

音波遊装置内での液滴の挙動と音波干渉履歴の研究

代表研究者：山中 龍 夫 （航空宇宙技術研究所）

共同研究者：上村 平八郎 （航空宇宙技術研究所）

要 旨

本実験の目的は音響共鳴チャンバー内に浮揚された液滴の挙動を研究することにある。三軸音響共鳴チャンバーは液滴の無接触浮揚だけでなく、浮揚液滴の音波による回転、振動、さらには圧縮などを無接触で行う機能を有する。スペースシャトルによる宇宙実験 [M-15:LDF, Liquid Drop Facility, STS 47] に先立っていくつかの理論研究及び地上実験が行われた。宇宙実験では、三軸音響チャンバー内の液滴の多様な挙動を観測するために一連の実験が予定されていた。しかしながら、実験の第一段階で液滴の切り離し時の音圧が上がり過ぎたため、液滴が分裂してしまった。分裂した液滴の一部が共鳴チャンバーにある三箇所の音の出口のうちの一つに付着したため、それ以降は一軸だけ十分な音圧も共鳴も発生させることができなくなった。しかし、音響放射圧による液滴の圧縮効果を調べる実験に関しては、実験データとしては少ないが、地上実験では得られない大きなサイズの液滴に関するデータを得ることができた。本報告書は筆者等が行ってきた理論研究、地上実験及び [M-15] 宇宙実験結果を総合的にまとめるものである。

1. 序論

宇宙における材料製造は様々な分野にまたがっているが、プロセスにおける物理的なメカニズムが地上では重力の影響を受けるという共通した特徴をもっている。これらの分野とは結晶成長、金属学、流体物理、ガラス及びセラミックス技術、及び電気泳動による分離を含む。宇宙船内の加速度はゼロではなく $10^{-4} \sim 10^{-5} g$ のオーダーであるから、熔融材料を無接触で保持及び操作を行なう技術を必要とするプロセスは多い。電磁場は電導性材料を保持し成形することが可能である。共鳴チャンバー内に励起される音響定在波の速度波の節において腹におけるよりも高い圧力を生じる。これにより、共鳴チャンバー内の液滴及び粒子は定在波の節から腹に向かって移動し、音波が止むまでそこに留まる。

成分の異なる液体中に沈んでいる不混和液滴は界面張力効果に比べて重力の影響が小さいとき、ほぼ球形の静的形状になる。たとえば、液滴が極めて小さいか、二つの液体の密度がほとんど等しいか、さもなくば界面張力が高い場合にそうなる。もし、そのような液滴になにがしかの外力が加わり、そのためにわずかに変形した後、

外力を取り除くと液滴はもとの球形に戻る。液体の物理的特性と界面の性質により、この過程は球形の減衰振動になるか、または周期運動をすることなくに元の球形に戻る。

液滴の力学は長い間研究されてきた。天体物理学では惑星の起源に関する類似性から主に変形した回転液滴の研究が行われたし、また最近の核物理学でも古典的な原子核モデルのひとつとして興味をもたれた。材料製造の過程では大型球形単結晶の凝固やレーザー核融合用のペレットの製造のように、微小重力環境における表面張力が支配的な現象に興味が持たれている。

音響共鳴チャンバーは壁との無接触、無攪拌棒で低重量溶融材料の操作をするのに有用である。材料が保持されるところ、つまり粒子速度の腹における音場はいくつかの理由から歪む。音響ドライバーの特性、共鳴チャンバーまでの音響通路設計、高音圧からくる音波の非線形性、及びマッチングのとれない共鳴が歪みの主な原因である。本宇宙実験の目的は液滴力学と音響共鳴場の干渉を明らかにすることである。

実験のために三軸音波共鳴チャンバーを選んだ。大きく変形した液滴力学を主として研究するには、サイズの大きい液滴が必要である。三軸チャンバーは他の音波浮揚装置よりも大きな液滴を操作できる。さらには、共鳴チャンバーは二軸の位相をシフトさせることにより液滴に回転を与えたり、無接触で任意の方向へ圧縮したりすることができる。液滴と音波の干渉、特に三軸音波共鳴チャンバー内での大変形干渉に関する理論及び実験はほとんど行われていない。筆者等は理論研究、地上実験、及び航空機弾道飛行による短秒時低重力実験を行ってから、スペースシャトルを利用する長時間宇宙実験を行った。

宇宙実験は与えられたタイムライン上でパラメータを変えながらシーケンシャルに行なわれることになっていた。各種の異なる実験条件下で、いろいろな現象が観察されることが期待された。これらの実験条件とは液滴の大きさ、音場の強さ、及び回転軸（Z軸）に垂直な二軸間（X及びY軸）の音場の位相制御であった。液滴の安定浮揚はその後の実験を行なうための最も重要な最初のステップであった。この実験の第一段階で液滴の注入器からの切り離しにたまたま失敗した。しかし、音響放射圧のために変形する液滴のビデオデータは液滴が注入針先端に付着している間に得られた。これらの宇宙実験結果は筆者等の理論と比較された^{1, 2, 3, 4, 5)}。

2. 理論

表面張力は単位面積あたりの表面エネルギーと定義される。無重量状態での安定的な液滴の条件は自由エネルギーが最小であるから、液滴は真球でなければならない。しかし、外力は液体に対してさまざまな表面振動を引き起こす。三軸音波共鳴チャンバーは微小重力下ですえ浮揚液滴に擾乱を供給する。本章第1節では、液滴の表面波と共鳴チャンバー内の音波との間の干渉に関する理論的な研究について述べる。

回転する液滴は多様なモードの表面張力波を誘起する。この場合誘起される表面張力波は、液滴内部流が渦なし流であるかまたは渦あり流であるかによって、理論的には異なるはずである。本章第2節では、渦なし流と渦あり流の両方についての表面張

力波を理論的に記述する方法について述べる。

液滴に誘起される表面張力波もまた共鳴チャンバー内の音波と干渉する。その干渉のしかたも液滴内部流の渦のありなしと関係する。この問題は本章第3節で扱われる。

音圧が共鳴チャンバーのある一軸に沿って強められると、浮揚液滴は強い音響放射圧によって変形を受け、最終的には円盤状の自由端薄膜になる。この変形については本章第4及び第5節で解析的に研究する。円盤状の自由端液膜が音響チャンバー内で形成されると、薄膜上の表面張力波は音場と干渉する。この干渉については本章第6節で解析的に解かれる。

2.1 液滴表面張力波の音場との干渉

三軸音波共鳴チャンバー内の音場は、次のように三個の音響ドライバーによる音場の和で与えられる。

$$p_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{in} \cos(n\pi/2 - 2\pi x_i/\lambda_{i1})}{\cos(3n\pi/2 + 2\pi l_{i0}/\lambda_{i1})} \cos(\omega_{in}t + \theta_{in}) \quad (1-1)$$

ここで、 P_{in} は x_i 軸音響振動ダイアフラムにおける n 次高調波の音圧振幅、 l_{i0} は x_i 軸音響ドライバーの代表長、 λ_{i1} は基本波の波長、 ω_{in} 及び θ_{in} はそれぞれ x_i 軸音響ドライバーによって伝播される n 次高調波の角振動数及び位相角度である。三軸座標の原点は共鳴チャンバーの基本圧力波の節に置くものとする。

液滴は基本圧力波の節の位置に保持され、共鳴チャンバーを満たしている流体すなわち気体中に浮揚していると仮定する。液滴の密度 ρ_1 及び液滴中の音速 c_1 はチャンバーを満たしている流体の密度 ρ_0 及び音速 c_0 よりもはるかに大きいから、音波は一般的には液滴中へは伝播しない。液滴の表面波は内部流及び外部流の擾乱に関連する連続の方程式と運動方程式を解くことによって得られるが、内外の境界では相応する境界条件を必要とする。表面張力波と音波の関係については、音波は内外流の界面においてのみ表面張力波に重ね合わされるものとする。

解析を容易にするために、液滴の中心と、半径 R の球座標の原点を一致させるものとする。液滴の液体とこの球の外側の乱れた領域を占める気体はお互いに混じり合わず、非圧縮性で粘性は無いものと仮定する。また、表面張力に比して浮力が小さい、すなわちボンド数 $g_L R^2 \Delta \rho / T$ は十分に小さく、重力を無視できるものと仮定する。ここで、 g_L は局地重力加速度、 $\Delta \rho = |\rho_1 - \rho_0|$ 、及び T は界面張力である。液滴内及び液滴の外の擾乱領域における連続及び運動方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1-2)$$

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \nabla p / \rho = 0 \quad (1-3)$$

ここで、 V は速度ベクトル、 p は圧力、そして ρ は密度である。

半径 R の球状液滴が外部の擾乱を受けて微小変動するとき、局部半径 r_s は次式で表せる。

$$r_s = R + a(t)Y_n \quad (1-4)$$

ここで、 Y_n は n 次の球関数、 $a(t)$ は微小擾乱の大きさを示し $|a(t)| \ll R$ のオーダーの時間の関数である。著者等が行う本節の解析は $a(t)$ の 1 次のオーダーに限定する。このオーダーでは境界面における半径方向の流体の粒子速度は次式で表せる。

$$u = da(t)/dt \cdot Y_n \quad (1-5)$$

ここでは、液滴中心の移動運動及びキャビテーションによる気泡の発生または崩壊は、式(1-2)の取扱を単純にするため、考慮しない。すなわち、 $dR/dt=0$ 。式(1-2)、及び(1-3)から次式を得る。

$$\nabla^2 p = 0 \quad (1-6)$$

式(1-6)は球関数の解をもつ。ここで、Lamb⁶⁾、Plesset⁷⁾、及び Miller⁸⁾ 等が行った理論解析の解を利用して、液滴の変形による擾乱圧力解を表すと、(1-3)及び(1-5)式から

$$\nabla \tilde{p}_r / \rho |_{r=r_s} \sim \beta_n^2 a(t) Y_n a_r \quad (1-7)$$

を得る。ここで、 \tilde{p}_r は液滴の変形に対する復原力に寄与する擾乱圧力、 a_r は半径方向の単位ベクトル、及び

$$\beta_n^2 = (n-1)n(n+1)(n+2)T/[n\rho_o + (n+1)\rho_i]R^3 \quad (1-8)$$

である。ここで、 β_n は液滴内外部の 2 非粘性流体の振動数である。

液滴とこの液滴の外部の擾乱域を占める気体は共鳴チャンバーを満たす気体の中に存在するが、定在波の音場は外部から加えられた強い音場によるものであるから、音場は液滴の変形とは独立した関係にあるものと仮定する。ただし、液滴の擾乱そのものは音場の影響を受ける。したがって、音響圧力場は境界面で液滴の擾乱圧力に重ね合わせることができる。液滴の擾乱を支配する微分方程式は近似的に次式で表せる。

$$\partial \tilde{V} / \partial t |_{r=r_s} + \nabla \tilde{p}_r / \rho |_{r=r_s} = -\nabla \tilde{p}_t / \rho_o |_{r=r_s} \quad (1-9)$$

ここで、 \tilde{p}_t は液滴の擾乱に寄与する(1-1)式に関係する項の総和であり、近似的に次式で表せる。

$$\nabla \tilde{p}_i / \rho_o |_{r=r_s} \sim - \sum_{i=1}^3 \frac{P_{i2}}{\rho_o} \left(\frac{\omega_{i2}}{c_o} \right)^2 \frac{\cos(\omega_{i2}t + \theta_{i2})}{\cos(\omega_{i2}l_{i0}/c_o)} \tilde{x}_i a_i + \text{高調波項} \quad (1-10)$$

ここでは $2\pi r_s / \lambda_1 \ll 1$ 及び $2\pi r_s / \lambda_2 \ll 1$ と仮定する。もしも三軸音響場がどの軸に関しても同じであるとする、 $P_{12} = P_{22} = P_{32}$ 、 $\omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{32}$ 及び $\theta_{12} = \theta_{22} = \theta_{32}$ の関係が成り立つ。問題をさらに単純にするため共鳴チャンバの中心の回りに球状共鳴が存在すると仮定すると、擾乱の一次項を扱う線形化された式は(1-10)より次式で表せる。

$$\nabla \tilde{p}_i / \rho_o |_{r=r_s} \sim - \frac{P_2}{\rho_o} \left(\frac{\omega_2}{c_o} \right)^2 \frac{\cos(\omega_2 t + \theta_2)}{\cos(\omega_2 l_o / c_o)} a(t) Y_n a_r \quad (1-11)$$

式(1-1)及び(1-3)における $\nabla p / \rho$ に関連する高次項はベルヌーイの積分定数及び擾乱のない表面張力の項とともに液滴の移動を記述するから、ここでは無視する。式(1-5)、(1-7)及び(1-11)から(1-9)式は次のように表せる。

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} + [\beta_n^2 - \frac{P_2}{\rho_o} \left(\frac{\omega_2}{c_o} \right)^2 \frac{\cos(\omega_2 t + \theta_2)}{\cos(\omega_2 l_o / c_o)}] a(t) \quad (1-12)$$

ここで、

$$\phi = (\omega_2 t + \theta_2) / 2 \quad (1-13)$$

$$h_M^2 = 8P_2 / \rho_o c_o^2 \cos(\omega_2 l_o / c_o) \quad (1-14)$$

$$b_M = (2\beta_n / \omega_2)^2 + h_M^2 / 2 \quad (1-15)$$

とすると (1-12) 式は次のようなマシュー方程式となる。

$$d^2 a(t) / d^2 \phi + (b_M - h_M^2 \cos^2 \phi) a(t) = 0 \quad (1-16)$$

図2-1は b_M 及び h_M のさまざまな値に関するマシューの方程式の安定解である^{9, 10)}。微小重力環境下で使う音響共鳴チャンバでは、強度の高い音場を使う必要が内から $|h_M| \ll 1$ である。図から分るように b_M が 0 または 1 に近い場合には、すなわち液滴表面張力波の低次モードまたは $\omega_1 = \omega_2 / 2 = \beta_n$ の一次共鳴モード

では、 $|h_M| \ll 1$ 条件でも音波と液滴の表面張力波との干渉による不安定が発生する可能性がある。この場合、液滴表面張力波の低次モードの振動に関連する不安定は宇宙実験にとって重要である。

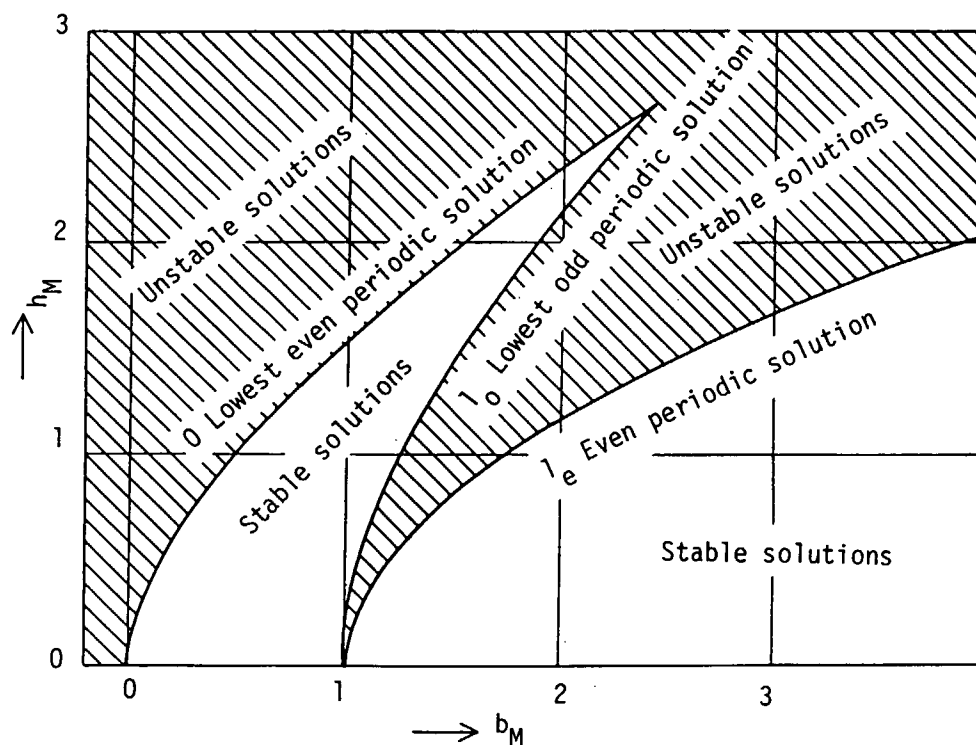


図 2-1 マシュー方程式の解

2.2 回転液滴の表面張力による多葉波

Chandrasekhar は回転液滴の形状安定に関する理論を発表している¹¹⁾が、そこでは液滴に含まれる全力学的エネルギーと表面エネルギー（彼の表記によれば表面エネルギーテンソル）が等しいとしている。彼の理論では表面エネルギーテンソルの対称性が重要である。しかし、対称性そのものが表面張力による多葉波を理論的に扱えなくしている。さらに、Chandrasekhar 型回転曲面の安定限界に対する音場の影響は小さいことが著者等の研究で分った。すなわち、Chandrasekhar の不安定基準である $\Omega^2 > 2J$ の関係式と等価の関係を音場の影響として示した²⁾。Brown¹²⁾ はこの問題を計算機を利用する有限要素法を用いて研究したが、彼の方法は音場との干渉を直感的に理解するにはあまりにも複雑である。回転液滴の表面張力波による多葉波と音場との干渉に関する解析的な研究は行われたことがない。

著者等は本節において、回転液滴の表面張力によって駆動される多葉波を求める近似解を示す。 Z 軸まわりに角速度 Ω で一様に回転している座標系では、液滴内部及び外部流における流体の連続及び運動の式は、それぞれ次式で表せる。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2-1)$$

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = -\nabla p / \rho + (r - z \mathbf{a}_z) \Omega^2 + 2 \Omega \mathbf{V} \times \mathbf{a}_z \quad (2-2)$$

ここで、 \mathbf{r} は位置ベクトル、 \mathbf{a}_z は z 軸の単位ベクトル、 \times はベクトル積を表す。式(2-2)のベクトル発散及びベクトル回転をとると、それぞれ次式となる。

$$\nabla^2 p / \rho = 2 \Omega^2 + 2 \Omega \mathbf{a}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (2-3)$$

$$\partial (\nabla \times \mathbf{V}) / \partial t = 2 \Omega (\mathbf{a}_z \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (2-4)$$

回転液滴の定常状態は固体状態であると想像すれば、

$$\nabla \times \mathbf{V}_s = 0 \quad (2-5)$$

ここで、下付き添え字 s は定常状態を表す。

外部流れの液滴内部への影響を無視すれば、液滴の内部圧力は容易に次式で表せる。

$$p_s = p_0 + \rho_i \Omega^2 w^2 / 2 \quad (2-6)$$

ここで、下付き添え字 i は液滴の内側を表し、 P_0 は定数、 w は z における平衡形状の z 軸からの表面半径である。

一定速度で回転している平衡状態にある液滴がわずかに乱される場合を想定すると、

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_s + \tilde{\mathbf{V}} \quad (2-7)$$

$$p = p_s + \tilde{p} \quad (2-8)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{V}}$ と \tilde{p} はそれぞれ擾乱速度ベクトルと擾乱圧力を表す。式(2-1)～(2-4)は次のように表せる。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = 0 \quad (2-9)$$

$$\partial \tilde{\mathbf{V}} / \partial t = -\nabla \tilde{p} / \rho + 2 \Omega \tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{a}_z \quad (2-10)$$

(2-2)式のベクトル発散をとると、

$$\nabla^2 \tilde{p} / \rho = 2 \Omega \mathbf{a}_z \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) \quad (2-11)$$

(2-2)式のベクトル回転は、

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{V}}) / t = 2 \Omega (\mathbf{a}_z \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} \quad (2-12)$$

となる。

2.2.1 擾乱流れ場における渦なし流

擾乱流れ場は渦なし流れであると仮定すると、

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{V}} = 0 \quad (2-13)$$

(2-12) 式からは次式が得られる。

$$(\mathbf{a}_z \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} = 0 \quad (2-14)$$

したがって、式(2-9)～(2-12)の解としては二次元変数分離型を仮定することができる。式(2-9)～(2-12)の解は極座標系において以下のように表される。

液滴内部流れでは

$$\tilde{\phi}_i = - \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (r/w)^n \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i = & -\rho_i \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (r/w)^n \\ & -\rho_i \Omega \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta)] (w/n) (r/w)^n \end{aligned} \quad (2-16)$$

液滴の外部流れでは

$$\tilde{\phi}_e = \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (w/r)^n \quad (2-17)$$

$$\tilde{p}_e = \rho_e \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (w/r)^n$$

$$-2\rho_e\Omega \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t)\sin(n\theta) + \dot{b}_n(t)\cos(n\theta)](w/n)(w/r)^n \quad (2-18)$$

ここで、下付き添え字 e は外側を意味し、 $\tilde{\phi}$ は擾乱速度のポテンシャルである。
内側と外側とを結ぶ境界では次の条件が満たさなければならない。

$$\partial \phi_i / \partial r |_{r=w} = -\partial \phi_e / \partial r |_{r=w}$$

境界界面につづく擾乱をラグランジェの変位で表すことにすると、

$$\xi = \xi_r a_r + \xi_\theta a_\theta \quad (2-19)$$

ここで、 a_r と a_θ はそれぞれ極座標系の半径方向及び円周方向の単位ベクトルである。
したがって、次式が容易に得られる。

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t)\cos(n\theta) - b_n(t)\sin(n\theta)] \quad (2-20)$$

$$\xi_\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t)\sin(n\theta) + b_n(t)\cos(n\theta)] \quad (2-21)$$

回転液滴の非定常な形状を位置ベクトル \mathbf{R} で表すと、

$$\mathbf{R} = (w + \xi_r) \mathbf{a}_r + \xi_\theta \mathbf{a}_\theta + z \mathbf{a}_z \quad (2-22)$$

液滴の表面における内外流の局部圧力の平衡は $p_i = p_e + T \operatorname{div} \tilde{\mathbf{n}}$ (ここで、 $\tilde{\mathbf{n}}$ は液滴表面上における単位法線ベクトル) で表されるから、境界面における擾乱流れの関係式は次式で表せる。

$$\tilde{p}_i |_{r=w} - \tilde{p}_e |_{r=w} = T \operatorname{div} \tilde{\mathbf{n}} \quad (2-23)$$

式(2-16)及び(2-18)から、

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i|_{r=w} - \tilde{p}_e|_{r=w} &= -(\rho_i + \rho_e) \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) \\ &\quad - 2(\rho_i - \rho_e) \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta)] (w/n) \end{aligned} \quad (2-24)$$

ここで、 ξ の第一次項のみに注目すれば、(2-22)式より

$$\begin{aligned} \text{div } \tilde{\mathbf{n}} &= \frac{\Phi \xi_r}{\sqrt{1+\Phi^2} w^2} + \left[\frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)^3} w} + \frac{2-\Phi^2}{\sqrt{(1+\Phi^2)^5}} \frac{d\Phi}{dw} \right] \partial \xi_r / \partial r \\ &\quad + \frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)^3}} \partial^2 \xi_r / \partial r^2 + \frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)} w^2} \partial^2 \xi_r / \partial \theta^2 \end{aligned} \quad (2-25)$$

ここで、 $\Phi = df/dw$, $z = f(w)$ は平衡状態にある非軸対称形状を表す。

式(2-24)及び(2-25)を式(2-25)に代入すると、次のような多葉波の振動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n(t) + 2\gamma \dot{b}_n(t) + \sigma_n^2 a_n(t) &= 0 \\ \ddot{b}_n(t) - 2\gamma \dot{a}_n(t) + \sigma_n^2 b_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

ここで、

$$\gamma = \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e} \Omega \quad (2-27)$$

また、

$$\sigma_n^2 = \frac{n \Gamma \Phi}{(\rho_i + \rho_e) \sqrt{1+\Phi^2} w^3} \left[1 - n^2 + \frac{(n-1)^2}{(1+\Phi^2)} + \frac{(n-1)(2-\Phi^2)}{(1+\Phi^2)^2} \frac{d\Phi}{dw} \frac{\Phi}{w} \right] \quad (2-28)$$

式(2-26)から、 n 次の多葉波の自然振動数は次式で与えられる。

$$\beta_n^* = \sigma_n \sqrt{1 + \gamma / \sigma_n} \pm \gamma \quad (2-29)$$

σ_n を液滴の赤道半径 R で表すと、

$$\sigma_n^2 \big|_{w=R} = \frac{n(n-1)(n+2)T}{(\rho_i + \rho_e)R^3} \left[1 + \frac{2}{(n+2)} \Sigma \right] \quad (2-30)$$

ここで、 $\Sigma = \rho_i \Omega^2 R^3 / 8T$ は Chandrasekhar が導入した回転液滴の平衡状態の形状を決める無次元パラメータである。 $\Omega = 0$ とき、(2-29)式から次式を得る。

$$\beta_n^{*2} \big|_{\Omega=0} = \frac{n(n-1)(n+2)T}{(\rho_i + \rho_e)R^3} \quad (2-31)$$

この式は Lamb⁶⁾ によって示されたように、 $\rho_e \rightarrow 0$ における球状液滴の表面張力波の自然振動数を与えるものである。図2-2は表面張力による多葉波の例を示す。

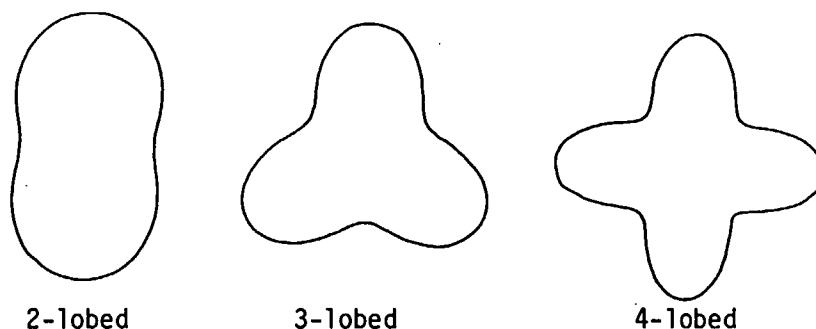


図 2-2 回転液滴の表面張力による多葉波

2.2.2 擾乱流れ場における渦あり流れ

$\nabla \times \tilde{\mathbf{V}} \neq 0$ のとき次の三次元擾乱流れ場を仮定することができる。

液滴内部では、

$$\tilde{\mathbf{V}}_{r,i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta) + \frac{w}{n} k_n^2 \sin(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) \right] \left(\frac{r}{w} \right)^{n-1} \quad (2-32a)$$

$$\tilde{V}_{\theta i} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta) + \frac{w}{n} k_n^2 \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) \right] \left(\frac{r}{w} \right)^{n-1} \quad (2-32b)$$

$$\tilde{V}_{zi} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) (r/w)^{n-2} \quad (2-32c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i = & -\rho_i \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (r/w)^n \\ & - 2\rho_i \Omega \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta)] (w/r) (r/w)^n \\ & + \rho_i \Omega \sum_{n=1}^{\infty} \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) (r/w)^n \end{aligned} \quad (2-33)$$

液滴の外部では、

$$\tilde{V}_{re} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta) + \frac{w}{n} k_n^2 \sin(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) \right] \left(\frac{r}{w} \right)^{n+1} \quad (2-34a)$$

$$\tilde{V}_{\theta e} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta) + \frac{w}{n} k_n^2 \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) \right] \left(\frac{r}{w} \right)^{n+1} \quad (2-34b)$$

$$\tilde{V}_{ze} = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) (w/r)^{n+2} \quad (2-34c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_e = & \rho_e \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta)] (w/n) (w/r)^n \\ & - 2\rho_e \Omega \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta)] (w/n) (w/r)^n \\ & - \rho_e \Omega \sum_{n=1}^{\infty} \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) (w/r)^n \end{aligned} \quad (2-35)$$

ここで、 k_n は z 軸の波数を表す。

式(2-32) ~ (2-35)は境界面 $r = w$ において二つの連続方程式である式(2-9)及び式(2-11)を満たす。式(2-32)は、 $(k_n R / 2\pi)_i \gg 1$ の条件の下で近似的に(2-12)式を

満足している。式(2-34)は、 $(k_n R/2\pi) \ll 1$ の条件下で近似的に(2-12)式を満足する。液滴の z 軸方向で考えた表面張力波と外部流れ内の音波を考えると、仮定 $(k_n R/2\pi) \gg 1$ は液滴表面波は液滴半径に比べて波長が短く、 $(k_n R/2\pi) \ll 1$ は外部流における波の波長が液滴半径に比べて大きいことを意味する。したがって、式(2-32) ~ (2-35)は液滴内部の擾乱流れ場の近似解である。

ラグランジェの変位は次式のように表せる。

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) - b_n(t) \sin(n\theta) + \frac{w k_n^2}{2n\Omega} \cos(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z)] \quad (2-36a)$$

$$\xi_\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \sin(n\theta) + b_n(t) \cos(n\theta) - \frac{w k_n^2}{2n\Omega} \sin(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z)] \quad (2-36b)$$

$$\xi_z = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n / 2\Omega \cdot \sin(-2\Omega t + n\theta + 2k_n z) \quad (2-36c)$$

$\text{div } \tilde{\mathbf{n}}$ を計算することにより、(2-32)式から擾乱流れ場における渦あり流れの多葉波方程式を次のように得ることができる。

$$\ddot{a}_n(t) + 2\gamma \dot{b}_n(t) + \sigma_n^2 a_n(t) = f_1 \cos(-2\Omega t + 2k_n z) + f_2 \sin(-2\Omega t + 2k_n z) \quad (2-37)$$

$$\ddot{b}_n(t) - 2\gamma \dot{a}_n(t) + \sigma_n^2 b_n(t) = f_1 \sin(-2\Omega t + 2k_n z) - f_2 \cos(-2\Omega t + 2k_n z)$$

ここで、

$$f_1 = f_1(\rho_i, \rho_e, w, n, \Omega, T, \Phi, k_n) \quad (2-38)$$

$$f_2 = f_2(\rho_i, \rho_e, w, n, \Omega, T, \Phi, k_n)$$

微分方程 (2-37)式 の特別解は次の形で与えられる。

$$a_n(t) = A \sin(-2\Omega t + 2k_n z) + B \cos(-2\Omega t + 2k_n z) \quad (2-39)$$

$$b_n(t) = C \sin(-2\Omega t + 2k_n z) + D \cos(-2\Omega t + 2k_n z)$$

ここで、A、B、C 及び D は未定定数である。

式(2-39)を式(2-37)に代入すると次の特性方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & 0 & 0 & 4\gamma\Omega \\ 0 & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & -4\gamma\Omega & 0 \\ 0 & -4\gamma\Omega & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & 0 \\ 4\gamma\Omega & 0 & 0 & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-40)$$

式 (2-20) より容易に次式が得られる。

$$\sigma_n^2 = 4\Omega^2 \pm 2\gamma\Omega \quad (2-41)$$

式 (2-41) の条件が満たされるとき、 n 次モードの多葉波は成長する。式 (2-30) 及び式 (2-27) を使って、 $\Sigma = \rho_i \Omega^2 R^3 / 8T$ であることを考えると、 $\rho_e \ll \rho_i$ である回転液体中に渦流が存在する液滴の表面張力による多葉波の励起条件は次式で表せる。

$$\Sigma = \frac{n(n+1)(n+2)}{16(2 \pm 1) - 2n(n-1)} \quad (2-42)$$

式 (2-42) から n 次モードの多葉波が発生する条件は

$$\begin{aligned} \Sigma &= 0.182 \text{ or } 0.667 && \text{のときに } 2 \text{ 次モード} \\ \Sigma &= 0.833 \text{ or } 7.5 && \text{のときに } 3 \text{ 次モード} \\ \Sigma &= 3 && \text{のときに } 4 \text{ 次モード} \end{aligned}$$

すなわち、液体中に渦流が存在する回転液滴の表面張力による多葉波では 5 次モード以上の高次モードは、理論的には、発生しない。

2.3 回転液滴の表面張力による多葉波と音波の干渉

第 2 章第 1 節で述べた液滴表面張力波の共鳴音場との干渉に関する解析結果からの類推により、小さな擾乱領域、すなわち $|a_n(t)/w| \ll 1$ 及び $|b_n(t)/w| \ll 1$ の条件下では、擾乱流れ場における渦なし流の多葉波と共鳴音波との干渉は (2-26) 式から、次式で記述されるものとする。

$$\ddot{\xi}_r - 2\gamma \dot{\xi}_\theta + \sigma_n^2 \xi_r = -\partial \bar{p}_r / \partial r / \rho_e \quad (3-1)$$

ここで、 \bar{p}_r は Z 軸回りを角速度 Ω で一様に回転している座標系における共鳴音場圧力項のラグランジュ変位の結合項である。

$$\partial \bar{p}_r / \partial r = F_o(\theta, t) + \partial \bar{p}_r / \partial r \quad (3-2)$$

直交する二つの共鳴音波が音波浮揚液滴に回転トルクを加える位相を除き、三軸の共鳴音波条件が全て等しいとすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} -\partial \bar{p}_r / \partial r = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_n / c_o)^2 P_n}{\cos(3n\pi / 2 + 2\pi l_o / \lambda_n)} [\cos^2(\theta + \Omega t) \cos\{n\pi / 2 \\ & - \omega_n / c_o \cdot w \cos(\theta + \Omega t)\} \cos(\omega_n t + \theta_{xn}) \\ & + \sin^2(\theta + \Omega t) \cos\{n\pi / 2 - \omega_n / c_o \cdot w \sin(\theta + \Omega t)\} \cos(\omega_n t + \theta_{yn})] \xi_r \\ & + \text{the higher orders in } \xi_r \end{aligned} \quad (3-3)$$

式(3-2)の右辺第1項は液滴中心の移動運動を支配する力を表すから、ここでは無視する。 $|2\pi R / \lambda_1| \ll 1$ 、及び $|2\pi R / \lambda_2| \ll 1$ で表されるような小さな液滴では $n \geq 3$ の高調波を無視すると、干渉の微分方程式を次式で示すようなベッセル関数表示を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n(t) + [\sigma_n^2 - \Lambda_1 \cos 2\theta_1 - \Lambda_{2n}(\cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3)] a_n(t) \\ + 2\gamma \dot{b}_n(t) + \Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3) b_n(t) = 0 \\ \ddot{b}_n(t) + [\sigma_n^2 - \Lambda_1 \cos 2\theta_1 + \Lambda_{2n}(\cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3)] b_n(t) \\ - 2\gamma \dot{a}_n(t) + \Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3) a_n(t) = 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & \frac{\omega_1}{c_o} {}^2P_2 [J_0(2\pi w / \lambda_2) - J_2(2\pi w / \lambda_2)] \cos\{(\theta_{y2} - \theta_{x2}) / 2\} / \rho_e \cdot \cos(2\pi l_o / \lambda_2) \\ \Lambda_{2n} = & \frac{\omega_1}{c_o} {}^2P_2 [2J_{2n}(2\pi w / \lambda_2) - J_{2n-2}(2\pi w / \lambda_2) - J_{2n+2}(2\pi w / \lambda_2)] \\ & / 2\rho_e \cdot \cos(2\pi l_o / \lambda_2) \end{aligned}$$

$$2\theta_1 = \omega_2 t + (\theta_{x2} + \theta_{y2})/2$$

$$2\theta_2 = (\omega_2 - 2n\Omega)t + \theta_{y2} \quad (3-5)$$

$$2\theta_3 = (\omega_2 + 2n\Omega)t + \theta_{y2}$$

式(3-4)で表される振動系の安定性を調べるために、擾乱項に発散性を調べる試験関数として、 $a_n(t) = \alpha \Theta(t) \text{Exp}(\pm i\gamma t)$ 及び $b_n(t) = \beta \Theta(t) \text{Exp}(\pm i\gamma t)$ を選ぶ。ただし、 α 及び β はここでは未定定数である。式(3-4)の安定性を支配する微分方程式は、再度、次のマシュー方程式で表される。

$$d^2\Theta/d\phi^2 + (b_M - h_M^2 \cos^2 \phi) \Theta = 0 \quad (3-6)$$

ここで、

$$b_M = (\sigma_n^2 + \gamma^2)/\omega_1^2 + h_M^2/2 \quad (3-7)$$

$$h_M^2 = 2\sqrt{\Lambda_1^2 + 4\Lambda_{2n}^2 \pm 4\Lambda_1\Lambda_{2n}\cos\{(\theta_{y2} - \theta_{x2})/2\}}/\omega_1^2 \quad (3-8)$$

図 2-1 はマシュー方程式の安定及び不安定解を示す。

つぎに、特別なモード、すなわち $a_n(t)$ 及び $b_n(t)$ がお互いに独立している場合について述べる。例えば、 $a_n(t) = 0$ または $b_n(t) = 0$ の場合には、微分方程式(3-4)は次のように表現され、

$$\dot{a}_n(t)/a_n(t) = \pm \Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3)/2\gamma \quad (3-9)$$

$$\omega_1 = n\Omega \quad (3-10)$$

共鳴音波の基本周波数が液滴回転数の n 倍のときに n 次の多葉波が成長するという解となる。

2.4 音響放射圧による液滴の変形

音波浮揚装置における液滴の音響放射圧による圧縮はローラーを使わずに液状フィルムを製造したり、ノズルなしの液状ファイバーの製造に利用することが可能になる。本節では、音波共鳴装置内に浮揚された液滴が一軸に沿う強い共鳴音場の音響放射圧によって圧縮される場合の表面張力によって支えられる液滴形状を記述する理論的な

解析を示す。図 2-3 は共鳴音波による z 軸方向に圧縮された液滴の回転軸対称の断面形状の上半分のみを示す。粒子速度波の節は z 軸の原点にあるものとする。

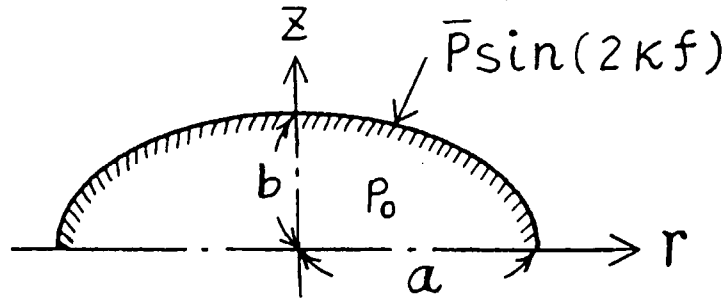


図 2-3 圧縮されている液滴表面の座標系

共鳴音波で圧縮された液滴の形状を平衡状態にある扁球のような回転軸対称の形状を仮定すると、子午線方向の断面の形状式を与えれば、形状は一義的に決まる。

$$z = f(r) \quad (4-1)$$

平面定在波中の共鳴音波の波長に比べて小さい液滴に加わる音響放射圧が $p \sin(2kf)$ であることを考えると、液体内部の圧力は次式で与えられる。

$$p = p_0 - \bar{p} \sin(2kf), \quad (4-2)$$

ここで、

$$\bar{p} = p_1^2 / \rho_0 c^2 \cdot k a \cdot F(\rho_0 / \rho), \quad (4-3)$$

及び

$$F(\rho_0 / \rho) = \{1 + 2/3 \cdot (1 - \rho_0 / \rho)\} / (2 + \rho_0 / \rho) \quad (4-4)$$

ただし、 p_0 は定数、 p_1 は定在波の基本周波数の音圧振幅、 $k = \omega / c$ は波長定数、 ω は共鳴音波の角振動数、 c は音波の伝播速度、 ρ_0 は媒質の定常時の密度、 ρ は液滴の密度である。

表面張力と平衡を保つ閉曲面 S の近傍の局所的な内部圧力は次式で与えられる。

$$p = T \operatorname{div} \mathbf{n} \text{ (on } S\text{)}, \quad (4-5)$$

ここで、 \mathbf{n} は S の外向き単位法線ベクトル、 T は液滴の表面張力である。単位法線ベクトルのベクトル発散は回転曲面に関しては次式で与えられる。

$$\operatorname{div} \mathbf{n} = -1/r \cdot d/dr \cdot r \phi / \sqrt{1 + \phi^2} \quad (4-6)$$

ここで、 $\phi = df/dr$ である。したがって、一軸方向の定在波の影響下にある液滴の回転軸対称の形状を記述する基礎方程式は次式で与えられる。

$$-1/r \cdot d/dr \cdot r \phi / \sqrt{1+\phi^2} = p_0 - \bar{p} \sin(2 k f) \quad (4-7)$$

式(4-7)を積分すると、次式が得られる。

$$-r \phi / \sqrt{1+\phi^2} = p_0/2T \cdot r^2 - \bar{p}/T \cdot \int_0^r r \sin(2 k f) dr \quad (4-8)$$

液滴の中心と座標系の中心とは一致しているものとする、 $r = 0$ は存在しており、その点では回転対称性の故に $\phi = 0$ である。式(4-8)はこのような条件を満足しており、液滴の赤道 ($r = a$) では $\phi \rightarrow -\infty$ であり、式(4-8)の液滴の赤道の表現として、次のような式を得ることができる。

$$p_0 = 2T/a^2 \{a + \bar{p}/T \cdot \int_0^a r \sin(2 k f) dr\} \quad (4-9)$$

式(4-9)を(4-8)式に代入すると、

$$\phi / \sqrt{1+\phi^2} = -\{a + \bar{p}/T \cdot \int_0^a r \sin(2 k f) dr\} r/a^2 + \bar{p}/T \cdot \int_0^r r \sin(2 k f) dr \quad (4-10)$$

変数 r 及び z を扁球の長半径 a で無次元化すると、式(4-10)は次の形に書き変えることができる。

$$\phi / \sqrt{1+\phi^2} = -\{1 + \bar{p}a/T \cdot \int_0^1 \xi \sin(2 k a \eta) d\xi\} \xi + \bar{p}a/T \cdot \int_0^\xi \xi \sin(2 k a \eta) d\xi \quad (4-11)$$

ここで、 $\xi = r/a$ 、 $|\xi| \leq 1$ 、 $\eta = f/a$ 及び $|\eta| \leq 1$ 。

次に定義する新しい無次元数を導入する。

$$\Pi = \bar{p} k a^2 / T \quad (4-12)$$

この無次元数は液滴に働く音響放射圧による力と液滴の表面張力の比を表す。式(4-11)において、 $\sin(2 k a \eta) \ll 1$ の仮定のもとで $\sin(2 k a \eta)$ の展開式の第一項を取り、さらに液滴の体積

$$\int_0^1 \xi \eta d\xi = 1/3 \cdot (a_0/a)^3$$

は保存されることを考えると、(4-11)式は次のように書き換えられる。

$$\phi / \sqrt{1 + \phi^2} = - \{ 1 + 2/3 \cdot (a_0/a) \Pi \} \xi + 2(a/a_0)^2 \Pi / \xi \cdot \int_0^\xi \eta d\xi \quad (4-13)$$

ここで、 a_0 は変形していない元の球状液滴の半径を表す。

式(4-13)の解を ξ の級数で表せるものとする、

$$\eta = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + b_4 \xi^4 + \dots + b_n \xi^n + \dots \quad (4-14)$$

$$\phi = b_1 + 2b_2 \xi + 3b_3 \xi^2 + 4b_4 \xi^3 + 5b_5 \xi^4 + \dots + nb_n \xi^{n-1} + \dots \quad (4-15)$$

ここで、 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ は無次元係数、また $b_0 = b/a$ は扁球の半短径と半長径の比を表す。

新しい無次元数 Γ を次のように定義すると、

$$\Gamma = 1 + 2/3 \cdot (a_0/a) \Pi - b_0 (a/a_0)^2 \Pi \quad (4-16)$$

ここで、 $\Gamma < 1$ である。

式(4-13)の解は次式の級数解として与えられる。

$$\eta(\xi) = b_0 - 1/2 \cdot \Gamma \xi^2 + 1/32 \cdot \Gamma^2 (1 - 4\Gamma) \xi^4 + \dots \quad (4-17)$$

液滴の形状が回転対称の扁球で近似されたとすると、次の関係が容易に得られる。

$$\eta(\xi) = b_0 (1 - \xi^2), \quad \int_0^1 \eta(\xi) \xi d\xi = 1/3 \cdot (a_0/a)^3, \quad b_0 = (a_0/a)^3 \quad (4-18)$$

そこで、(4-16)式は次の近似式で表される。

$$\Gamma = 1 - 1/3 \cdot (a_0/a) \Pi + \dots \quad (4-19)$$

$\Pi < 3$ では(4-16)式において Γ の高次の項を無視すると、次の三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} \Gamma &= b_0 \\ (a_0/a)^3 + 1/3 \cdot \Pi (a_0/a) - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4-20)$$

三次方程式(4-20)は一つの実数解と一組の共役複素数解を持つ。本節で興味のある実数解は以下で与えられる。

$$a_0/a = [1/2 + \sqrt{(1/2)^2 + (\Pi/9)^3}]^{1/3} + [1/2 - \sqrt{(1/2)^2 + (\Pi/9)^3}]^{1/3} \quad (4-21)$$

$$b/a = b_0 \sim (a_0/a)^3 = 1 - \Pi/3 + 1/27 \cdot \Pi^2 - (\Pi/9)^4 + \dots \quad (4-22)$$

$\Pi > 3$ 及び $\Pi/3 \cdot (a_0/a) < 1$ においても、(4-20)式と同じ関係を得る。 $\Pi > 3$ の領域では、解の収斂性を良くするために(4-16)式とは異なる表現をする方がよい。すなわち、

$$b_0 = 1/[1 + 1/3 \cdot (a/a_0)^2 \Pi] \quad (4-23)$$

次の関係式を考慮すると、

$$1/3 \cdot (a/a_0)^2 \Pi > 1 > 1/3 \cdot (a/a_0) \Pi,$$

$$b_0 \sim 3/\Pi \cdot (a_0/a)^2 - [3/\Pi \cdot (a_0/a)^2]^2 = (a_0/a)^3$$

液滴の形状を記述する近似式は次式で表せる。

$$a_0/a = 3/\Pi - [3/\Pi \cdot (a_0/a)]^2 \quad (4-24)$$

もしも Π が次に示す値より大きい場合には

$$\Pi > (81)^{1/3} = 4.32675$$

液滴の形状を記述する近似式は次式で表せる。

$$b/a = b_0 \sim (3/\Pi)^3 [1 - 3(3/\Pi)^2] \quad (4-25)$$

2.5 可変形状液球

前節で述べた音響放射圧による液滴の変形に関する近似解は後節で示される地上実験の結果と必ずしも一致しない(図 3-14 参照)。著者等は 2.4 節における理論の欠陥の一つは、液滴の変形に関与する音響放射圧を求めるのに剛体球の周囲における音響放射圧を用いたことに由来していると考えた。実際の液滴は変形し、そのために定在音場もまた変形球から変化を受けるものと考えの方が実際の現象に近い。T. Hasegawa と K. Yosioka は弾性球にはたらく音響放射力を記述しようとした^{13, 14)}

。本節では、動く境界上の音響放射圧を求めるのに彼らの方法を用いた。得られた修正音響放射圧を用いて、前節における液滴の変形を記述する近似的な解析方法から、平面定在波場における液球の変形を記述する修正近似解を求めた。

2.5.1 可変形状液球に加わる音響放射圧

一連の音波が伝播している完全気体中の圧力変動は、 u_1^2/c^2 のオーダーまでを考慮すると次式で与えられる。

$$\delta p = \rho_0 (\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_2) - 1/2 \cdot \rho_0 \cdot u_1^2 + 1/2 \cdot \rho_0 / c^2 \cdot \dot{\Phi}_1^2 \quad (5-1)$$

ここで、 ρ_0 は音波が伝播する気体の平衡状態における密度、 c は音速、 u_1 は一次のオーダーの粒子速度 ($= -\nabla \Phi_1$)、 Φ_1 は波動方程式 $\Delta \Phi_1 = (1/c^2) \partial^2 \Phi_1 / \partial t^2$ で与えられる一次オーダーの速度ポテンシャル、 Φ_2 は二次オーダーの速度ポテンシャルである。

一つの閉領域 S が媒質内で u_1 と同じオーダーの速度で運動するとき、 $S(t)$ は時刻 t における位置を示す。動いている閉領域に加わる音響放射圧 $\langle F \rangle$ は二次のオーダーまで記述すると、次式で表される。

$$\langle F \rangle = \langle - \iint_{S(t)} \delta p \cdot n \, df \rangle \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} &= \langle - \iint_{S(t)} \rho_0 \cdot \dot{\Phi}_1 \cdot n \, df \rangle + \langle - \iint_{S_0} \rho_0 \cdot \dot{\Phi}_2 \cdot n \, df \rangle \\ &+ \langle \iint_{S_0} 1/2 \cdot \rho_0 \cdot u_1^2 \cdot n \, df \rangle + \langle - \iint_{S_0} 1/2 \cdot \rho_0 / c^2 \cdot \dot{\Phi}_1^2 \cdot n \, df \rangle \quad (5-3) \end{aligned}$$

ここで、 S_0 は平衡状態にある場合の閉領域の位置を示し、 n は表面の単位法線ベクトル、 df は表面要素である。

一次及び二次のオーダーの音響場を含むすべての媒質内で定常状態が確立されるとき、二次のオーダーの粒子速度 u_2 及び $\rho_0 \cdot \dot{\Phi}_2$ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} u_2 &= -\nabla \Phi_2 \\ &= \overline{\text{const}} + \overline{f_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \overline{f_{1,n}} \cos n\omega t + \overline{f_{2,n}} \sin n\omega t \} \quad (5-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_0 \dot{\Phi}_2 &= \delta p_2 + 1/2 \cdot \rho_0 u_1^2 - 1/2 \cdot \rho_0 / c^2 \cdot \dot{\Phi}_1^2 \\ &= \text{const} + \underline{g_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{g_{1,n}} \cos n\omega t + \overline{g_{2,n}} \sin n\omega t\end{aligned}\quad (5-5)$$

ここで、 δp_2 は二次オーダーの圧力変動、 $\overrightarrow{f_0}, \overrightarrow{f_{1,n}}, \overrightarrow{f_{2,n}}, \overrightarrow{g_0}, \overrightarrow{g_{1,n}}, \overrightarrow{g_{2,n}}$ は座標系のみ関数である。

式(5-4)及び(5-5)から、

$$g_0(x, y, z) = \text{const.} \quad (5-6)$$

式(5-6)から、容易に次式の関係が得られる。

$$\left\langle \iint_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi}_2 n df \right\rangle = 0 \quad (5-7)$$

閉領域の表面に関する法線速度ベクトルを $u_n n$ で表すと、次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_{S(t)} \rho_0 \Phi_1 n df \right) = \iint_{S(t)} \rho_0 \dot{\Phi}_1 n df + \iint_{S(t)} \rho_0 \nabla \Phi_1 \cdot u_n df \quad (5-8)$$

もしも、 Φ_1 と閉領域の変動の両方とも時間に関して周期的であるとする、(5-8)式の時間平均をとり、最後の積分項の中の $S(t)$ の代わりに S_0 と書くことにより、次式を得る。

$$\begin{aligned}\left\langle \iint_{S(t)} \rho_0 \dot{\Phi}_1 n df \right\rangle &= - \left\langle \iint_{S_0} \rho_0 \nabla \Phi_1 \cdot u_n df \right\rangle \\ &= - \left\langle \iint_{S_0} \rho_0 (u_n n + u_t t) u_n df \right\rangle\end{aligned}\quad (5-9)$$

ここで、 $u_t t$ は媒質中の接線方向の粒子速度である。式(5-7)及び(5-9)を(5-2)式に代入すると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned}\langle F \rangle &= - \left\langle \iint_{S_0} \rho_0 (u_n n + u_t t) u_n df \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \iint_{S_0} 1/2 \cdot \rho_0 u_1^2 n df \right\rangle - \left\langle \iint_{S_0} 1/2 \cdot \rho_0 / c^2 \cdot \dot{\Phi}_1^2 n df \right\rangle\end{aligned}\quad (5-10)$$

したがって、変動する閉領域に加わる音響放射力は一次の速度ポテンシャルに関連

する項のみから計算されるが、全ての積分は閉領域が平衡位置にある場合の前表面にわたって実行されることに注目する必要がある。閉領域の境界が回転軸対称の扁球と仮定するとき、平面定在波が回転対称軸に沿う音場では、液滴表面に加わる音響放射力は液滴の赤道線上における粒子速度を計算することによって与えられる。

$$\langle F \rangle = \langle F_r \rangle + \langle F_\theta \rangle + \langle F_{r,\theta} \rangle + \langle F_\phi \rangle \quad (5-11)$$

ここで、

$$\langle F_r \rangle = -\langle \pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi (\partial \Phi / \partial r)^2_{r=a} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \rangle, \quad (5-12)$$

$$\langle F_\theta \rangle = \langle \pi \rho_0 \int_0^\pi (\partial \Phi / \partial \theta)^2_{r=a} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \rangle, \quad (5-13)$$

$$\langle F_{r,\theta} \rangle = \langle 2\pi a \rho_0 \int_0^\pi (\partial \Phi / \partial r)_{r=a} (\partial \Phi / \partial \theta)_{r=a} \sin^2 \theta \, d\theta \rangle, \quad (5-14)$$

$$\langle F_\phi \rangle = \langle -\pi a^2 \rho_0 / c^2 \int_0^\pi (\dot{\Phi})^2_{r=a} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \rangle \quad (5-15)$$

2.5.2 平面波の球による散乱

2.5.2. (a) 平面進行波

半径 a の球が座標系の原点に拘束されない状態で置かれていると仮定すると、 Z 軸または $\theta = 0$ の方向に球に向かって伝播する平面進行波の速度ポテンシャル ϕ_i は次の展開式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp i(\omega_n t - k_n z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp i\omega_n t \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m J_m(k_n r) P_m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (5-16)$$

ここで、 J_m は第一種ベッセル関数、 P_m はルジャンドル多項式である。球の外側の速度ポテンシャル ϕ を次のように表すと、

$$\phi = \phi_i + \phi_s \quad (5-17)$$

ここで、 ϕ_0 は散乱波の速度ポテンシャルであり次式で表せる。

$$\phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Exp } i\omega_n t \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m A_m H_m^{(2)}(k_n r) P_m(\cos \theta) \quad (5-18)$$

ここで、 $H_m^{(2)}$ は第二種のハンケル関数である。一方、球の内側の速度ポテンシャル ϕ^* は次式で表せる。

$$\phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Exp } i\omega_n t \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m B_m J_m(k_n^* r) P_m(\cos \theta) \quad (5-19)$$

球の内外境界では次式が成立する必要がある、

$$\partial \phi / \partial r = \partial \phi^* / \partial r \quad \text{at } r = a \quad (5-20)$$

$$\rho_0 \dot{\phi} = \rho^* \dot{\phi}^* \quad \text{at } r = a \quad (5-21)$$

式 (5-18) ~ (5-21) から次の関係式が得られる。

$$a_n A_m = \frac{\lambda k_n J_m(k_n^* a) J_m'(k_n a) - k_n^* J_m'(k_n^* a) J_m(k_n a)}{k_n^* J_m'(k_n^* a) H_m^{(2)}(k_n a) - \lambda k_n J_m(k_n^* a) H_m^{(2)'}(k_n a)} \quad (5-22)$$

$$b_n B_m = \frac{ik_n}{(k_n a)^2 [k_n^* J_m'(k_n^* a) H_m^{(2)}(k_n a) - \lambda k_n J_m(k_n^* a) H_m^{(2)'}(k_n a)]} \quad (5-23)$$

ここで、 $\lambda = \rho^* / \rho_0$ 。

もしも、 $(k_n a)^2 \ll 1$, $(k_n^* a)^2 \ll 1$ であり、 $\lambda \ll 1$ であり、 $\lambda (k_n a)^2$ が極めて小さい場合は、液体中にある泡に相当するが、

$$b_n B_0 = 3i / [-(k_n^* a)^2 + i\{3\lambda - (k_n^* a)^2\}] \quad (5-24)$$

次式は泡振動との共鳴モード発生する条件を示す。

$$(k_n^* a)^2 = 3\lambda \quad (5-25)$$

ただし、理想気体の気泡の共鳴周波数 f_r は次式で与えられる。

$$f_r = 1/2\pi a \cdot \sqrt{3\gamma p_0/\rho_0} \quad (5-26)$$

もしも、 $(k_n a)^2 \ll 1$, $(k_n a)^2 \ll 1$ であり、 $\lambda > 100$ である場合には、気体媒体中に存在する液滴の条件に相当する。この場合には、

$$a_n A_0 = -J_0'(k_n a)/H_0^{(2)'}(k_n a) = \frac{-J_1(k_n a)}{J_1(k_n a) - iY_1(k_n a)} \quad (5-27)$$

$$\begin{aligned} b_n B_0 &= -i/[(k_n a)^2 \lambda J_0(k_n^* a) H_0^{(2)'}(k_n a)] \\ &= 8ia/(k_n a)^4 \lambda [1 - i\{2/\pi \cdot \ln(k_n a/2) - 2(1-2\gamma)/\pi - 8/\pi (k_n a)^2\}] \end{aligned} \quad (5-28)$$

となり、ここで、 Y_1 は第二種のベッセル関数である。

すなわち、液体中に泡が存在していても、気体中に液滴が存在していても、どちらの場合でも進行音響波は泡内にも液滴内にも共鳴波をつくらない。

2.5.2(b) 平面定在波

球の中心が粒子速度の節から距離 h のところにあるとすると、元の原点を中心とする平衡位置に関する球に向かう粒子速度ポテンシャルは次式で表せる。

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Exp}(i\omega_n t) [\text{Exp}\{ik_n(z+h)\} + \text{Exp}\{-ik_n(z+h)\}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Exp}(i\omega_n t) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \delta_m J_m(k_n r) P_m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (5-29)$$

ここで、

$$\delta_m = (-1)^m \text{Exp}(ik_n h) + \text{Exp}(-ik_n h) \quad (5-30)$$

散乱速度ポテンシャル、 ϕ_s と球の内側の速度ポテンシャル ϕ^* は次式で表される。

$$\phi_s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Exp}(i\omega_n t) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m C_m H_m^{(2)}(kr) P_m(\cos \theta) \quad (5-31)$$

$$\phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Exp}(i\omega_n t) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m D_m J_m(k^*r) P_m(\cos \theta) \quad (5-32)$$

ここで、 C_m と D_m は式(5-20)及び(5-21)で与えられる境界条件から次式で表される。

$$b_n C_m = A_m \delta_m \quad (5-33)$$

$$b_n D_m = \tilde{B}_m \delta_m \quad (5-34)$$

2.5.3. 可変形状液球へ加わる共鳴音響放射圧と液滴の変形

可変形状液滴に加わる共鳴音響放射圧の計算には ϕ^* で表される力の分力で表現すると便利である。次式で表される境界条件を利用して、

$$\partial \phi / \partial r = \partial \phi^* / \partial r \quad \text{at } r=a \quad (5-35)$$

$$\rho \cdot \dot{\phi} = \rho^* \dot{\phi}^* \quad \text{at } r=a \quad (5-36)$$

$$\rho \cdot \partial \phi / \partial \theta = \rho^* \partial \phi^* / \partial \theta \quad \text{at } r=a \quad (5-37)$$

$\cos \theta = \mu$ と置き代えると音響放射力の各分力は次式で表せる。

$$\langle F_r \rangle = \langle -\pi a^2 \rho \cdot \int_{-1}^{+1} (\partial \phi^* / \partial r)^2_{r=a} \mu d\mu \rangle \quad (5-38)$$

$$\langle F_\theta \rangle = \langle \pi \lambda^2 \rho \cdot \int_{-1}^{+1} (\partial \phi^* / \partial \mu)^2_{r=a} \mu (1-\mu^2) d\mu \rangle \quad (5-39)$$

$$\langle F_{r,\theta} \rangle = \langle -2\pi a \lambda \rho \cdot \int_{-1}^{+1} (\partial \phi^* / \partial r)_{r=a} (\partial \phi^* / \partial \mu)_{r=a} (1-\mu^2) d\mu \rangle \quad (5-40)$$

$$\langle F_\phi \rangle = \langle -\pi a^2 \lambda^2 / c^2 \cdot \rho \cdot \int_{-1}^{+1} (\dot{\phi}^*)^2_{r=a} \mu d\mu \rangle \quad (5-41)$$

式(5-22)、(5-23)及び(5-32)で得られた解を次のように実部のみで書き表すと便利である。

$$\operatorname{Re}(\phi^*)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) M_m P_m(\cos \theta) \quad (5-42)$$

$$\operatorname{Re}(\partial \phi^* / \partial r)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) K_m P_m(\cos \theta) \quad (5-43)$$

または、

$$M_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Exp}(i \omega_n t) (-i)^m B_m J_m(k_n^* r) \right] \quad (5-44)$$

$$K_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Exp}(i \omega_n t) (-i)^m B_m k_n^* J_m'(k_n^* r) \right] \quad (5-45)$$

式(5-42)及び(5-43)を式(5-38)、(5-39)、(5-40)及び(5-41)に代入すると、 M_m 及び K_m の項として音響放射力を表せる。

$$\langle F \rangle = \langle F_r \rangle + \langle F_\theta \rangle + \langle F_{r,\theta} \rangle + \langle F_\phi \rangle \quad (5-46)$$

次の条件は小さな液球にはたらく音響放射力に適用される。

$$(ka)^2, (k^*a)^2 \ll 1, \quad \lambda = \rho^* / \rho_0 \gg 1$$

高次のベッセル関数を考えると、上記の条件より、 $m > 3$ の M_m と K_m は無視できるから、

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_n b_m [-2\pi \rho_0 \{2a^2(1+2\lambda) \langle K_0 K_1 \rangle + 4a^2(\lambda-1) \langle K_1 K_2 \rangle \\ & + 2k_n k_m a^2 \lambda^2 \langle M_0 M_1 \rangle + 12\lambda(1-\lambda) \langle M_1 M_2 \rangle\}] \end{aligned} \quad (5-47)$$

平面定在波では、

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_n b_m 4\pi \rho_0 k_n^2 k_m a^3 \sin(2k_n h) F(\lambda, \sigma) \quad (5-48)$$

ここで、

$$F(\lambda, \sigma) = [\lambda + 2(\lambda - 1)/3]/(1 + 2\lambda) - 1/3 \lambda \sigma^2 \quad (5-49)$$

及び

$$\sigma = c^*/c = k/k^*$$

定在波の基本周波数用に(5-48)式を書き直すと、

$$\langle F \rangle = 8k_1 a_0 \cdot a/a_0 \cdot \bar{E} \sin(2k_1 h) F(\lambda, \sigma) \pi a^2 \quad (5-50)$$

ここで、

$$\bar{E} = \rho_0 b_1^2 k_1^2 / 2 = p_1^2 / \rho_0 c^2 \quad (5-51)$$

ただし、 \bar{E} は定在音場における平均エネルギー密度を表す。

式(4-3)及び(4-12)を参照して(5-49)式を書き直すと

$$\langle F \rangle = 8 a/a_0 \cdot \bar{p} \sin(2k_1 h) \cdot \pi a^2 \quad (5-52)$$

したがって、変形状液球の近傍の共鳴音響放射圧力 \hat{p} は次のように書くことができる。

$$\hat{p} = 8 a/a_0 \cdot \bar{p} \quad (5-53)$$

式(4-22) から、

$\Pi < 3$ では

$$a/a_0 \sim 1 + \Pi/9 \quad (5-54)$$

したがって、

$$\hat{p} = 8 (1 + \Pi/9) \bar{p} \quad (5-55)$$

$\Pi > 3$ では、(4-24)式から

$$a_0/a = 3/\Pi - (3/\Pi)^4 + 2(3/\Pi)^7 + \dots$$

したがって、

$$\hat{p} = 8/3 \cdot \Pi [1 + (3/\Pi)^3] \bar{p} \quad (5-56)$$

液滴の定在波音響放射圧による変形に関する修正された近似解は次に示される。

$\Pi < 3$ では

$$b/a \sim 1 - 8/3 \cdot \Pi + 56/27 \cdot \Pi^2 + \dots \quad (5-57)$$

$\Pi > 3$ では

$$b/a \sim 1.42/\Pi^3 - 121.4/\Pi^6 + 4088/\Pi^9 + \dots \quad (5-58)$$

2.6 平面定在波中に浮かぶ液膜の挙動

平面定在波に浮かぶ液滴は、定在波の音響強度が上がるにしたがって変形度を増すことは前節で述べた。この場合、定在波の強度がより上がると変形度はますます進み、最後には液膜を形成する。自然界には端が自由運動をするような無拘束液膜は存在しない。本節では、自由端液膜の表面張力に起因する波の運動と平面定在波との干渉に関する解析的研究結果について述べる。

図2-4は定在音波中の液膜の面素を示す。ここで、 $y(x, z, t)$ は液膜の縦方向の変位、 $\delta(x, z)$ は液膜の厚さを表す。解析を簡単化するために、薄膜は極めて薄く、液膜の剛性は無視することができ、完全弾性体で、液膜内部の減衰項は無視できて、液膜の上下運動は小振幅で振動しているものと仮定する。液膜の波動方程式は次式で表わされる。

$$\partial^2 y / \partial t^2 = C^{*2} \nabla^2 y - \bar{p} / \rho^* \delta \cdot \sin(2k_0 y) \quad (6-1)$$

ここで、 ρ^* は液膜の密度、 C^* は進行波の速度であり次式で表される。

$$C^* = 2T / \rho^* \delta(x, z) \quad (6-2)$$

ただし、 T は液体の表面張力である。

Sin-Gordon 方程式

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - \partial^2 \phi / \partial t^2 = \sin \phi \quad (6-3)$$

は次式で表されるソリトン（孤立波）解をもつことは知られている。

$$\phi = 4 \text{ Arc Tan } [\text{Exp} \pm \{(x-bt)/\sqrt{1-b^2}\}] \quad (6-4)$$

ここで、 b は任意定数。

式(6-1)と Sin-Gordon 方程式の相似性から、式(6-1)は次に示す相似なソリトン解をもつ。

$$y = 2/k_0 \cdot \text{Arc Tan } [\text{Exp} \pm \{(Ax-b\omega t)/\sqrt{1-b^2}\}] \quad (6-5)$$

ここで、

$$\omega^2 = \bar{p}/2k_0 \rho^* \delta \quad (6-6)$$

及び

$$A^2 = (\omega/C^*)^2 \quad (6-7)$$

ただし、 \bar{p} は(4-3)式で定義されている。

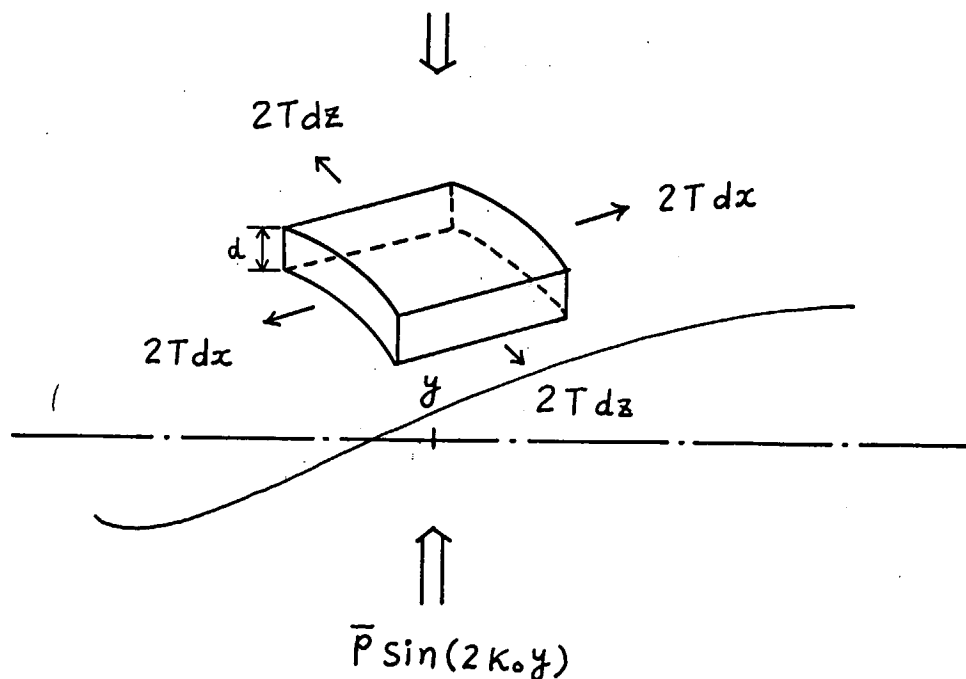


図 2-4 液膜要素の振動

3. 実験

本節では、宇宙実験の予備実験として行われた一連の地上実験と 1992 年 9 月に行われたスペースシャトル利用宇宙実験 [M-15:LDF, Liquid Drop Facility, STS 47] の結果について述べる。宇宙実験を準備するために著者等は実験室内において多様な実験を行ってきたのみならず、航空機の弾道飛行を利用する短秒時の低重力環境利用実験を行った。宇宙実験[M-15]は STS 47 で行われた。地上実験及び宇宙実験の結果は2.5節で述べた理論解析の結果と比較する。

3.1 地上実験

著者等は本宇宙実験の準備として、まず音響ドライバーの共鳴特性を調べることから始めた。市販されている各社の高出力音響ドライバーの共鳴特性を、図 3-1に示す実験装置で測定した。実験装置は一軸共鳴用円筒、音響ドライバーから単純波を共鳴用円筒へ誘導する音響案内内部、音響ドライバー、共鳴円筒内の音場を測定するマイクロホン、マイクロホンの位置を円筒軸に沿って動かすトラバース機構及びマイクロホン位置を精度良く読み取る装置から成る。本装置によって、音響案内内部設計の共鳴特性へ与える影響を、特別な注意を払って調べた¹⁾。

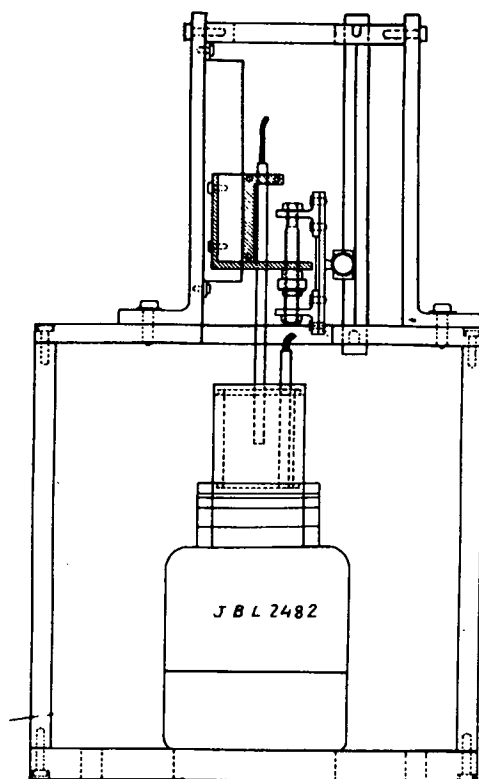


図 3-1 音響ドライバーの共鳴特性測定装置

上で述べた共鳴特性の測定実験をもとに、パイオニア社製 ED-915 EXCLUSIVE 音響ドライバーを利用した三軸共鳴チャンバーを地上実験用に設計試作した³⁾。地上実験用共鳴チャンバーは重力に抗してサンプルを浮揚しなければならない。そのため Z 軸（重力の方向）の共鳴長さは、当音響ドライバーの予備実験値の中で最も効率の良かった 125 mm とした。水平面上の二つの直交軸である X 及び Y 軸は、音響による回転トルク発生のためにも用いられるので、X Y 二軸間の位相を制御し易くするため X Y 軸の寸法は共に等しくした。また、Z 軸及び X-Y 軸間の音響的な干渉を避けるため X 及び Y 軸の共鳴長さを Z 軸よりも少し短くした。

試作した三軸共鳴チャンバーを用いて発泡スチロールを浮揚させる実験を行った。浮揚サンプルとしては発泡スチロールの球（5～30 mmφ）及び円板（30 mmφ x 0.5 mm（厚さ））を試みた。発泡スチロールを用いた地上実験用三軸共鳴チャンバーの浮揚実験では、サンプルの安定保持の獲得を最も重視した。地上実験においては音波共鳴条件が設定されるまではサンプルは重力のために下部に存在するが、共鳴条件が設定されるとサンプルが速度波の節に保持される。このときサンプル保持の前と後では共鳴条件は微小ではあるが変化する。この微小変化を調整して共鳴条件を維持することが安定保持に関して重要な役割をすることを見いだした。さまざまな形状及びサイズのサンプルについて安定浮揚させるシーケンス制御に関する知識を得た。また、サンプルに対する音響放射力を測定した。X 軸及び Y 軸間の位相を変化させることで発生する回転トルクも発泡スチロール球を用いて測定した。これらのデータは宇宙実験用エンジニアリングモデルの設計に役立てられた。

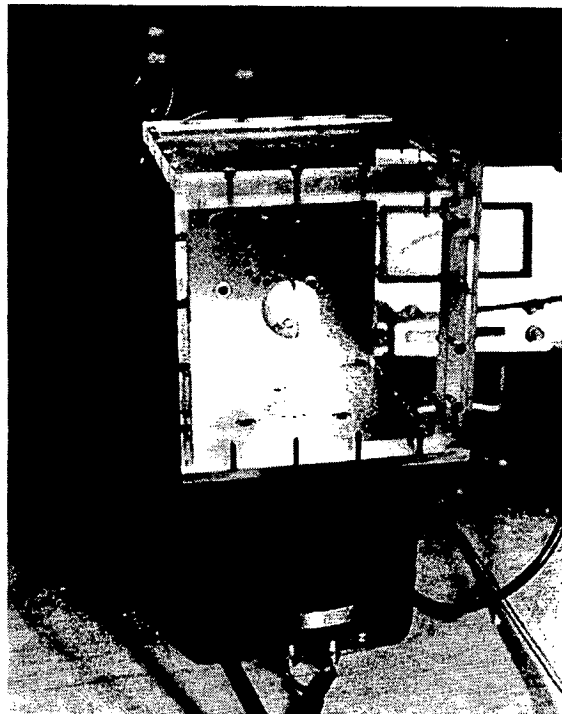


図3-2 発泡スチロール球を浮揚している三軸共鳴チャンバ

宇宙実験用三軸音波共鳴装置は搭乗科学者（PS）による手動と制御用搭載計算機によるプログラム制御を併用するシステムであった。著者等の宇宙実験〔M-15〕が行われたFMPT（ふわっと'92）では多くの宇宙実験が予定されており、〔M-15〕に割り当てられる搭乗員による実験装置の操作の時間は制限されると予測された。また、宇宙実験用搭載計算機のプログラム容量は極めて小さいと予測されていたので（最終的な仕様はCPUがインテル8086、プログラムの記述言語はアセンブラー、実験制御用データに供せられるメモリーが300バイト）、可能な限り単純化したシーケンシアル・プログラム制御が可能なアルゴリズムを開発することが急務であった。図3-3はそのような制御用アルゴリズムを開発するための実験システムのブロックダイアグラムを示す。また、三軸共鳴チャンバーの中心に液滴をつくるための注入システム及びテレビカメラの映像データを読むためのイメージプロセッシングシステムが三軸共鳴チャンバーに取り付けられた。

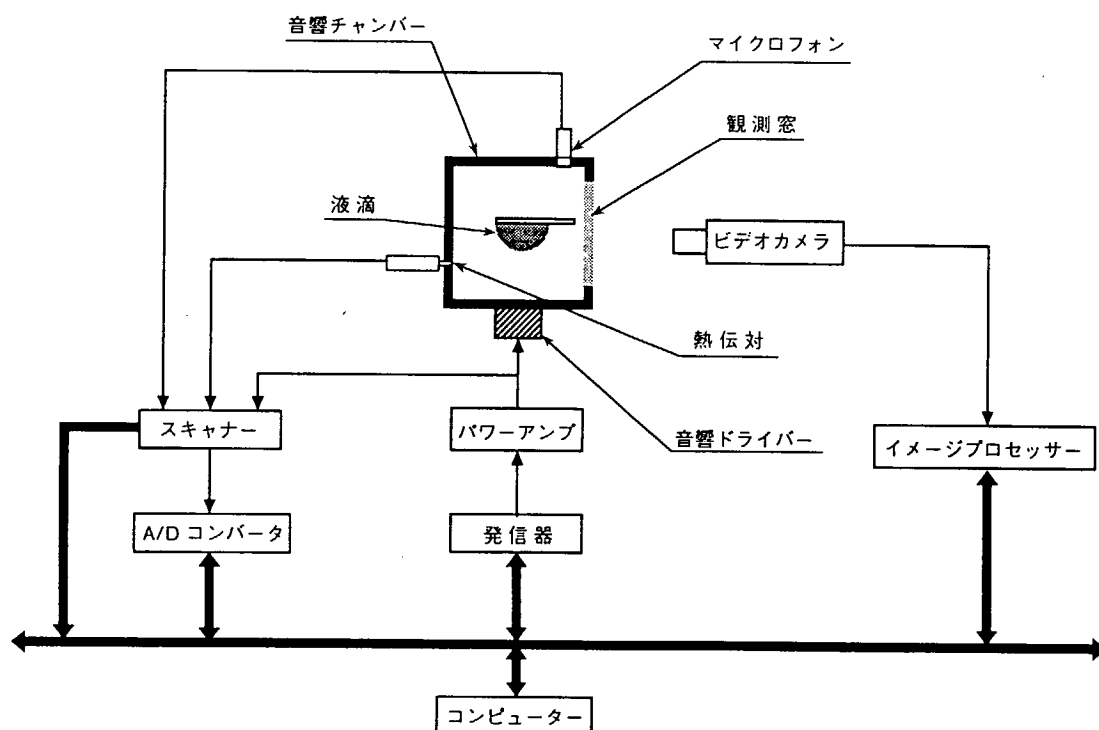


図3-3 実験システムのブロックダイアグラム

計算機（HP-9836）が正弦波発生器の音響ドライバーへの入力周波数を掃引することにより共鳴チャンバーの共鳴条件を探す。共鳴条件はチャンバーの共鳴反射板の上に取り付けられたマイクロホンが最大音圧を示す場合とした。共鳴周波数が決まると、共鳴チャンバー内の音圧を定められたレベルまで上昇させる。イメージプロセッサー

は A/D 変換器を通して共鳴チャンバー内の映像データを読み込み、フロッピーディスクに記録する。この地上実験装置で開発した制御プログラムは、最初の実験用共鳴条件の設定からスタートして、音響ドライバーへの入力レベルの設定及びテレビ画像の記録までを1サイクルとして、16サイクルの入力レベルに対して一連の記録を行えるようにつくられた。

イメージプロセッサ（柏木研究所 NEXUS 6400; 512 x 480 ドット）はテレビ画像から 128 x 120 ドットの特定の映像を取り出し、16 サイクル分の画像を一組として編集した後、フロッピーディスクに書き込む。

この実験装置を用いて、一連の実験を行った。音響放射圧による液滴の変形はイメージプロセッサにより観測されたが、全ての操作は HP-9836 のプログラムにしたがって行われた。地上実験では地球の重力に抗して液滴を浮揚することはできないため、液滴の変形実験は小液滴を注射針の先端に付着させた状態で行った。図3-4は NEXUS による編集済みの映像の一例を示す。測定された液滴の変形は著者等の理論解析と比較した（図 3-14 参照）。

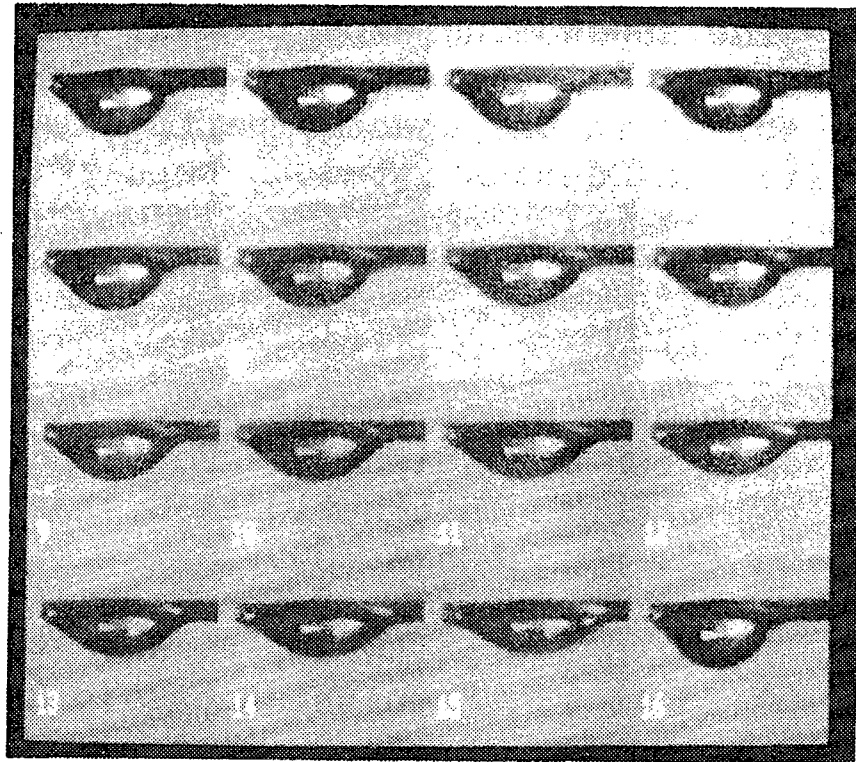


図 3-4 NEXUS による編集された画像

著者等が本研究を始めたのはスペースシャトル実験を行うためであった。しかし、1986 年のチャレンジャーの事故も介在して、宇宙実験は何年も遅れる結果となった。宇宙実験を待つ間に、著者等は地上でより大きいサイズの液滴の浮揚を試みた。音響放射圧を表す(4-3)及び(4-4)式から容易に分るように、音響浮揚力は関数 $F(\rho_0/\rho)$

に依存する。このことは、もし液滴と媒質の密度差が小さければ浮揚力はより大きくなると言うことを意味する。

最初に試みたのは中心部に粒子速度エネルギーが集中する、球型の音響共鳴器を加圧チャンバー内に入れ、共鳴器内の圧力を加圧チャンバー内の圧力と等しくした。圧力を 1 M パスカル に上げると、直径で ミリメートル オーダーのシリコン液滴を球型共鳴器の中心に安定的に浮揚することができた¹⁵⁾。加圧チャンバー内での球形共鳴器で得られた結果は、著者等の音波浮揚理論を十分に裏付けるものではあったが、液滴注入システムを当初から浮揚液滴のサイズを測定できるように設計されていなかったことと、浮揚液滴が重力場と方向性音場により著しく変形していたために、液滴挙動に関する力学的なデータは得られなかった。図 3-5 に実験装置の概略図を示す。

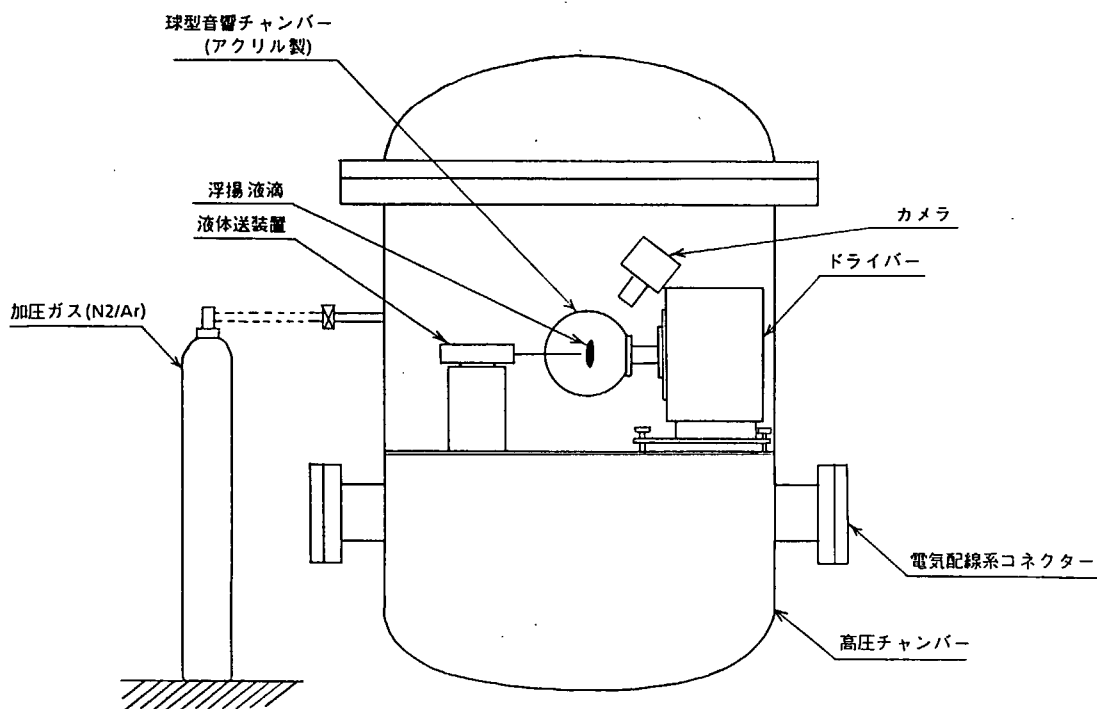


図 3-5 圧力チャンバー中の球形共鳴器実験装置

地上においても液滴挙動の力学的データを観測できる実験を行うために、新しく超音波共鳴器も試作した。図3-6は実験装置の概念図を示す。装置は三対のランジュバン型超音波振動子と反射板から成り、大気中でフリーとした。すなわち、オープンエアタイプの三軸共鳴器である。三つの振動子は各々直交して反射板と共にセットされている。振動子の駆動周波数はおよそ 18 kHzである。

試作された超音波共鳴器は地上 1 g 下で直径 4.2 mm の水またはグリセリンの液滴を浮揚することができた。図3-7は超音波共鳴波で変形した液滴を示す。測定された変形量と音響強度との関係は図 3-14 に理論値との比較として示した。

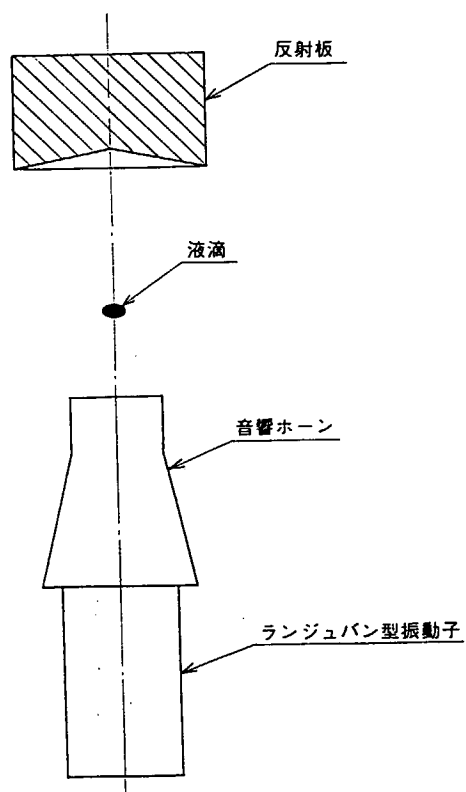
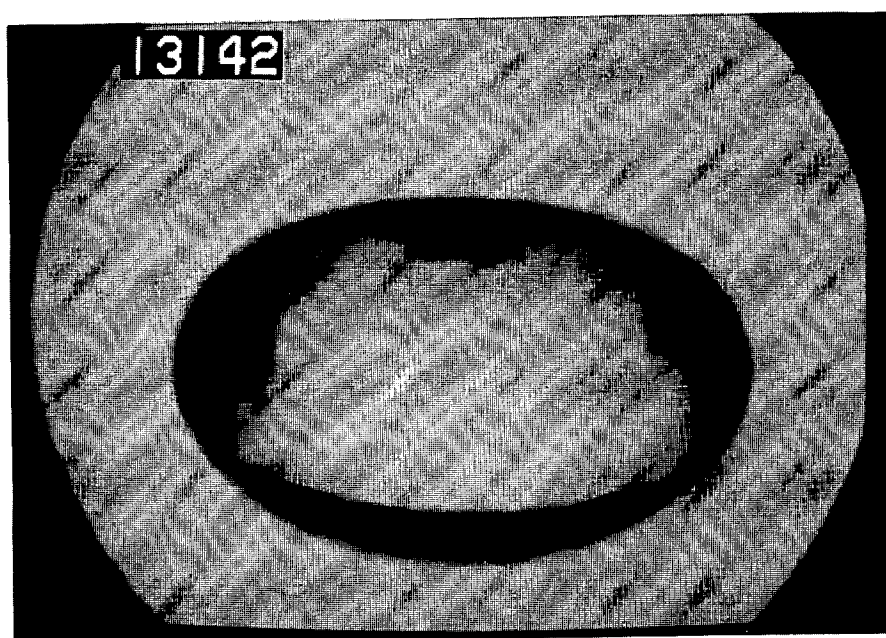


図 3-6 超音波共鳴器の原理図



液滴の大きさ：直径 4.2 mm $P_z = 155 \text{ dB}$

図 3-7 超音波共鳴器で浮揚された水滴の写真

3.2 航空機の弾道飛行による低重力実験

著者等は、本宇宙実験の鍵となる問題は三軸共鳴チャンバー内において液滴注入針から指定の大きさの液滴をうまく切り離すことにある、と考えていた。この液滴切り離し実験は地上実験では行うことができない。そこで航空機の弾道飛行により低重力環境を利用する液滴切り離し実験を行うことを計画した。使用した航空機は三菱重工の MU-300（現在は三菱ダイヤモンドサービス社が運行）で、定員9名のビジネスジェットである。客席から7名分の座席を外し、実験装置を設置するための空間を確保した。

数回の MU-300 の弾道飛行により、宇宙実験用プレエンジニアリングモデルの三軸共鳴チャンバー中心に予定のサイズの液滴を低重力環境で共鳴音波のみで確保するための液滴注射針の動かしかたに関するデータを得た。航空機実験で得られた結果として、液滴をつくった後の注射針の最適後退速度と液滴のサイズとの間には深い関係があることが分った。これらのデータは本宇宙実験の操作マニュアルに反映された。

3.3 宇宙実験

宇宙実験は、液滴サイズ、安定保持後の音響強度、回転実験用位相制御プログラム等各種のパラメータを変化させて、液滴分離後は順次自動で行われることになっていた。著者等はスペースシャトル・スペースラブの微小重力環境下で、異なるパラメータにおける液滴挙動の力学運動に伴うさまざまな現象を観察することを期待していた。予定の大きさの液滴を共鳴チャンバーの中央において共鳴音響により安定的に保持するという事は、その後に続く一連の実験を行うための最も重要な最初のステップであった。この第一段階で、液滴の注入針からの切り離しが不幸にも失敗してしまった。しかし、実験開始の極めて短い時間内で、注射針についたままで音圧を受けて変形する液滴の映像データは得られた。得られた液滴はもっとも大きいサイズ（真球換算で直径19 mm）のうちの一つであった。実験データは地上実験のデータと併せて著者等が導いた理論との比較を行った。

3.3.1 実験装置

宇宙実験用の実験装置は三軸共鳴チャンバー、液滴注入システム、実験系制御装置及びビデオ記録装置から成る。図 3-8 は実験装置の概要を示す。

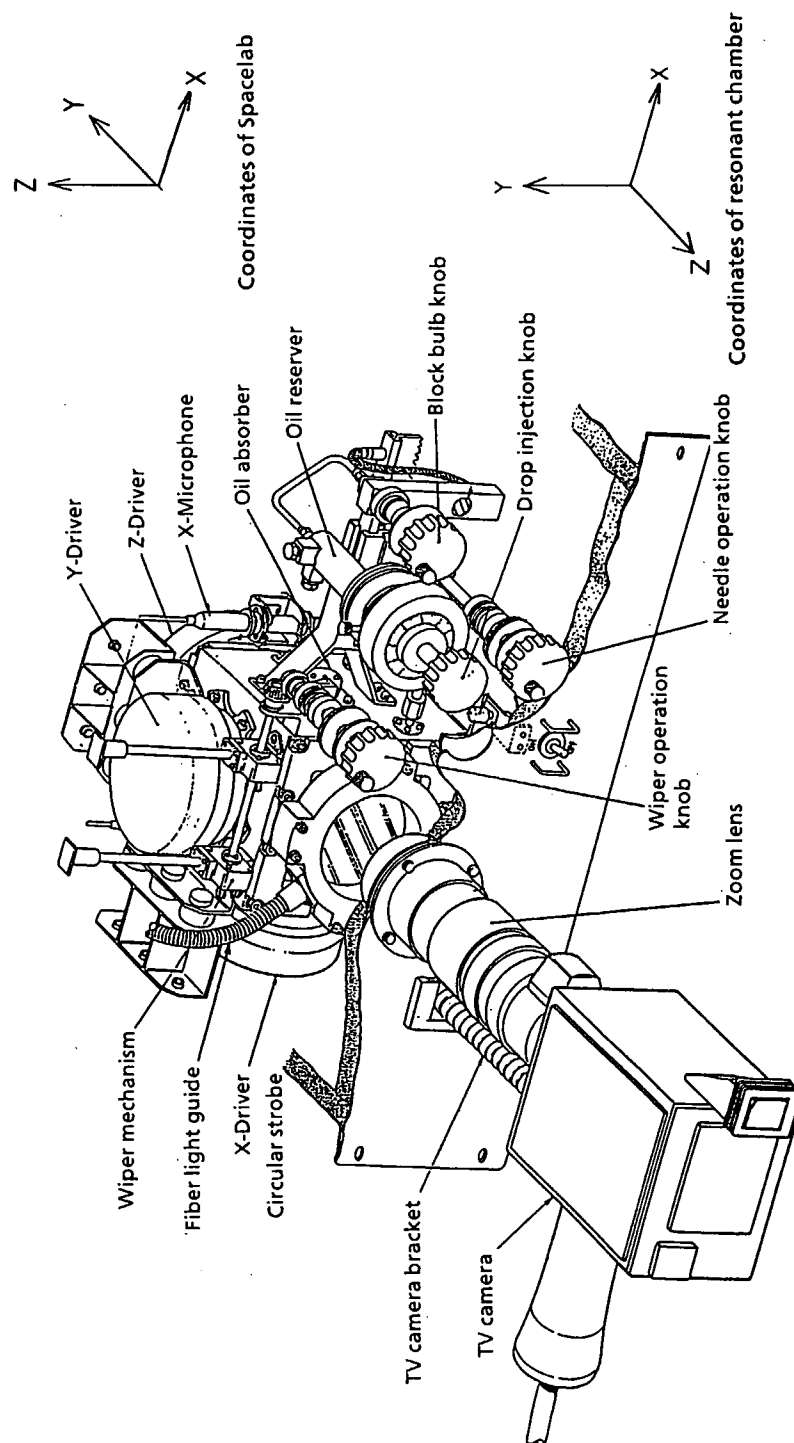


図3-8 搭載型液滴実験装置の概略図

(a) 共鳴チャンバ

音響チャンバの形状は 100 (X 軸) × 100 (Y 軸) × 110 (Z 軸) の直方体で、チャンバ側板は板厚 15 mm のアルミ合金である。装置の座標とスペーススラブの座標の関係は図 3-8 に示すとおりである。音響ドライバーはチャンバの三軸方向の壁面に取り付けられており、チャンバ内に音響定在波をつくるため、ドライバーからの音波は壁面にあけられた小孔 (音源孔) を通して音響的にチャンバに結合されている。音源孔の数は 12 個で円周上に等分に配置されている。

音響ドライバーは宇宙実験用に新たらしく設計したもので、振動ダイアフラムはパイオニア ED-915 に用いられているもの (直径 48 mm, ベリリウム製) を採用した。ダイアフラムから音源孔までの音響通路部における共鳴チャンバへの共鳴高性能化、小型化、軽量化に特別の注意が払われた。宇宙実験用の音響ドライバーは、元の市販音響ドライバーであるパイオニア製 ED-915 と比べて、体積で 1/3、重量で 1/4 となった。

Z 軸ドライバーの取り付け面と対面する壁には透明強化ガラスの観測窓を取り付け、そこを通して照明を与えると同時にテレビカメラで液滴の挙動を観測できるようにした。またチャンバには、音圧測定用として 1/4 インチのマイクロフォンが 2 個、温度測定用として熱電対が 2 個、それぞれチャンバ内壁に取り付けてあり、これらは共鳴チャンバ内の音圧レベルを制御したり、共鳴周波数を求めたりするのに用いられる。

(b) 液滴注入装置

液滴注入装置は決められた大きさの液滴をチャンバ中央につくるためのもので、注入針、液体供給機構及び注入針駆動機構より成る。注入針を駆動機構により共鳴チャンバの中心に送り出した後、液体供給機構により一定サイズの液滴を針先につくり、次に駆動機構を介して注入針を急速に後退させることにより切り離しを行う。すなわち液滴と針との付着力を、液滴の慣性質量を利用して針を引き抜くのである。これらの操作は全て操作パネル上のノブを搭乗科学者が操作することによって行われる。

実験に用いられた液体は Mobil AERO HFD (MIL-H-606E) で、その仕様は表 1 に示す。

表 1 宇宙実験に用いたオイルの仕様

名称：	Mobil AERO HFD (MIL-H-606E)
比重：	@ 288/277 K 0.8597
粘度：	@ 233 K 432 cSt
	@ 313 K 14.3 cSt
	@ 373 K 5.2 cSt
体積膨張係数：	0.78×10^{-3}
体積弾性率：	1.34 G Newton/m ²
表面張力：	@ 293 K 27.1×10^{-3} Newton/m ²

宇宙実験では直径で 23 mm、19 mm 及び 10 mm の液滴を使った実験が予定されていた。これらの液滴の体積はそれぞれ 6.3、3.6 及び 0.5 cc である。

(c) ビデオシステム

使用したテレビカメラは CCD カメラで、実験ラックに固定されている。可搬式小型カメラもビデオレコード共に装備されており、小型の白黒ディスプレイで搭乗科学者が共鳴チャンバーの内側をモニターするために使われる。

照明にはテレビカメラと同期したストロボ光源を用いた。これは、ストロボの発光時間がテレビカメラのシャッター速度と比べてきわめて短いこと、及び他の照明光と比べて発熱が少なく共鳴チャンバー内の音響媒体温度に対する影響が少ないためである。もし実験中に音響媒体の温度が上がると、共鳴周波数は変動し、共鳴状態を維持することが困難になるおそれがあった。

実験中に液滴が何等かの原因で分裂し、その一部が観測窓を汚してしまうときのために窓拭き用ワイパーを取り付けた。ワイパーは必要なときに搭乗科学者によってフロントパネル上のノブを介して操作される。

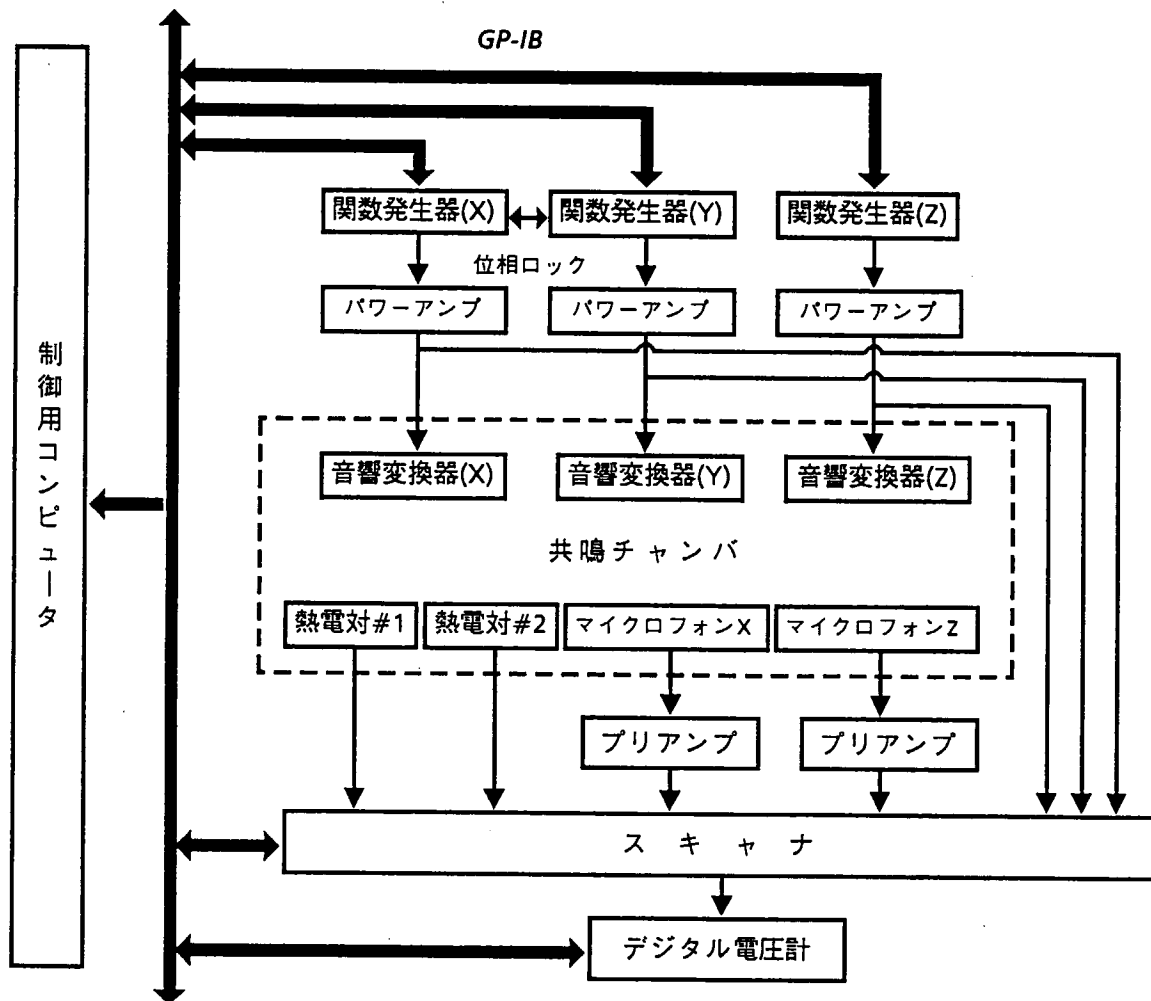


図 3-9 制御装置のブロックダイアグラム

(d) 制御装置及び操作

実験の制御装置は FMPT の特殊実験用制御装置 (SECE) に統合されている。図. 3-9 は著者等の行った地上実験で用いた制御装置のブロックダイアグラムである。宇宙実験に搭載された制御装置は宇宙開発事業団が SECE の一環として製作したが、三軸音波共鳴実験 [M-15] の制御機能は地上実験用制御装置と同一である。

SECEに使われているCPUはIntel 8086で、LDF(Liquid Drop Facility; M-15 専用実験装置) に割り当てられたメモリーは300バイト、実験制御プログラムの記述言語はアセンブリ言語である。図. 3-10 及び 3-11 はそれぞれ実験操作及び制御モードのブロックダイアグラムである。実験の基本的な手順はコンピューターとクルーによるイベントコントロールである。共鳴条件の制御はコンピューターにより閉ループのアルゴリズムで自動的に行われる。

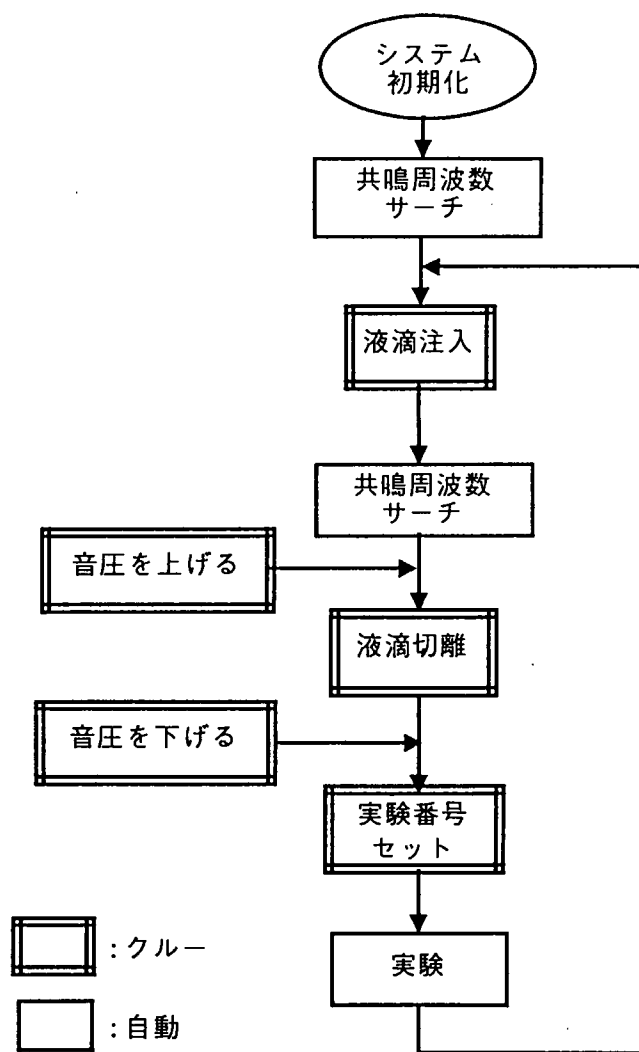


図3-10 実験手順のブロックダイアグラム

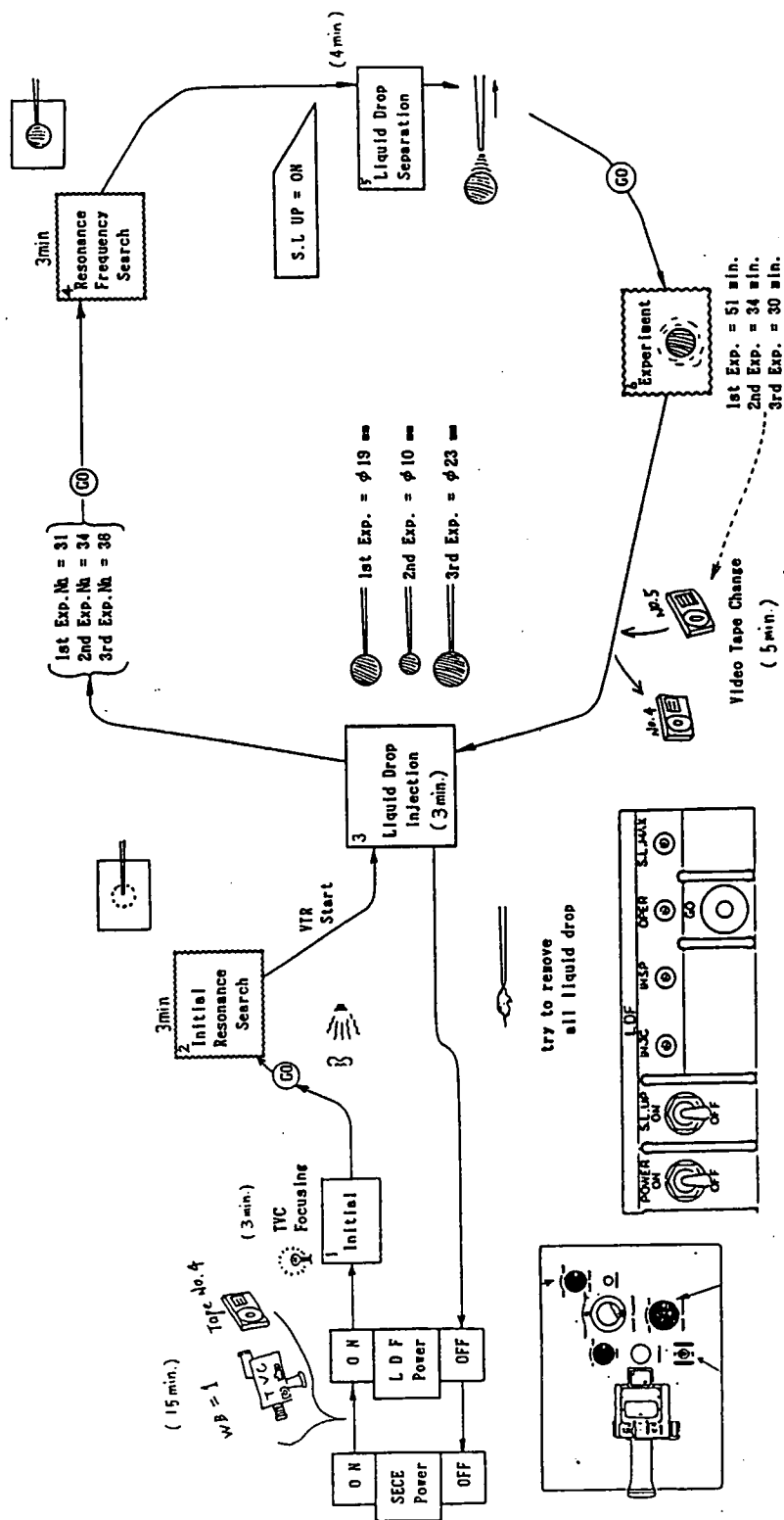


図3-11 実験モードの手順を示す図

(e) 実験結果

著者等の実験 [M-15, LDF] は、LDF が組込まれていたラックの別の装置に関連する水漏れ修理のため、当初のタイムラインがリスケジュールされ、MET (Mission Elapsed Time) 02/10:16 に開始された。[M-15; LDF] では、液滴の挙動と共鳴音場との干渉を観測する一連の実験が図 3-11 の手順にしたがって実行される予定であった。しかしながら、実験の初期の段階で、液滴を注入針から切り離す前に音圧が上がり過ぎて液滴が分裂してしまった。分裂した液滴の一部が共鳴チャンバの Y 軸用の音源孔を被うかたちで付着してしまった。そのため三軸のうち、Y 軸方向に所定の定在波をつくることができなくなった。

しかし、音響放射圧による液滴の変形実験に関しては、地上実験では不可能な大きなサイズの液滴についての変形と音圧の間のデータが得られた。

実験の第一段階では、共鳴チャンバーの中心で注入針の先端に定められた大きさの液滴をつくる場所までは順調に進んだ。次に三軸方向の共鳴周波数を求めた後、保持力を大きくすることにより液滴の切り離しを容易にするため、x 及び y 方向の音圧を上げたところ予定していた値よりも音圧が高くなってしまった。このため液滴に激しい振動が起これ液滴は大きく変形した。結果的には液滴は注入針を後退させて切り離す前にいくつか分裂してしまった。その後、液滴を切り離しても保持されず分裂の際に何らかの不具合が発生したことが推測された。POCC (Payload Operation Control Center) でダウンリンクされた映像及びデータをもとに原因を調べた結果、分裂した液滴の一部が Y 軸音響ドライバーの音の出口に付着し、共鳴チャンバーへの音源孔を塞ぐかたちで覆っていたため、Y 軸方向にのみ予定していた定在波がたたなくなっていることが分った。

安全性及び設計空間の問題から、スペースシャトルの軌道上では搭乗科学者が共鳴チャンバーの内側へアクセスして、内部に付着する液体等の除去作業等を行うことは、観測窓の表面以外へは、不可能な設計になっていたこと、また手動で音圧や周波数を操作する機能もなかったことから、対策として予定されていた実験ルーチンの中でもっとも高い音圧を出すルーチンを何度か空運転してオイルを吹き飛ばすことを試みた。その結果をダウンリンク TV で見る限り Y 軸音源孔を覆っていたオイルは消失したが、X-Y 軸の音圧は液滴の分裂前と比べて依然として低いままであった。

液滴の分裂後、液滴を共鳴チャンバーで浮揚させることは困難となったものの、音圧を受けて変形する液滴のデータは幾種類か得ることができた。それらのデータはいずれも液滴が針先に付着したままのものではあるが、地上と違い注入針の影響は無視できる程度に液滴のサイズが大きいこと、分裂事故の後もチャンバー内の音圧、温度の測定系は正常に働いたことから、十分意義のあるものとなったことは幸いであった。図 3-12 及び図 3-13 はこのようにして得られた変形液滴の画像データである。

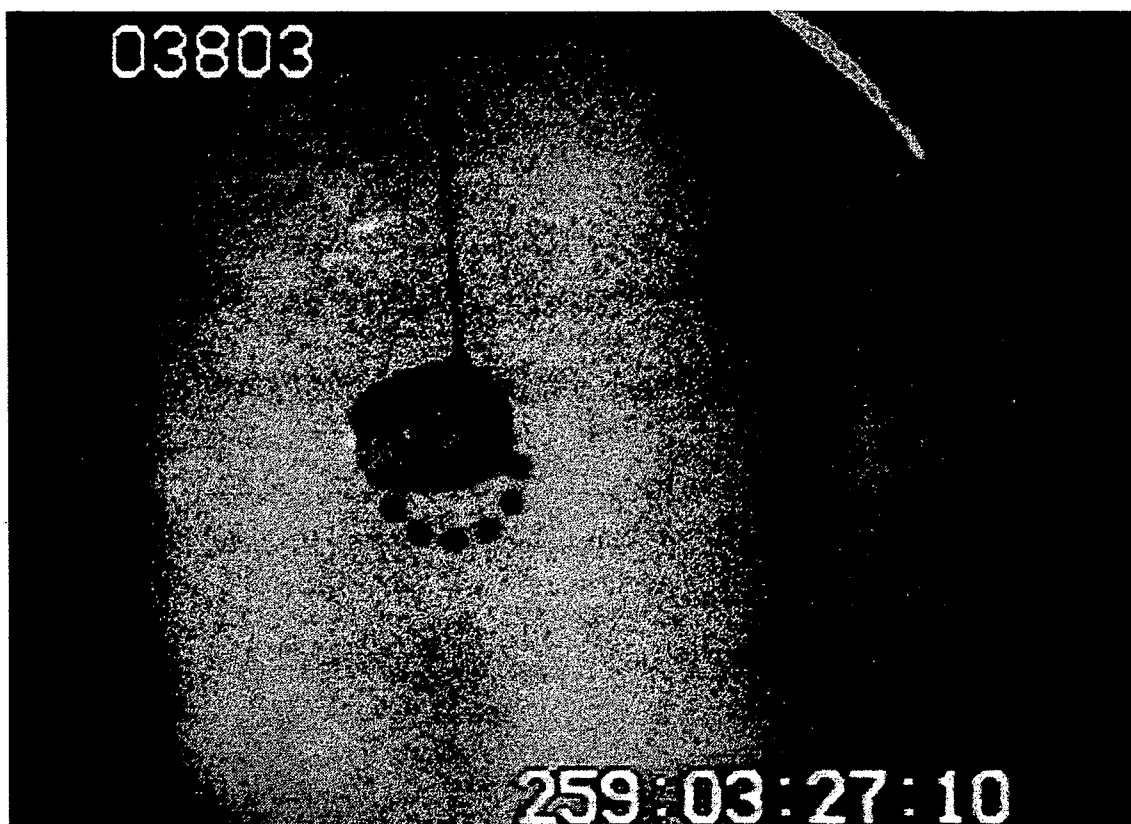


図 3-12 液滴の変形写真 (1)



図 3-13 液滴の変形写真 (2)

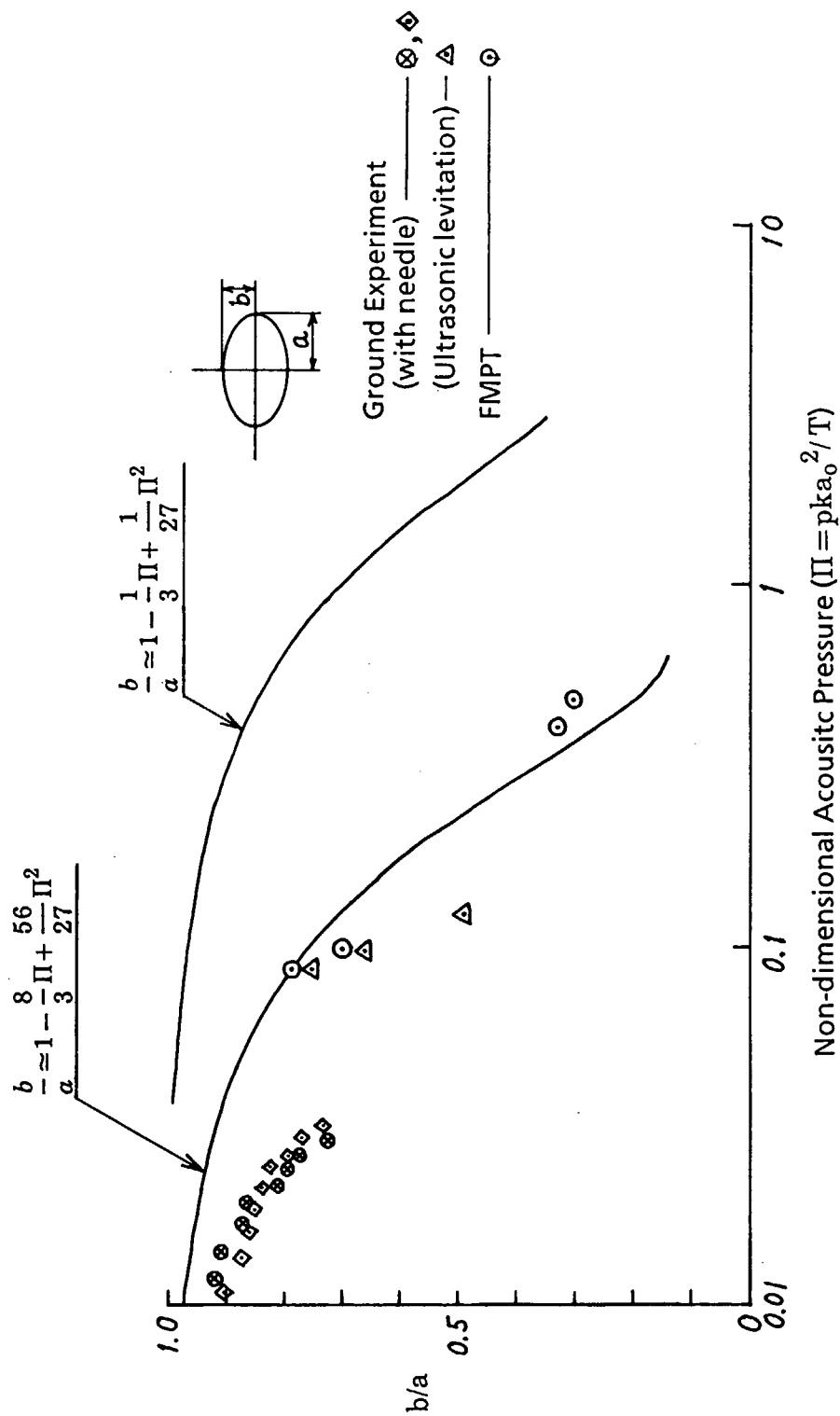


図3-14 液滴の変形

図 3-14 は液滴の変形量と著者等が 2.4 節で導いた無次元パラメータ Π との関係を示す。図 3-14 には地上実験及び宇宙実験の結果が示されている。式 (4-22)、(4-25) 及び式 (5-57), (5-58) に示した二種類の近似解も図 3-14 において実験値との比較の意味で 2 本の実線を用いて示されている。実験データと理論解析による近似解 (5-57) 及び (5-58) 式は近似解 (4-22) 及び (4-25) 式よりも実験値とよく一致していることが分る。これは式 (5-57) 及び (5-58) が変形した液滴が共鳴音場での音響放射圧に及ぼす影響を考慮しているのに対して、式 (4-22) 及び (4-25) は液滴を剛体球とみなして液滴周りの音響放射圧を求めていることによるものであろう。

4. 結論

本実験は著者等にとって初めての宇宙実験であった。著者等は液滴を注入針から無事に切り離すことが本実験の鍵であると理解していたので、この問題に関して必要なデータを得るためにあらゆる種類の地上実験及び航空機実験を行って宇宙実験に臨んだ。

スペースシャトルを利用する宇宙実験の結果は地上で想像するよりも困難が多いことが分った。なによりも、装置の操作が地上実験のそれとは異なっていた。もしも、十分な能力の搭載コンピューターの能力が使用できたならば、宇宙実験用により高級な制御プログラムを用意することができたものと思われる。しかしながら、液滴の変形に関しては、幸いにもよいデータを得ることができた。この結果は、将来宇宙において無接触の膜材料または線材料を製造する実験が試みられる場合には、有益なデータになることを著者等は確信します。

最後に、宇宙開発事業団の関係者をはじめ長年にわたって本実験のためにご協力をいただいた全ての方々に感謝を申し上げます。

5. 参考文献

1. T. Yamanaka and H. Kamimura, "Distortion of Sound Field in a Resonator", *Acta Astronautica* Vol.8, No. 5-6, pp. 675-687, 1981.
2. T. Yamanaka, H. Kamimura, et al., "Stability of a Rotating Liquid Drop in an Acoustic Resonator", IAF-81-143, The 32nd International Astronautical Federation Congress, Rome, 1981.
3. H. Kamimura and T. Yamanaka, "An Experimental Study of Tri-axial Acoustic Chamber for Weightless Positioning and Manipulating", *Proceeding of The 13th International Symposium on Space Technology and Science*, Tokyo, pp. 1685-1690, 1982.
4. T. Yamanaka and H. Kamimura, "Influence of Acoustic Fields on Drop Dynamics in an Acoustic Resonator", *Adv. Space Res. Vol. 3, No. 5, COSPAR*, pp. 155-163, 1983.
5. T. Yamanaka, M. Saito and H. Kamimura, "Deformation of Drop Due to Radiation Pressure of Acoustic Standing Wave", *Proceeding of The 14th International Symposium on Space Technology and Science*, Tokyo, pp. 1625-1630, 1984.
6. H. Lamb, "Hydrodynamics, 6th ed.", Cambridge University Press, 1932.
7. M. S. Plesset, *J. Appl. Phys.*, 25, 96, 1954.
8. C. A. Miller and L. E. Scriven, *J. Fluid Mech.*, 32, 417, 1968.
9. P. M. Morse and H. Feshbach, "Method of Theoretical Physics, Part 1", MacGraw-Hill, New York, 1953.
10. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, 4th ed.", National Bureau of Standards, Washington D. C., 1965.
11. S. Chandrasekhar, *Proc. R. Soc. London*, A286, 1, 1968.
12. R. A. Brown and L. E. Scriven, *Proc. R. Soc. London*, A371, 33, 1980.
13. T. Hasegawa and K. Yosioka, *The Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 46, No. 5 (Part 2), 1969, pp. 1139-1143.
14. T. Hasegawa, *The Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 65, No. 1, 1979, pp. 32-40.
15. H. Kamimura, et al., "On The Levitation Of A Liquid Drop In 1-g Field", *Proceedings of the 18th International Symposium on Space Technology and Science*, Kagoshima, May, 1992 (刊行予定).
16. H. Kamimura, et al., "The Low-g Flight Experiment with a Business Jet", *Proceedings of the 16th International Symposium on Space Technology and Science*, Sapporo, 1988, pp. 2381-2386.