によるものと考えられる。また、等エントロピー膨張領域とマッハディスクから 2mm 下流の領域においては、 $u_{f, Stokes}$ と $u_{f, MTV}$ の差異が若干ある。これらのわずかな差異は Stokes の抗力係数の適応範囲からの逸脱が主原因であると推察される。

7. まとめ

PIV (Particle Image Velocimetry) の超音速流れへの適用を可能とするために、トレーサ粒子の追従遅れに起因する誤差を算出しかつ計測値を補正する補正式の検証を行った。

PIV および MTV (Molecular Tagging Velocimetry) を用いてオリフィスから発生する不足膨張噴流の速度を計測した。その PIV 速度データを用いて流れの速度が求まるように補正した。補正の際に必要な抗力係数には Stokes の抗力係数を用いた。

補正された PIV 速度データを、MTV を用いて計測された速度データと比較し、補正法の妥当性を評価した。その結果、オリフィス出口からマッハディスクまでの等エントロピー膨張領域とマッハディスク下流の両領域において本補正法が有効であることを確認した。とくに、マッハディスク下流の領域においては、マッハディスクによる急激な減速過程や減速後見られる緩やかな加速過程など、MTV でとらえられた実際の流速場に近づくことを確認できた。等エントロピー膨張領域やマッハディスク背後におけるわずかな MTV との差異は、Stokes の抗力係数の適応範囲からの逸脱と PIV の空間分解能の不足によるものと考えられる。今後、より高精度な補正方法の確立を進めたい。

参考文献

- 1) 可視化情報学会編, PIV ハンドブック, 森北出版 (2002).
- 2) 半田太郎, 水田倉右, 今村幸平, MTV による気体流れの速度計測 - 超音速マイクロ噴流の速度計測を例

- として-, 可視化情報, Vol. 32, No. 125 (2012), pp. 26-31.
- 3) Koike, S., Takahashi, H., Tanaka, K., Hirota, M., Takita, K., and Masuya, G., Correction method for particle velocimetry data base on the Stokes drag law, *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 11 (2007), pp. 2770-2777.
 - 4) Huffman, R. E. and Elliott, G. S., An experimental investigation of accurate particle tracking in supersonic, rarefied axisymmetric jets, *AIAA Paper 2009-1265*, (2009).
 - 5) Kähler, C. J., Sammler, B., and Kompenhans, J., Generation and control of tracer particles for optical flow investigations in air, *Experiments in Fluids*, Vol. 33, No. 6 (2002), pp. 736-742.
 - 6) Willert, C.E. and Gharib, M., Digital particle image velocimetry, *Experiments in Fluids*, Vol. 10, No. 4 (1991), pp. 181-193.
 - 7) A. Lozano, B. Yip, and R.K. Hanson (1992). Acetone: a tracer for concentration measurements in gaseous flows by planar laser-induced fluorescence, *Experiments in Fluids*, Vol. 13, No. 6 (1992), pp. 369-376.
 - 8) Handa, T., Masuda, M., and Matsuo, K., Mechanism of shock wave oscillation in transonic diffusers, *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 1 (2003), pp. 64-70.
 - 9) Ashkenas, H. and Sherman, F. S., The structure and utilization of supersonic free jets in low density wind tunnels, *Rarefied Gas Dynamics*, Vol. 2 (1966), pp. 84-105.
 - 10) Soo, S. L., *Fluid Dynamics of Multiphase Systems*, BLAISDELL PUBLISHING COMPANY, 1967, pp. 31-33.
 - 11) Liepmann and Roshko, *Elements of Gasdynamics*, Dover Publication Inc., (1956).