

ISSN 0389-4010
UDC 629.7.017.2
519.654

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1150

TLS (Total Least Squares) 法を用いた
航空機の空力微係数の推定

増位和也

1992年4月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

| | |
|-----------------------------------|----|
| 1. 序 論 | 1 |
| 2. 記号及び略語 | 2 |
| 3. TLS 法の概念及び解法 | 2 |
| 3.1 TLS 法の概念 | 2 |
| 3.2 TLS 法と最小二乗法の幾何学的解釈 | 7 |
| 3.3 TLS 法の計算アルゴリズム | 7 |
| 4. TLS 法の特 性 | 8 |
| 4.1 説明変数と目的変数の計測誤差の大きさ | 9 |
| 4.2 TLS 法の解の標準偏差の近似式による推定 | 13 |
| 4.3 計測誤差の標準偏差の推定精度 | 14 |
| 4.4 モデル方程式が定数項を含む場合 | 16 |
| 5. 飛行試験データを用いた空力微係数の推定例 | 17 |
| 5.1 上下荷重係数 C_z の線形モデル化 | 17 |
| 5.2 TLS 法及び最小二乗法による空力微係数の推定 | 18 |
| 6. 結 論 | 21 |
| 参考文献 | 22 |
| 付 録 | 23 |

TLS (Total Least Squares) 法を用いた 航空機の空力微係数の推定*

増 位 和 也*¹

Estimation of Aircraft Aerodynamic Derivatives with the Total Least Squares Method*

Kazuya MASUI*¹

ABSTRACT

This report describes the Total Least Squares (TLS) method estimates unknown linear equation coefficients assuming that both the explanatory variables and the objective variable are affected by measurement errors. This method is one of the generalizations of the conventionally used least squares (LS) method. The concept, algorithm, and characteristics of the TLS method are compared with those of the LS method. It is shown that the TLS method gives the unbiased coefficients and the correct standard deviations of them. In addition, an example of estimating aerodynamic derivatives from flight test data is presented.

Keywords: Total Least Squares, Least Squares, Parameter Estimation, Aerodynamic Derivatives, Flight Test

概 要

目的変数が説明変数と未知係数の積で表される線形モデル方程式を考える。最小二乗法 (Least Squares method) は目的変数のみに計測誤差が含まれると仮定して未知係数を推定する手法であるが、説明変数に計測誤差が含まれる場合、最小二乗法で求めた係数はバイアス誤差を含み、係数の標準偏差は実際より小さく推定される。TLS 法 (Total Least Squares method) は、説明変数及び目的変数の双方に計測誤差が含まれると仮定して、未知係数を求める手法である。TLS 法は最小二乗法を一般化したものといえる。TLS 法によって推定された係数はバイアス誤差を含まず、係数の標準偏差も正しく推定される。

本報告書では、まず、TLS 法の内容、計算アルゴリズム及び特性を示し、最小二乗法と比較する。次に、飛行試験データからの TLS 法による空力微係数の推定例を示す。

1. 序 論

航空機の性能計算、操縦及び突風応答特性の検討、制御系の設計等において航空機に働く空気力を知ることは必要不可欠であり、空気力のモデル

方程式が重要な役割を果たす。空気力のモデル方程式には、速度、迎角、舵角等 (説明変数) の変化によって生じる空気力 (目的変数) の変化を表す空力微係数が未知係数として含まれている。空力微係数は、設計開発段階では機体形状等からの理論計算又は風洞試験データから推定され、試作機の完成後は飛行試験によって検証及び改訂され

* 平成 4 年 3 月 6 日受付 (received 6 March 1992)

*¹ 飛行実験部 (Flight Research Division)

るのが通常の手順である。本報告書では、空気力の線形モデル方程式に含まれる空力微係数を飛行試験データより推定する手法について述べる。

線形モデル方程式の未知係数を推定するために従来からよく用いられる手法の一つとして、最小二乗法 (Least Squares method)¹⁾が挙げられる。最小二乗法は目的変数のみに計測誤差が含まれると仮定して未知係数を推定する方法で、他の手法と比べて計算が簡単で原則として必ず解が得られるという利点がある。しかし、説明変数に計測誤差が含まれる場合には係数の推定結果にバイアス誤差を含み、係数のばらつきの標準偏差が実際より小さく推定されるという欠点がある。この欠点を克服するために提案された手法が TLS (Total Least Squares) 法^{2),3),4)}である。TLS 法は説明変数及び目的変数の双方に計測誤差が含まれると仮定して未知係数を推定する手法であり、最小二乗法を一般化したものといえる。TLS 法では説明変数に含まれる計測誤差による係数のバイアスは無く、係数のばらつきの標準偏差も正しく推定される。

飛行試験データによる空力微係数の推定では、通常、説明変数である速度、迎角、舵角等にも計測誤差が含まれる。このため、最小二乗法を用いると、空力微係数にバイアス誤差を生じ、結果のばらつきが実際よりも小さく推定される恐れがある。そこで、説明変数及び目的変数の双方の計測誤差を考慮に入れて正確に未知係数を推定することができる TLS 法の空力微係数推定への応用を試みた。

本報告書の第 2 章以降の構成は次の通りである。第 2 章では本報告書で用いられる主な記号及び略語を示す。第 3 章では TLS 法の内容、幾何学的解釈による最小二乗法との比較及び計算アルゴリズムについて述べる。第 4 章では正弦波の組み合わせによる簡単なモデルを用いた数値計算により TLS 法の内容を調べ、最小二乗法と比較する。第 5 章では飛行試験データからの空力微係数の推定例を示し、TLS 法と最小二乗法を比較する。第 6 章では TLS 法についてまとめ、航空機の空力微係数推定への応用における問題点を述べる。

2. 記号及び略語

記号

| | |
|--------------------------|-------------------------------|
| \mathbf{a} | : 未知係数ベクトル |
| A_z | : 機体 z 軸方向加速度 |
| \bar{c} | : 平均翼弦長 |
| $Cov(\)$ | : 共分散行列 |
| C_z | : 上下荷重係数 |
| $E\{ \}$ | : 期待値 |
| m | : 機体質量 |
| $mean(\)$ | : 平均値 |
| q | : ピッチ角速度 |
| $R(\)$ | : 行列に含まれる列ベクトルによって張られる空間 |
| S | : 翼面積 |
| \mathbf{u}, \mathbf{v} | : 特異ベクトル |
| V | : 真対気速度 |
| X | : 説明変数行列 |
| \mathbf{y} | : 目的変数ベクトル |
| α | : 迎角 |
| δ_e | : 昇降舵偏位角 |
| λ | : 特異値 |
| ρ | : 大気密度 |
| σ | : 標準偏差 |
| $\ \cdot \ _2$ | : 二乗ノルム |
| $\ \cdot \ _F$ | : フロベニウス・ノルム (Frobenius norm) |

添字

| | |
|-----------------|----------------|
| T | : 転置行列又は転置ベクトル |
| $\hat{\cdot}$ | : TLS 法による推定値 |
| $\tilde{\cdot}$ | : 最小二乗法による推定値 |
| 0 | : 真値 |

略語

| | |
|-----|------------------------|
| CAS | : Calibrated Air Speed |
| TAS | : True Air Speed |
| TLS | : Total Least Squares |

3. TLS 法の内容及び解法

3.1 TLS 法の内容

本節では、まず問題設定を行った後、TLS 法との比較のため従来の最小二乗法の定義及び解の導

出について簡単に述べる。次に TLS 法の定義及び解の導出について述べる。

(1) 問題設定

本報告書で扱う問題は次の通りである。

問題

目的変数 y_0 が n 個の説明変数 x_{0j} ($j=1, \dots, n$) の線形方程式で表されるシステムを考える。

$$y_0 = a_{01} x_{01} + a_{02} x_{02} + \dots + a_{0n} x_{0n} \quad (3.1)$$

x_{0j} 及び y_0 に対する m 組の計測値 x_{ij}, y_i ($i=1, \dots, m, m > n$)

$$x_{ij} = x_{0ij} + \Delta x_{ij} \quad (3.2)$$

$$y_i = y_{0i} + \Delta y_i \quad (3.3)$$

但し, x_{0ij} 及び y_{0i} は真値

Δx_{ij} 及び Δy_i は計測誤差

が与えられた時, 未知係数 a_{0j} ($j=1, \dots, n$) の値を推定する。

未知係数 a_{0j} は, a_j に対する連立方程式

$$[X|y][a^T | -1]^T = 0 \quad (3.4)$$

但し,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

の解 a によって推定される。しかし, 一般に x_{ij} 及び y_i に含まれる計測誤差のため行列 $[X|y]$ の階数 (rank) は $n+1$ となり, (3.4) 式は解を持たない⁵⁾。したがって, a を求めるためには何らかの近似を行い, $[X|y]$ の階数を n とする必要がある。

さらに, 計測誤差 $\Delta x_{ij}, \Delta y_i$ 及び計測誤差を含まない説明変数行列 X_0 (x_{0ij} を要素とする行列) について以下の仮定を行う。

仮定 1

Δx_{ij} 及び Δy_i は互いに独立であり, それぞれ平均値 0, 分散 $\sigma_v^2 \sigma_j^2$ 及び $\sigma_v^2 \sigma_{n+1}^2$ の正規分布に従う白色ノイズである。

$$E\{\Delta x_{ij}\} = 0 \quad (3.5)$$

$$E\{\Delta y_i\} = 0 \quad (3.6)$$

$$E\{\Delta x_{ij} \Delta x_{kh}\} = \sigma_v^2 \sigma_j^2 \delta_{ik} \delta_{jh} \quad (3.7)$$

$$E\{\Delta x_{ij} \Delta y_k\} = 0 \quad (3.8)$$

$$E\{\Delta y_i \Delta y_k\} = \sigma_v^2 \sigma_{n+1}^2 \delta_{ik} \quad (3.9)$$

$$i, k=1, \dots, m \quad j, h=1, \dots, n$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

但し,

$$\sigma_v^2 > 0, \sigma_j^2 > 0, \sigma_{n+1}^2 > 0$$

σ_j^2 及び σ_{n+1}^2 は既知である。

σ_v^2 は未知でもよい。

すなわち, Δx_{ij} 及び Δy_i の分散の絶対値は未知でもよいが, 互いの大きさの比は既知でなければならない。

仮定 2

$$Q = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} X_0^T X_0 \quad (3.10)$$

が存在し, Q は正定 (positive definite) である。

(2) 最小二乗法

(3.4) 式の a を求める手法として従来から広く用いられている方法は最小二乗法であり, その定義は次の通りである。

最小二乗法の定義

(3.4) 式に対する最小二乗法による解は次式を満たすベクトル \bar{a} である。

$$\bar{y} = X\bar{a} \quad (3.11)$$

但し, $y_0 = [y_{01} \dots y_{0m}]^T$ の最小二乗法による推定値 \bar{y} は, 以下の条件を満足しなければならない。

$$(1) \bar{y} \in R(X) \quad (3.12)$$

$$(2) \|\Delta \bar{y}\|_2 \equiv \|y - \bar{y}\|_2 \quad (3.13)$$

が最小である。

(3.12) 式において, $R(X)$ は行列 X に含まれる全ての列ベクトルによって張られる空間を表す。また, (3.13) 式において, $\|\cdot\|_2$ はベクトルの二乗ノ

ルム ($\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m z_i^2}$) を表す。

最小二乗法は目的変数 y にのみ計測誤差が含まれると仮定し、目的変数に対する近似誤差 $\Delta\hat{y}$ の二乗ノルムが最小となるような係数を解とする。最小二乗法の解 \hat{a} 及び y に対する近似誤差 $\Delta\hat{y}$ は

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (3.14)$$

$$\Delta\hat{y} = y - X\hat{a} \quad (3.15)$$

となる。 Δy_i の分散を σ_{n+1}^2 とすると \hat{a} の共分散行列 $Cov(\hat{a}) (=E\{\hat{a}\hat{a}^T\})$ は次式で推定される¹⁾。

$$Cov(\hat{a}) = \sigma_{n+1}^2 (X^T X)^{-1} \quad (3.16)$$

また、 \hat{a}_j の標準偏差 $\bar{\sigma}(\hat{a}_j)$ は次式で推定される。

$$\bar{\sigma}(\hat{a}_j) = \sqrt{(Cov(\hat{a}))_{jj}}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.17)$$

次に、説明変数に計測誤差が含まれる場合、最小二乗法による解にバイアス誤差が生じる理由を述べる。(3.14)式に(3.2)式及び(3.3)式を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{a} &= ((X_0 + \Delta X)^T (X_0 + \Delta X))^{-1} (X_0 + \Delta X)^T \\ &\quad \times (y_0 + \Delta y) \\ &= (X_0^T X_0 + \Delta X^T X_0 + X_0^T \Delta X + \Delta X^T \Delta X)^{-1} \\ &\quad \times (X_0^T y_0 + \Delta X^T y_0 + X_0^T \Delta y + \Delta X^T \Delta y) \end{aligned} \quad (3.18)$$

但し、 ΔX は Δx_{ij} を要素とする行列

Δy は Δy_i を要素とするベクトル

(3.18)式の両辺の期待値をとると

$$\begin{aligned} E\{\hat{a}\} &= (X_0^T X_0 + E\{\Delta X^T\} X_0 + X_0^T E\{\Delta X\} \\ &\quad + E\{\Delta X^T \Delta X\})^{-1} (X_0^T y_0 + E\{\Delta X^T\} y_0 \\ &\quad + X_0^T E\{\Delta y\} + E\{\Delta X^T \Delta y\}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。(3.19)式に(3.5)式~(3.8)式を代入して次式を得る。

$$E\{\hat{a}\} = (X_0^T X_0 + E\{\Delta X^T \Delta X\})^{-1} (X_0^T y_0) \quad (3.20)$$

X が計測誤差を含まない場合、 $E\{\Delta X^T \Delta X\} = 0$ であるので(3.20)式は次式のようになる。

$$E\{\hat{a}\} = (X_0^T X_0)^{-1} (X_0^T y_0) \quad (3.21)$$

(3.21)式の右辺は、(3.4)式において X 及び y が計測誤差を含まない場合の解、すなわち未知係数の真値 $a_0 = [a_{01}, \dots, a_{0n}]^T$ に等しい。したがって、(3.14)式による \hat{a} は正しく未知係数を推定することができる。また、(3.17)式を用いた $\bar{\sigma}(\hat{a}_j)$ の推定も正しい。しかし、 X が計測誤差を含む場合、

$$E\{\Delta X^T \Delta X\} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 \sigma_1^2 & & & & \\ & \cdot & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \sigma_v^2 \sigma_n^2 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3.22)$$

であるので \hat{a} はバイアス誤差を含み、正しい未知係数 a_0 を推定することができない。

(3) TLS 法

X 及び y の双方が計測誤差を含むと仮定して(3.4)式の a を求める手法が TLS (Total Least Squares) 法であり、その定義は次の通りである⁴⁾。

TLS 法の定義

(3.4)式に対する TLS 法による解は次式を満たすベクトル \hat{a} である。

$$\hat{y} = \hat{X}\hat{a} \quad (3.23)$$

但し、 X_0, y_0 の TLS 法による推定値 \hat{X}, \hat{y} は以下の条件を満足しなければならない。

$$(1) \hat{y} \in R(\hat{X}) \quad (3.24)$$

$$(2) \begin{aligned} &\|[\Delta\hat{X} | \Delta\hat{y}] \Sigma^{-1}\|_F = \\ &\|([X | y] - [\hat{X} | \hat{y}]) \Sigma^{-1}\|_F \end{aligned} \quad (3.25)$$

が最小である。

ここで Σ は次式によって定義される。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \cdot & & & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \sigma_n \\ & & & & & \sigma_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

(3.24)式で、 $\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウス・ノルム

(Frobenius norm, $\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij}^2}$) を表す。

ところで、 X の列ベクトルをそれぞれ x_1, \dots, x_n で表すと次式が得られる。

$$[X | y] \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n & y \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \sigma_1 & & \sigma_n & \sigma_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

(3.7)式及び(3.9)式より、 x_j ($j=1, \dots, n$), y に含まれる計測誤差の分散は $\sigma_v^2 \sigma_j^2, \sigma_v^2 \sigma_{n+1}^2$ であるの

られる。

$$[\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n]^T [\hat{\mathbf{a}}^{*T} | -1]^T = 0 \quad (3.45)$$

したがって、(3.29)式の解 $[\hat{\mathbf{a}}^{*T} | -1]^T$ は、 \mathbf{v}_j ($j=1, \dots, n$)の全てに直交し、かつ $n+1$ 成分が -1 であるベクトルである。 V は直交行列($V^T V = I_{n+1}$)であるので、 \mathbf{v}_j ($j=1, \dots, n$)の全てに直交するベクトルは \mathbf{v}_{n+1} 及びそれに平行なベクトルである。したがって、 $[\hat{\mathbf{a}}^{*T} | -1]^T$ は、 \mathbf{v}_{n+1} に平行で $n+1$ 要素が -1 であるベクトルで与えられる。

(a) $\lambda_n > \lambda_{n+1}$ の場合

$\lambda_n > \lambda_{n+1}$ の場合、(3.39)式において \mathbf{v}_{n+1} は一意に定まる。 $v_{n+1, n+1} \neq 0$ ならば、 \mathbf{v}_{n+1} の各要素を $-v_{n+1, n+1}$ で割ることによって $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}^* = -1$ とすることができる。したがって、(3.29)式の解は一意に定まり、次式で与えられる。

$$\hat{a}_j^* = -\frac{v_{j, n+1}}{v_{n+1, n+1}}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.46)$$

また、 $\hat{\mathbf{a}}^*$ の共分散行列 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}^*)$ は次式で推定される³⁾。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}^*) &= \frac{(1 + \hat{\mathbf{a}}^{*T} \hat{\mathbf{a}}^*)}{m} \\ &\times \hat{\sigma}_v^2 [\hat{\sigma}_v^2 \hat{\mathbf{Q}}^{*-1} (I_n + \hat{\mathbf{a}}^{*T} \hat{\mathbf{a}}^*)^{-1} \hat{\mathbf{Q}}^{*-1} + \hat{\mathbf{Q}}^{*-1}] \end{aligned} \quad (3.47)$$

但し、

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{\lambda_{n+1}^2}{m} \quad (3.48)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}^* = \frac{1}{m} \mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^* - \hat{\sigma}_v^2 I_n \quad (3.49)$$

$\text{Cov}([\Delta \hat{\mathbf{X}} | \Delta \hat{\mathbf{y}}])_{jj} \ll (1/m) ([\mathbf{X}_0 | \mathbf{y}_0]^T [\mathbf{X}_0 | \mathbf{y}_0])_{jj}$ ($j=1, \dots, n+1$)の場合、(3.47)式において $\hat{\sigma}_v^2$ の項を省略することができ、 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}^*)$ は次式によって近似される⁴⁾。

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}^*) = (1 + \hat{\mathbf{a}}^{*T} \hat{\mathbf{a}}^*) \hat{\sigma}_v^2 (\mathbf{X}^{*T} \mathbf{X}^* - m \hat{\sigma}_v^2 I_n)^{-1} \quad (3.50)$$

(3.31)式及び(3.35)式を(3.46)式及び(3.43)式に代入すると、TLS法による解 \hat{a}_j 、 $[\mathbf{X} | \mathbf{y}]$ に対する近似誤差 $[\Delta \hat{\mathbf{X}} | \Delta \hat{\mathbf{y}}]$ は次式で求められる。

$$\hat{a}_j = -\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_j} \frac{v_{j, n+1}}{v_{n+1, n+1}}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.51)$$

$$[\Delta \hat{\mathbf{X}} | \Delta \hat{\mathbf{y}}] = \lambda_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}^T \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.52)$$

また、 \hat{a}_j の標準偏差 $\hat{\sigma}(\hat{a}_j)$ は次式で推定される。

$$\hat{\sigma}(\hat{a}_j) = \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_j} \sqrt{(\text{Cov}(\hat{\mathbf{a}}^*))_{jj}}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.53)$$

仮定1及び仮定2が成立する場合、 $m \rightarrow \infty$ において $\hat{\mathbf{a}}$ (3.51)式)及び $\hat{\sigma}_v^2$ (3.48)式)はそれぞれ真値 \mathbf{a}_0 及び σ_v^2 に収束し、(3.53)式による $\hat{\sigma}(\hat{a}_j)$ の推定も正しいことが、参考文献3)で証明されている。

$v_{n+1, n+1} = 0$ の場合、(3.42)式の近似を用いると(3.29)式は解を持たない。この場合については参考文献4)において検討されている。通常、この場合は(3.1)式が大きなモデル化誤差を含み \mathbf{y}_0 の記述にふさわしくない場合に対応するので、モデル方程式を再検討すべきである。したがって、本報告書ではこれ以上触れない。

(b) $\lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ ($r < n$)の場合

この場合、(3.39)式において $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ は一意には定まらず、 $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ によって張られる空間と同じ空間を張ることができる任意の $n-r+1$ 個の単位ベクトルの組み合わせであればよい。したがって、(3.29)式の解 $[\hat{\mathbf{a}}^{*T} | -1]^T$ は一意には定まらない。この場合については参考文献4)において検討されている。

ところで、実際には \mathbf{X}^* に含まれる計測誤差のため、厳密に $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ ($r < n$)となることは稀である。実用上は、 $\lambda_j^2 < (1+p)\lambda_{n+1}^2$ (p は適当な正の数)を満たす λ_j ($j > r$)を λ_{n+1} と等しいと見なす⁴⁾。 $r < n$ となるのは、ノイズと見なすべき大きさの特異値が複数存在する場合である。このような現象は、 \mathbf{X}^* すなわち \mathbf{X} に含まれる幾つかの列ベクトル(説明変数)が一次従属に近い関係を持つ場合又はS/N比が極めて小さい場合に生じる。これらの場合、未知係数の推定値が互いに影響し合って不安定となる。このような場合は、航空機の空力微係数推定等の実用的な問題においては好ましくないので、一次従属に近い関係にある列の内の一つを残して他の列を除去する、全ての列が一次独立となるような計測データを追加する又はS/N比を改善することが望ましい。したがって、本報告書では $\lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ ($r < n$)の場合についてこれ以上触れない。

3.2 TLS 法と最小二乗法の幾何学的解釈

本節では TLS 法と最小二乗法の違いを直観的に理解できるように両者の幾何学的解釈を行う⁴⁾。

行列 $[X|y]$ に含まれる列ベクトルによって張られる空間を考える。簡単化のために (3.4) 式において、 $m=3, n=2$ とする。この時 (3.4) 式が計測誤差のため解を持たないということを幾何学的に解釈すると、列ベクトル x_1 と x_2 によって張られる空間 $R(X)$ (図 3.1 において斜線で示されている平面) が列ベクトル y を含まないことを意味する。

最小二乗法において変化が許されるのは y のみであるので、 $\hat{y} \in R(X)$ を満たしかつ $\|y - \hat{y}\|_2$ を最小にする \hat{y} は空間 $R(X)$ 上への y の正写影によって与えられる (図 3.1(a))。

しかし、 X にも計測誤差が含まれる場合に y のみが曲げられるのは不合理である。この不合理を是正するために TLS 法が考案された。TLS 法においては、各変数に対するノイズの影響を均一にするため、(3.34) 式によるスケーリング後の行列 $[X^*|y^*]$ について考える。図 3.1(b) に示すように、TLS 法は y^* と x_1^* 及び x_2^* を互いに近づくように曲げ、 $\hat{y}^* \in R(\hat{X}^*)$ を満たしかつ 3 本のベクトル $\Delta \hat{y}^* = y^* - \hat{y}^*$ 、 $\Delta \hat{x}_1^* = x_1^* - \hat{x}_1^*$ 、 $\Delta \hat{x}_2^* = x_2^* - \hat{x}_2^*$ の長さの二乗和を最小とするような \hat{y}^* 、 \hat{x}_1^* 及び \hat{x}_2^* を求める。 \hat{x}_1^* と \hat{x}_2^* によって張られる空間を $R(\hat{X}^*)$ (図 3.1(b) において網掛けで示されている平面) とすると、 \hat{y}^* 、 \hat{x}_1^* 及び \hat{x}_2^* はそれぞれ y^* 、 x_1^* 及び x_2^* の

$R(\hat{X}^*)$ 上への正写影であり、 $\Delta \hat{y}^*$ 、 $\Delta \hat{x}_1^*$ 及び $\Delta \hat{x}_2^*$ は互いに平行である。 Σ は正則な対角行列であるので、(3.30) 式、(3.34) 式及び (3.35) 式に示した変数変換によってベクトルの直交性は変化しない。したがって、 \hat{y} 、 \hat{x}_1 及び \hat{x}_2 はそれぞれ y 、 x_1 及び x_2 の $R(\hat{X})$ 上への正写影であり、 $\Delta \hat{y}$ 、 $\Delta \hat{x}_1$ 及び $\Delta \hat{x}_2$ は互いに平行である。

\hat{y}^* 及び \hat{x}_j^* ($j=1, \dots, n$) がそれぞれ y^* 、 x_j^* の $R(\hat{X}^*)$ 上への正写影であることは次のように証明される。まず、(3.42) 式より \hat{X}^* の各列ベクトルは u_1, \dots, u_n の一次結合で表される。すなわち、 $R(\hat{X}^*)$ は u_1, \dots, u_n によって張られる空間であり、 \hat{y}^* を含む ((3.32) 式)。一方、(3.43) 式より $\Delta \hat{X}^*$ 及び $\Delta \hat{y}^*$ に含まれる列ベクトルは全て u_{n+1} に平行である。 U は直交行列であるので、 u_{n+1} は u_1, \dots, u_n のいずれに対しても直交する。したがって、 $\Delta \hat{y}^*$ 及び $\Delta \hat{X}^*$ の各列ベクトルは $R(\hat{X}^*)$ と直交する。すなわち、 \hat{y}^* 及び \hat{x}_j^* ($j=1, \dots, n$) はそれぞれ y^* 、 x_j^* の $R(\hat{X}^*)$ 上への正写影である。

3.3 TLS 法の計算アルゴリズム

デジタル計算機で (3.4) 式に対する TLS 法による解を計算するアルゴリズム⁴⁾を次に示す。

第 1 段階

各変数に含まれる誤差の分散が等しくなるような変数変換 ((3.34) 式) を行う。

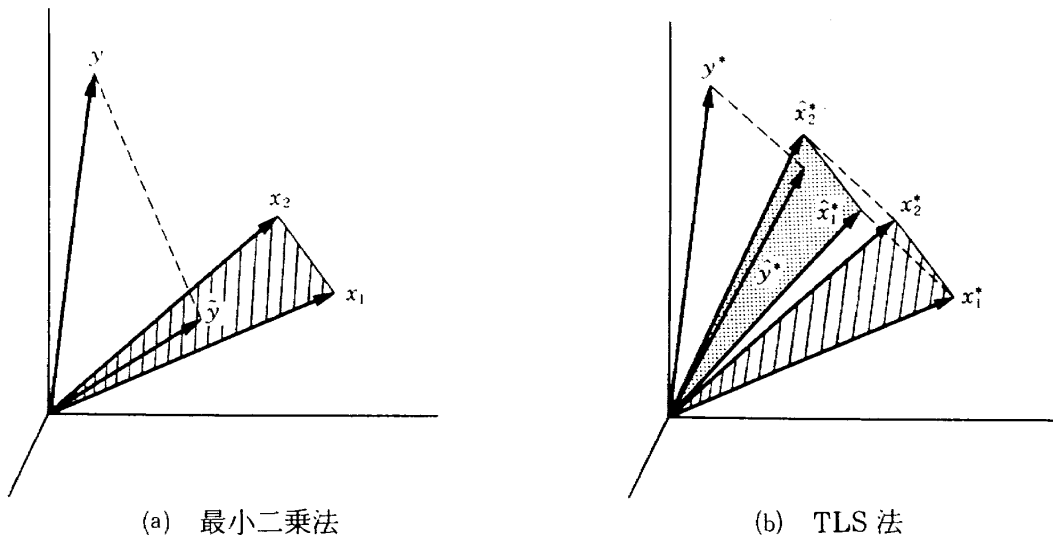


図 3.1 TLS 法と最小二乗法の幾何学的解釈

$$[X^* | y^*] = [X | y] \Sigma^{-1} \quad (3.34)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \sigma_n \\ 0 & & & & \sigma_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

第2段階

$[X^* | y^*]$ を特異値分解 ((3.36) 式) する⁸⁾。

$$[X^* | y^*] = U A V^T \quad (3.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \lambda_n \\ & & & & \lambda_{n+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \text{ 行} \\ n+1 \text{ 列} \end{matrix} \quad (3.37)$$

第3段階

$\lambda_n > \lambda_{n+1}$ であることを, 次式を基準として確認する (p は適当な大きさの正の数)。

$$\lambda_n^2 > (1+p) \lambda_{n+1}^2 \quad (3.54)$$

(3.54) 式が満たされない場合, 計算を中止する。

第4段階

$|v_{n+1, n+1}| \geq \mu$ (μ は正の小さい数) の場合, (3.51) 式によって解 $\hat{a} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n]^T$ を求める。

$$\hat{a}_j = -\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_j} \frac{v_{j, n+1}}{v_{n+1, n+1}} \quad (3.51)$$

$|v_{n+1, n+1}| < \mu$ の場合, $v_{n+1, n+1} = 0$ と見なし計算を中止する。

なお, 参考文献4)にはより一般的なアルゴリズムが示されているが, 上記のアルゴリズムでは簡単化のために目的変数行列を一次元に限定し, $m > n$ とした。また, 第3段階で (3.54) 式が満たされない場合及び第4段階で $|v_{n+1, n+1}| < \mu$ の場合は, 航空機の空力微係数推定等の実用的な問題において好ましくない場合として計算を中止することにした。

以下に上記のアルゴリズムについて留意すべき点を述べる。

- 第1段階において, 定数項のように本来計測誤差を含まない変数が X 又は y に含まれている場

合, 参考文献4)には, まず計測誤差を含む変数の係数のみを TLS法で求め, 次に計測誤差を含まない変数の係数のみを最小二乗法で求める方法が示されている。しかし, この方法では計測誤差を含まない変数に対する係数のばらつきの標準偏差が正しく推定されない。計測誤差が小さくなった極限が定数項であると考えられるので, 本報告書では定数項に対する計測誤差の標準偏差として, 便宜的に他の変数の計測誤差の標準偏差と比べて十分小さい値を与える。この手順の妥当性については 4.4 節において検討する。

- 第2段階での特異値分解においては, 特異値 λ_n と λ_{n+1} 及び右特異ベクトル v_{n+1} のみを求めればよい。
- 第3段階における正の数 p について, 参考文献4)では $p=1$ とすることを推奨している。本報告書に示した計算でも $p=1$ とした。
- 実際の数値計算では厳密に $v_{n+1, n+1} = 0$ となることは稀である。したがって, 第4段階において, $|v_{n+1, n+1}|$ が適当な正の小さな数 μ より小さい場合に $v_{n+1, n+1} = 0$ と見なす。

4. TLS 法の特性

本章では, 正弦波を組み合わせた簡単なモデルを用いた数値計算により TLS法の特性を調べ, 最小二乗法と比較する。

4.1 節 ~ 4.3 節で用いるモデル方程式を次に示す。

$$y_0 = a_{01} x_{01} + a_{02} x_{02} \quad (4.1)$$

$$x_{01} = \sin(2\pi t) \quad (4.2)$$

$$x_{02} = \cos(2\pi t) \quad (4.3)$$

$$y_0 = \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) \quad (4.4)$$

推定すべき未知係数は $a_{01} = a_{02} = 1$ である。上式の説明変数及び目的変数に対する計測値を次式で与える。

$$x_{i1} = \sin(2\pi t_i) + \varepsilon_{i1} \quad (4.5)$$

$$x_{i2} = \cos(2\pi t_i) + \varepsilon_{i2} \quad (4.6)$$

$$y_i = \sin(2\pi t_i) + \cos(2\pi t_i) + \varepsilon_{i3} \quad (4.7)$$

$$t_i = 0.01(i-1), \quad i=1, \dots, 201$$

ここで, 各変数に対する計測誤差 ε_{ij} ($i=1, \dots,$

201 ; $j=1, 2, 3$) は互いに独立で、平均値 0、標準偏差 σ_j の正規分布に従う白色ノイズである。

4.1 ~ 4.3 節では、次に示す手順によって TLS 法及び最小二乗法による解の統計的性質を比較する。

- (1) 電子計算機に白色ノイズ ε_{ij} を発生させる。
- (2) ε_{ij} を (4.5) 式 ~ (4.7) 式に代入して x_1 , x_2 及び y の計測値を求める。
- (3) (2) で求めた計測値に対して、TLS 法による解 \hat{a}_1 , \hat{a}_2 及び解の標準偏差の推定値 $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$, $\hat{\sigma}(\hat{a}_2)$ を求める。
- (4) (1) ~ (3) の手順を 100 回繰り返す。但し、白色ノイズは前回までの白色ノイズと相関がないようにする。
- (5) 100 個の \hat{a}_1 , \hat{a}_2 の平均値 $mean(\hat{a}_1)$, $mean(\hat{a}_2)$ と正しい係数値 a_{01} , a_{02} を比較することによって、TLS 法による解の精度を調べる。
- (6) 解の標準偏差の推定値として 100 個の $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$, $\hat{\sigma}(\hat{a}_2)$ の平均値 $mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$, $mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_2))$ を求める。
- (7) $mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$, $mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_2))$ と 100 個の \hat{a}_1 , \hat{a}_2 の標準偏差 $\sigma(\hat{a}_1)$, $\sigma(\hat{a}_2)$ (実際の解の標準偏差) を比較することにより、TLS 法による解の標準偏差の推定精度を調べる。

また、TLS 法と同じ計測値に対して、最小二乗法による解 \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 及び解の標準偏差の推定値 $\tilde{\sigma}(\tilde{a}_1)$, $\tilde{\sigma}(\tilde{a}_2)$ を求め、同様にして最小二乗法による解及び解の標準偏差の推定精度を調べる。

4.1 説明変数と目的変数の計測誤差の大きさ

本節では、説明変数に含まれる計測誤差と目的変数に含まれる計測誤差の大きさを変化させた時の TLS 法及び最小二乗法による解と解の標準偏差の推定精度の変化を調べる。

(1) 全ての変数の計測誤差の変化

説明変数及び目的変数の全ての変数に含まれる計測誤差が同じ大きさである ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) 場合、計測誤差の大きさの変化による TLS 法及び最小二乗法の解と解の標準偏差の推定精度の変化を調べる。

表 4.1 説明変数及び目的変数に含まれる誤差

| ケース | $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ |
|-----|----------------------------------|
| 1 | 0.01 |
| 2 | 0.10 |
| 3 | 0.20 |
| 4 | 0.30 |
| 5 | 0.40 |
| 6 | 0.50 |
| 7 | 0.60 |

表 4.1 に示した説明変数の計測誤差の標準偏差 σ_1 , σ_2 及び目的変数の計測誤差の標準偏差 σ_3 の組み合わせのそれぞれに対し 100 回の係数推定を行った。TLS 法による解の平均値 $mean(\hat{a}_1)$ の変化を図 4.1(a) に実線で示す。さらに、 $mean(\hat{a}_1) \pm mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ を破線で、 $mean(\hat{a}_1) \pm \sigma(\hat{a}_1)$ を一点鎖線で示す。 $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$ の推定には (3.47) 式を用いた。また、図 4.1(b) に最小二乗法による解の平均値 $mean(\tilde{a}_1)$, $mean(\tilde{a}_1) \pm mean(\tilde{\sigma}(\tilde{a}_1))$ 及び $mean(\tilde{a}_1) \pm \sigma(\tilde{a}_1)$ を同様に示す。

TLS 法による解の平均値は、計測誤差の大きさによらずほぼ正しい値 1 である。最小二乗法による解の平均値は、計測誤差が 0 に近い場合はほぼ 1 である。しかし、計測誤差の増加と共に説明変数に含まれる計測誤差によるバイアス誤差 (3.20) 式参照) が現れ、その大きさは増加し続ける。

いずれの方法においても実際の解の標準偏差は計測誤差の増加と共に増加し、TLS 法の方が最小二乗法よりも解の標準偏差が大きい。TLS 法による解の標準偏差の推定は、計測誤差の大きさによらずほぼ正しい。最小二乗法による解の標準偏差の推定値は実際よりも小さい。これは、最小二乗法の場合、解の標準偏差の推定においては主とし

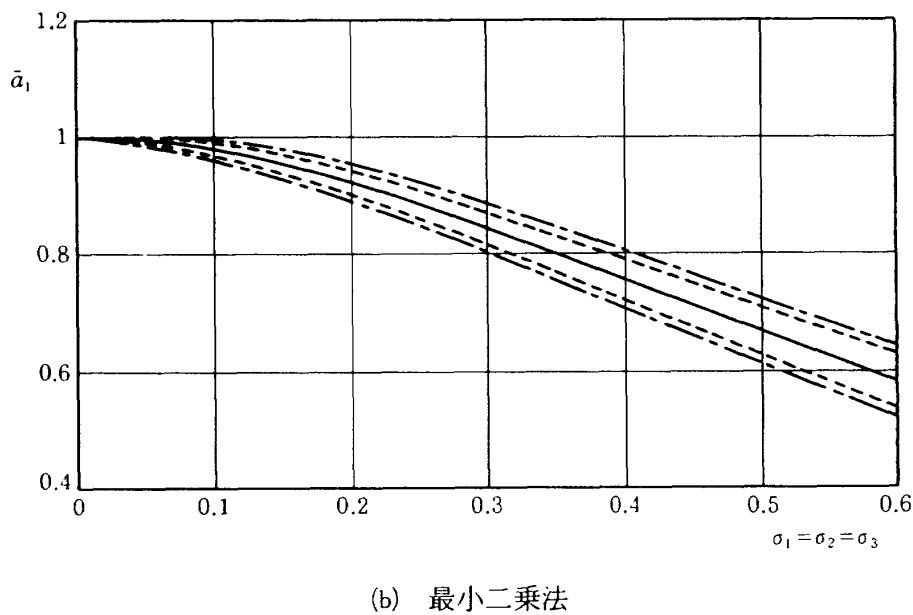
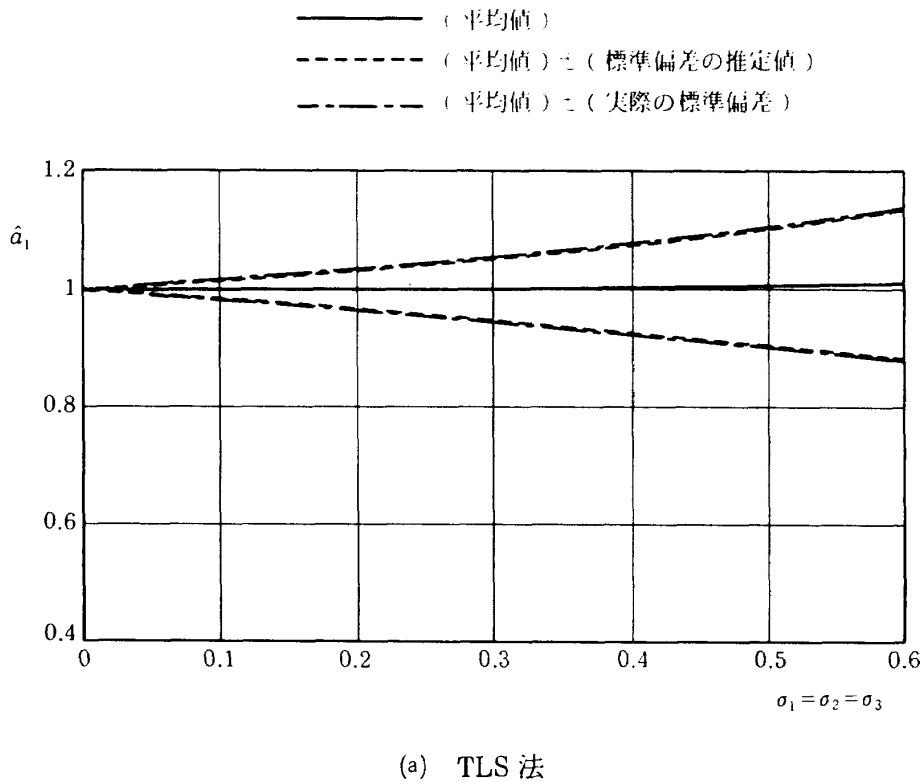


図 4.1 全ての変数に含まれる計測誤差が変化する場合の係数推定結果
($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の場合)

て目的変数に含まれる計測誤差の大きさ σ_3 のみが考慮されるためであると考えられる ((3.16) 式参照)。 \hat{a}_2 及び \bar{a}_2 についても同様の結果が得られた。

(2) 説明変数の計測誤差の変化

目的変数に含まれる計測誤差が一定の場合、説明変数に含まれる計測誤差の大きさ ($\sigma_1 = \sigma_2$) の変

化による TLS 法及び最小二乗法の解と解の標準偏差の推定精度の変化を調べる。

表 4.2 に示した σ_1 、 σ_2 及び σ_3 の組み合わせのそれぞれに対し 100 回の係数推定を行った。 TLS 法による解の平均値 $mean(\hat{a}_1)$ の変化を図 4.2 (a) に実線で示す。さらに、 $mean(\hat{a}_1) \pm mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ を破線で、 $mean(\hat{a}_1) \pm \sigma(\hat{a}_1)$ を一点鎖線で示す。

表 4.2 説明変数及び目的変数に含まれる誤差

| ケース | $\sigma_1 = \sigma_2$ | σ_3 |
|-----|-----------------------|------------|
| 1 | 0.01 | 0.30 |
| 2 | 0.10 | 0.30 |
| 3 | 0.20 | 0.30 |
| 4 | 0.30 | 0.30 |
| 5 | 0.40 | 0.30 |
| 6 | 0.50 | 0.30 |
| 7 | 0.60 | 0.30 |

表 4.3 説明変数及び目的変数に含まれる誤差

| ケース | $\sigma_1 = \sigma_2$ | σ_3 |
|-----|-----------------------|------------|
| 1 | 0.30 | 0.01 |
| 2 | 0.30 | 0.10 |
| 3 | 0.30 | 0.20 |
| 4 | 0.30 | 0.30 |
| 5 | 0.30 | 0.40 |
| 6 | 0.30 | 0.50 |
| 7 | 0.30 | 0.60 |

$\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$ の推定には (3.47) 式を用いた。また、図 4.2 (b) に最小二乗法による解の平均値 $mean(\bar{a}_1)$, $mean(\bar{a}_1) \pm mean(\bar{\sigma}(\bar{a}_1))$ 及び $mean(\bar{a}_1) \pm \sigma(\bar{a}_1)$ を同様に示す。

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の場合と同様、TLS 法による解の平均値は $\sigma_1 (= \sigma_2)$ によらずほぼ正しい。しかし、最小二乗法による解の平均値には σ_1 の増加と共に σ_1 及び σ_2 に起因するバイアス誤差が現れ、バイアス誤差の大きさは増加し続ける。

実際の解の標準偏差はいずれの方法においても σ_1 の増加と共に増加し、TLS 法の方が最小二乗法よりも解の標準偏差が大きい。TLS 法による解の標準偏差の推定は、 σ_1 の大きさによらずほぼ正しい。最小二乗法による解の標準偏差の推定値は、 σ_1 が小さい場合には実際の値にほぼ等しいが、 σ_1 の増加と共に実際の値よりも小さくなる。これは、最小二乗法の場合、解の標準偏差の推定において主として σ_3 のみが考慮されるためであると考えられる。 \hat{a}_2 及び \bar{a}_2 についても同様の結果が得られた。

σ_1 が小さい場合には TLS 法と最小二乗法の間には差は見られない。これは、 $\sigma_1 (= \sigma_2)$ が小さい場合、TLS 法による近似が主に相対的に大きい計測誤差

を含む目的変数に対して行われ、目的変数のみを近似する最小二乗法に近づくためである。

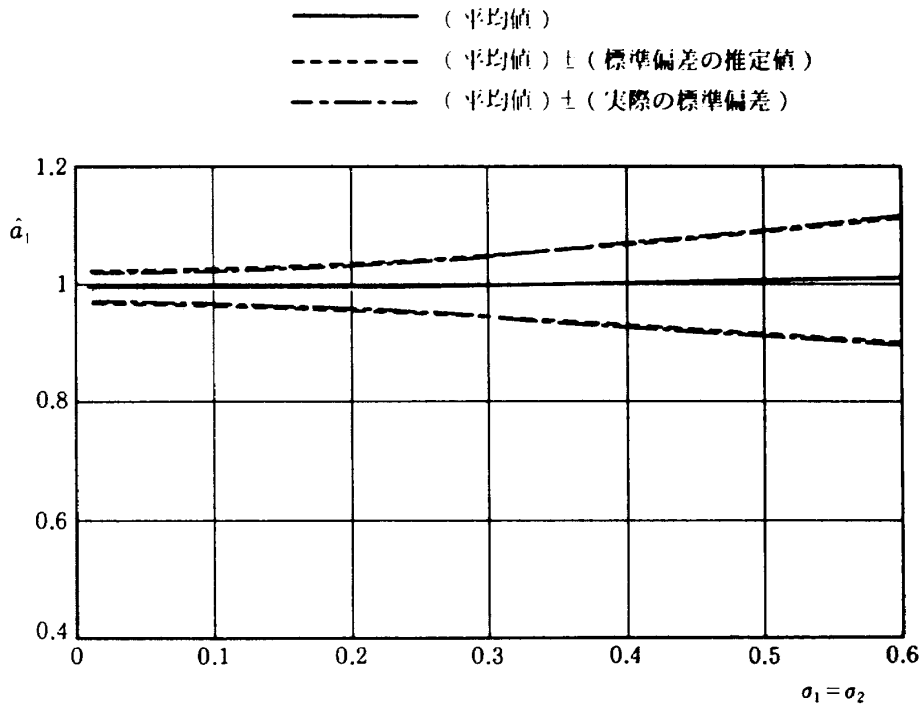
(3) 目的変数の計測誤差の変化

説明変数に含まれる計測誤差が一定の場合、目的変数に含まれる計測誤差の大きさ (σ_3) の変化による TLS 法及び最小二乗法の解と解の標準偏差の推定精度の変化を調べる。

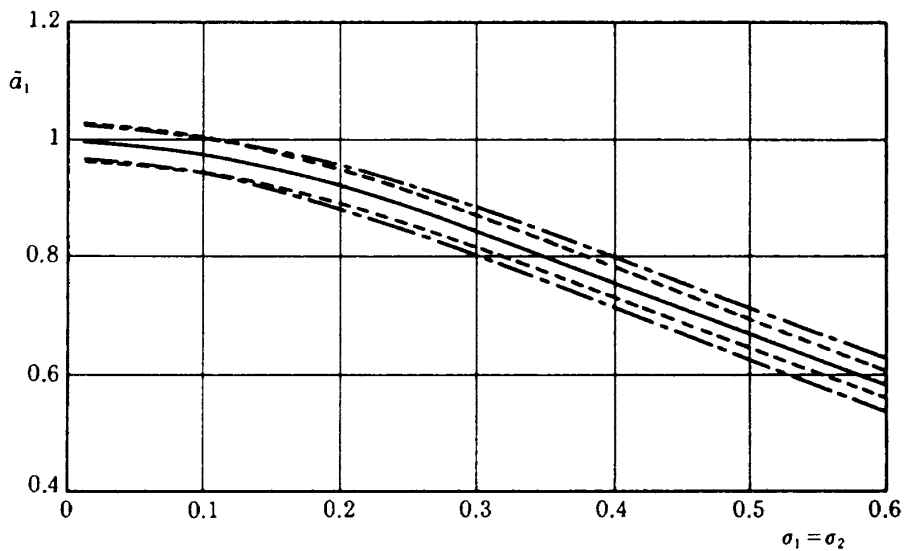
表 4.3 に示した σ_1 , σ_2 及び σ_3 の組み合わせのそれぞれに対し 100 回の係数推定を行った。TLS 法による解の平均値 $mean(\hat{a}_1)$ の変化を図 4.3 (a) に実線で示す。さらに、 $mean(\hat{a}_1) \pm mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ を破線で、 $mean(\hat{a}_1) \pm \sigma(\hat{a}_1)$ を一点鎖線で示す。 $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$ の推定には (3.47) 式を用いた。また、図 4.3 (b) に最小二乗法による解の平均値 $mean(\bar{a}_1)$, $mean(\bar{a}_1) \pm mean(\bar{\sigma}(\bar{a}_1))$ 及び $mean(\bar{a}_1) \pm \sigma(\bar{a}_1)$ を同様に示す。

TLS 法による解の平均値は σ_3 によらずほぼ正しい。しかし、最小二乗法による解の平均値は σ_3 によらずほぼ一定のバイアス誤差を含む。これは、最小二乗法による解の平均値のバイアス誤差が説明変数に含まれる計測誤差 σ_1 及び σ_2 (図 4.3 (b) では一定値) に依存するためである ((3.20) 式参照)。

実際の解の標準偏差はいずれの方法においても



(a) TLS法



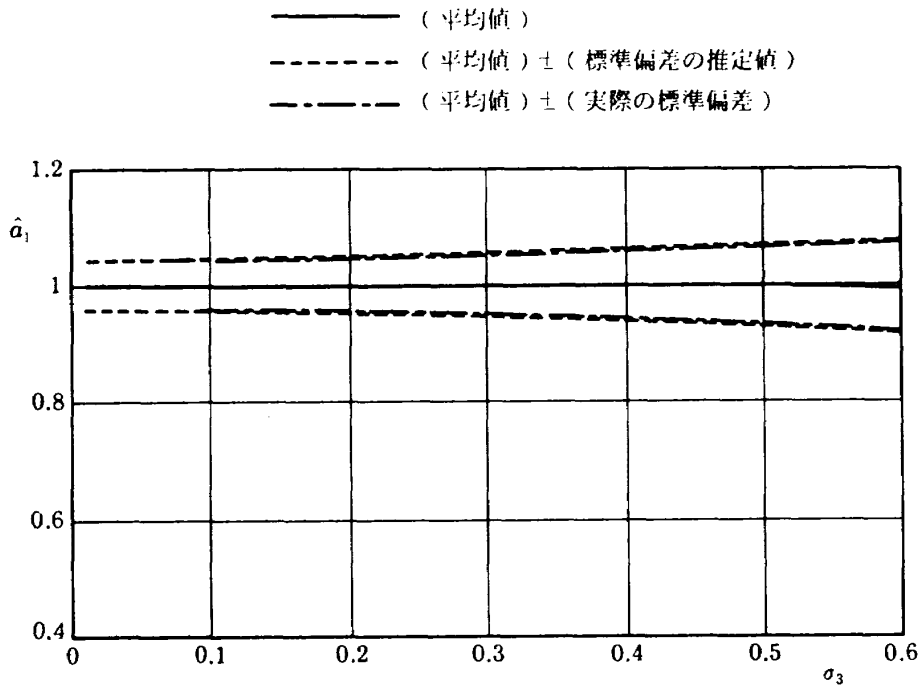
(b) 最小二乗法

図4.2 説明変数に含まれる計測誤差のみが変化する場合の係数推定結果
($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = 0.3$ の場合)

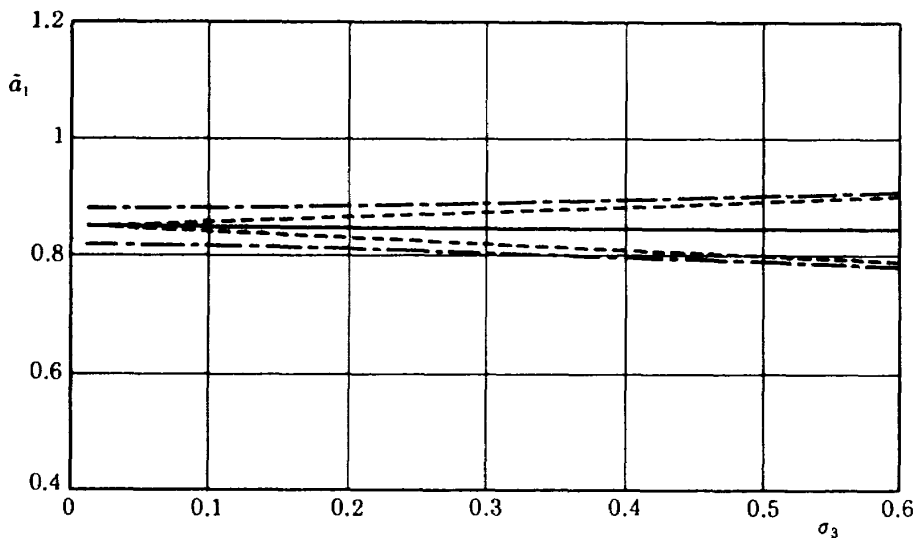
σ_3 の増加と共に増加し、TLS法の方が最小二乗法よりもわずかに解の標準偏差が大きい。TLS法による解の標準偏差の推定は、 σ_3 の大きさによらずほぼ正しい。最小二乗法による解の標準偏差の推定値は、 σ_3 が0に近い場合はほぼ0であり、実際の値とは異なる。しかし、 σ_3 の増加と共に解の標準偏差の推定値は実際の値に近づく。最小二乗法

の解の標準偏差の推定においては主として σ_3 のみが考慮されるため、 σ_3 が σ_1, σ_2 と比較して相対的に大きくなる程、解の標準偏差の推定誤差が小さくなると考えられる。 \hat{a}_2 及び \bar{a}_2 についても同様の結果が得られた。

以上の結果より、各変数に含まれる誤差の標準偏差(又は分散)の比が既知であれば、線形モデ



(a) TLS 法



(b) 最小二乗法

図 4.3 目的変数に含まれる計測誤差のみが変化する場合の係数推定結果
($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ の場合)

ル方程式の目的変数のみならず説明変数に誤差が含まれる場合にも、TLS法による未知係数の推定結果にバイアス誤差は無く、係数のばらつきの標準偏差の推定も正しい。これに対し、最小二乗法では、説明変数に誤差が含まれる場合には未知係数及びそのばらつきの標準偏差の推定に誤差を生じる。

4.2 TLS 法の解の標準偏差の近似式による推定

本節では、TLS法の解の標準偏差の推定について、厳密式(3.47式)と近似式(3.50式)による推定精度の差を調べる。

表 4.1 と同じ大きさの計測誤差($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)に対してTLS法による未知係数の推定を行い、解の

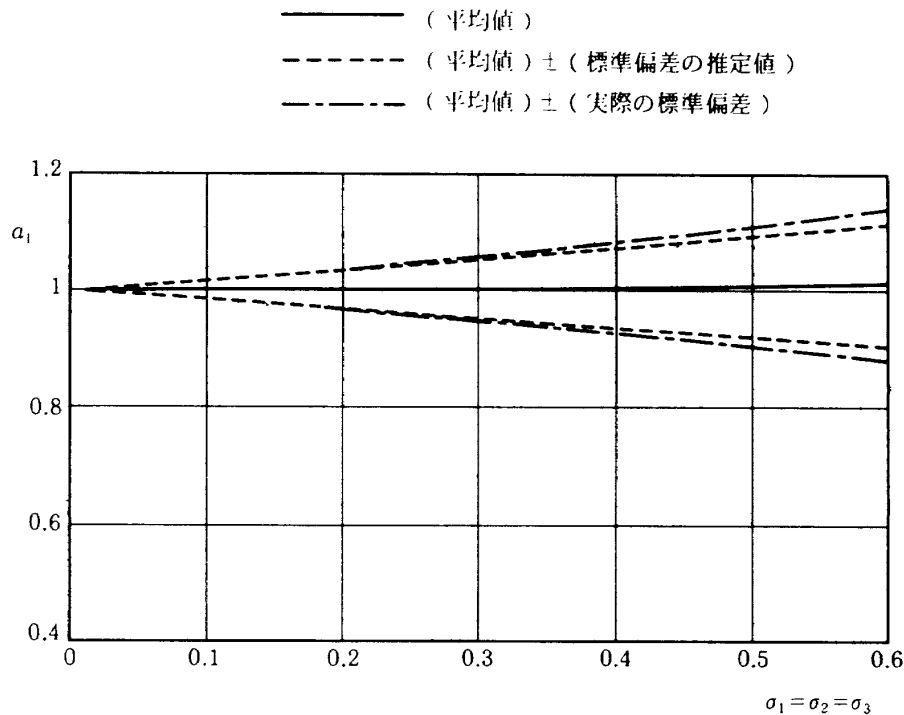


図 4.4 TLS 法による解の標準偏差の近似式による推定
($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の場合)

標準偏差を近似式を用いて推定する。TLS法による解の平均値 $mean(\hat{a}_1)$ を図 4.4 に実線で示す。また、 $mean(\hat{a}_1) \pm mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ を破線で、 $mean(\hat{a}_1) \pm \sigma(\hat{a}_1)$ を一点鎖線で示す。

図 4.4 より、計測誤差が大きい場合には、実際の解の標準偏差と比較して近似式による解の標準偏差の推定値が小さくなる傾向がある。これに対し、厳密式を用いると解の標準偏差をほぼ正しく推定することができる(図 4.1(a))。

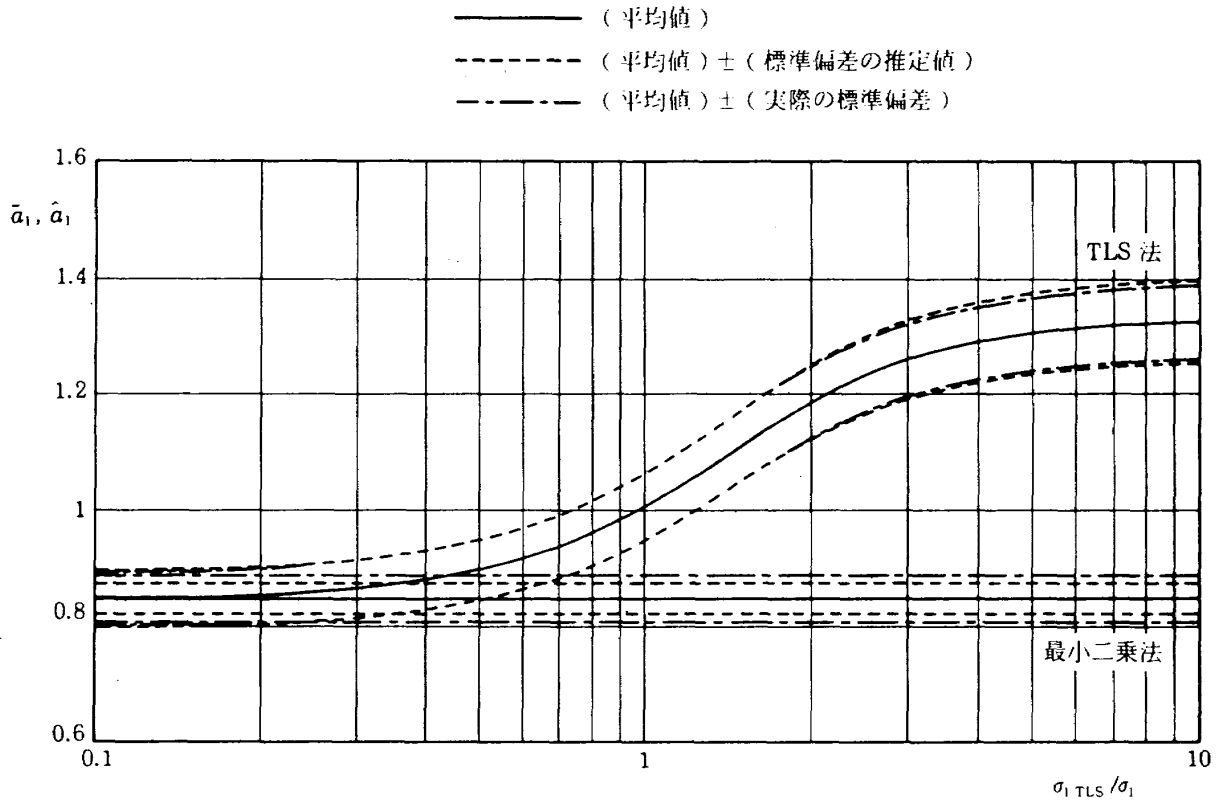
4.3 計測誤差の標準偏差の推定精度

TLS法においては、各変数に含まれる計測誤差の標準偏差の絶対値は未知でもよいが、互いの大きさの比は既知でなければならない。計測誤差の標準偏差の比が正しく与えられている場合、 $m \rightarrow \infty$ において TLS法による解は正しい値に収束し、解の標準偏差も正しく推定される。本節では、各変数に含まれる計測誤差の標準偏差の比が誤って与えられた場合の TLS法の解及び解の標準偏差の推定値について調べる。

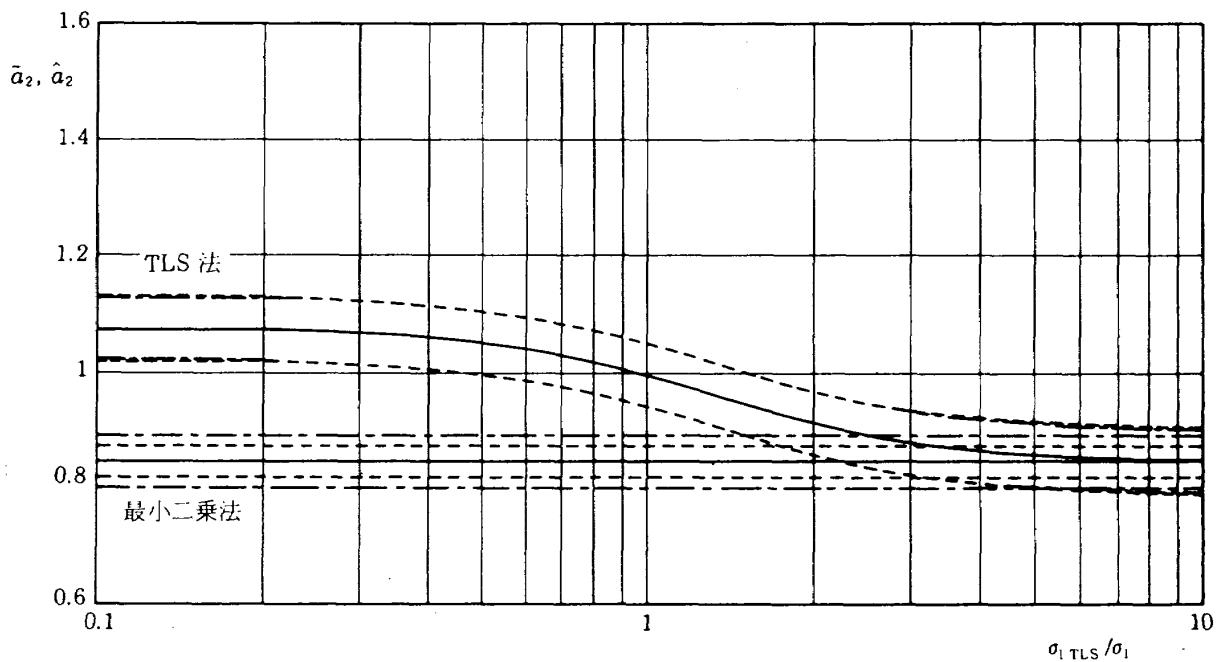
(4.5)式～(4.7)式において、説明変数及び目的変数の計測誤差の標準偏差を $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.3$ とし

て各変数の計測値を計算する。この計測値に対して、TLS法及び最小二乗法による解と解の標準偏差の推定値を求める。但し、TLS法の計算において、 σ_2 及び σ_3 には常に正しい値 0.3 を与えるが、 σ_1 には表 4.4 に示した値 $\sigma_{1\text{ TLS}}$ を与える。それぞれのケースについて 100組の異なる計測値に対して係数推定を行った。TLS法による解 \hat{a}_1 及び最小二乗法による解 \bar{a}_1 の平均値の変化を図 4.5(a) に実線で示す。また、 $mean(\hat{a}_1) \pm mean(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ 及び $mean(\bar{a}_1) \pm mean(\bar{\sigma}(\bar{a}_1))$ を破線で、 $mean(\hat{a}_1) \pm \sigma(\hat{a}_1)$ 及び $mean(\bar{a}_1) \pm \sigma(\bar{a}_1)$ を一点鎖線で示す。 $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$ の推定には (3.47)式を用いた。さらに、図 4.5(b)には、もう一つの未知係数 a_2 の推定結果を示す。

計測誤差の標準偏差の推定を誤った変数の係数 a_1 の推定(図 4.5(a))では、 $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1 < 1$ の場合、 \hat{a}_1 の平均値は正しい値より小さくなり、 $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1$ の減少と共に最小二乗法による解の平均値に近づく。逆に、 $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1 > 1$ の場合、 \hat{a}_1 の平均値は正しい値より大きくなり、 $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1$ の増加と共にある値(図 4.5(a)の場合約 1.33)に近づく。一方、計測誤差の標準偏差の推定が正しい変数の係数 a_2



(a) 計測誤差の標準偏差の推定を誤った変数の係数 a_1



(b) 計測誤差の標準偏差の推定が正しい変数の係数 a_2

図4.5 計測誤差の標準偏差の推定精度の影響

($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.3$)

の推定(図4.5(b))では, $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1 < 1$ の場合, \hat{a}_2 の平均値は正しい値より大きくなり, $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1$ の減少と共にある値(図4.5(b)の場合約1.07)に近づく。逆に, $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1 > 1$ の場合, \hat{a}_2 の平均値

は正しい値より小さくなり, $\sigma_{1\text{ TLS}}/\sigma_1$ の増加と共に最小二乗法による解の平均値に近づく。いずれの係数に対してもTLS法による解の標準偏差は常にほぼ正しく推定される。

表 4.4 TLS 法の計算で用いた誤差の標準偏差

| ケース | σ_{TLS} | $\sigma_{\text{TLS}}/\sigma_1$ |
|-----|-----------------------|--------------------------------|
| 1 | 0.03 | 0.100 |
| 2 | 0.04 | 0.133 |
| 3 | 0.05 | 0.167 |
| 4 | 0.06 | 0.200 |
| 5 | 0.07 | 0.233 |
| 6 | 0.08 | 0.267 |
| 7 | 0.09 | 0.300 |
| 8 | 0.1 | 0.333 |
| 9 | 0.2 | 0.667 |
| 10 | 0.3 | 1.000 |
| 11 | 0.4 | 1.333 |
| 12 | 0.5 | 1.667 |
| 13 | 0.6 | 2.000 |
| 14 | 0.7 | 2.333 |
| 15 | 0.8 | 2.667 |
| 16 | 0.9 | 3.000 |
| 17 | 1.0 | 3.333 |
| 18 | 2.0 | 6.777 |
| 19 | 3.0 | 10.000 |

以上の結果より、各変数に含まれている計測誤差の標準偏差の比が正しく見積もられなかった場合、TLS法による未知係数の推定結果には誤差が生じることが分かる。

ところで、第3章で述べた計測誤差に対する仮定(3.7式及び(3.9式)において、計測誤差は白色ノイズであると仮定されている。しかし、モデル方程式が非線形項を含む場合、非線形項の計測誤差の標準偏差は白色ノイズではない。例えば、 x (計測値) $=x_0$ (真値) $+dx$ (計測誤差)とすると $x^2=(x_0+dx)^2=x_0^2+2x_0dx+dx^2$ となり、 x^2 に含まれる計測誤差は白色ノイズではないので、直接TLS法を適用することは難しい。このような場合の計測誤差の標準偏差の算定は今後の課題である。

4.4 モデル方程式が定数項を含む場合

本節では、定数項を含むモデル方程式に対してTLS法を適用する場合、TLS法の計算アルゴリズムにおいて定数項に対する計測誤差の大きさをどのように与えれば良いかという問題に対する検討例を示す。

(4.1)式～(4.4)式に示したモデル方程式の代わりに次式をモデル方程式とする。

$$y_0 = a_{01}x_{01} + a_{02}x_{02} \quad (4.8)$$

$$x_{01} = 1 \quad (4.9)$$

$$x_{02} = \sin(2\pi t) \quad (4.10)$$

$$y_0 = 1 + \sin(2\pi t) \quad (4.11)$$

推定すべき未知係数は $a_{01}=a_{02}=1$ である。上式の説明変数及び目的変数に対する計測値を次式で与える。

$$x_{i1} = 1 \quad (4.12)$$

$$x_{i2} = \sin(2\pi t_i) + \epsilon_{i2} \quad (4.13)$$

$$y_i = 1 + \sin(2\pi t_i) + \epsilon_{i3} \quad (4.14)$$

$$t_i = 0.01(i-1), \quad i=1, \dots, 201$$

ここで、計測誤差 ϵ_{ij} ($i=1, \dots, 201$; $j=2, 3$)は互いに独立で、平均値0、標準偏差0.3の正規分布に従う白色ノイズである。

この計測値に対して、TLS法による解と解の標準偏差の推定値を求める。但し、TLS法の計算において、 σ_2 及び σ_3 には常に正しい値0.3を与えるが、 σ_1 には表4.5に示した値 σ_{TLS} を与える。それぞれのケースについて100組の異なる計測値に対する係数推定を行った。TLS法による解 \hat{a}_1, \hat{a}_2 の平均値、TLS法で推定した解の標準偏差 $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$,

表 4.5 定数項を含む場合の TLS 法による未知係数推定結果

| $\sigma_{1, TLS}$ | $\text{mean}(\hat{a}_1)$ | $\text{mean}(\hat{a}_2)$ | $\text{mean}(\hat{\sigma}(\hat{a}_1))$ | $\text{mean}(\hat{\sigma}(\hat{a}_2))$ | $\sigma(\hat{a}_1)$ | $\sigma(\hat{a}_2)$ |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|--|--|---------------------|---------------------|
| 0.3 | 1.06469 | 0.93504 | 0.02868 | 0.03928 | 0.03116 | 0.04234 |
| 0.03 | 1.00309 | 0.99510 | 0.02831 | 0.04226 | 0.03008 | 0.04457 |
| 0.003 | 1.00219 | 0.99600 | 0.02830 | 0.04230 | 0.03007 | 0.04461 |
| 0.0003 | 1.00218 | 0.99601 | 0.02830 | 0.04230 | 0.03007 | 0.04461 |
| 0.00003 | 1.00218 | 0.99601 | 0.02830 | 0.04230 | 0.03007 | 0.04461 |

$\hat{\sigma}(\hat{a}_2)$ の平均値及び実際の解の標準偏差 $\sigma(\hat{a}_1)$, $\sigma(\hat{a}_2)$ を表 4.5 に示す。

本節に示した計算例の場合 $\sigma_{1, TLS}$ が 0.003 以下 (σ_2 及び σ_3 の 1/100 以下) であれば, 定数項も含めて TLS 法による解の推定誤差は 0.4% 以下, 解の標準偏差の推定誤差は 6% 以下である。

5. 飛行試験データを用いた空力微係数の推定例

本章では, 飛行試験で計測された航空機の縦運動データを用いて TLS 法と最小二乗法による空力微係数の推定を行い, 両者を比較する。

本節で用いる飛行試験データは, オランダ国立航空宇宙研究所 (NLR) 所有の実験用航空機 スウェリンジェン・メトロ II (図 5.1) によって, 1990 年 12 月 ~ 1991 年 1 月に取得されたデータである。メトロ II の主な諸元を表 5.1 に示す⁹⁾。飛行試験はオランダのデルフト工科大学と NLR の共同プロジェクトとして実施された。

以下では上下荷重係数 C_z の線形モデルに含まれる空力微係数の推定例を示す。前後荷重係数 C_x のモデルは説明変数の一つとして迎角の 2 乗を含む非線形モデルであり, 直接 TLS 法を適用するのが難しいので空力微係数の推定を行わなかった。また, 縦モーメント係数 C_m については, C_z と同様に空力微係数の推定を行った。しかし, 目的変数 (ピッチ角加速度) に含まれる計測誤差が

説明変数 (迎角等) に含まれる計測誤差と比べて大きいため, TLS 法と最小二乗法との差は非常に小さかった。したがって, 以下では C_m に関する空力微係数の推定結果は省略した。

5.1 上下荷重係数 C_z の線形モデル化

上下荷重係数 C_z を次に示す線形方程式でモデル化する*。

$$C_z = C_{z_0} + C_{z\alpha}\alpha + C_{zq}\frac{q\bar{c}}{V} + C_{z\delta_e}\delta_e \quad (5.1)$$

ここで, α は迎角, q はピッチ角速度, δ_e は昇降舵偏位角, V は真対気速度, \bar{c} は平均翼弦長を示す。 C_z は実験機に取り付けられた加速度計による計測データより求めた機体重心位置における機体軸上下方向加速度 A_z を次式に代入して求めた。

$$C_z = \frac{2m}{\rho V^2 S} A_z \quad (5.2)$$

迎角 α は, 実験機のノーズブームに取り付けられた α ベーン の角度計測値を慣性速度及び姿勢角より求めた迎角を基準として校正して求めた。また, 真対気速度 V は, 実験機のピトー管及び静圧孔によって計測した対気速度を校正して求めた¹⁰⁾。

* q の無次元化は $(q\bar{c})/(2V)$ とすることが一般的であるが, デルフト工科大学では $(q\bar{c})/V$ が用いられていたため, ここではそれに従った。

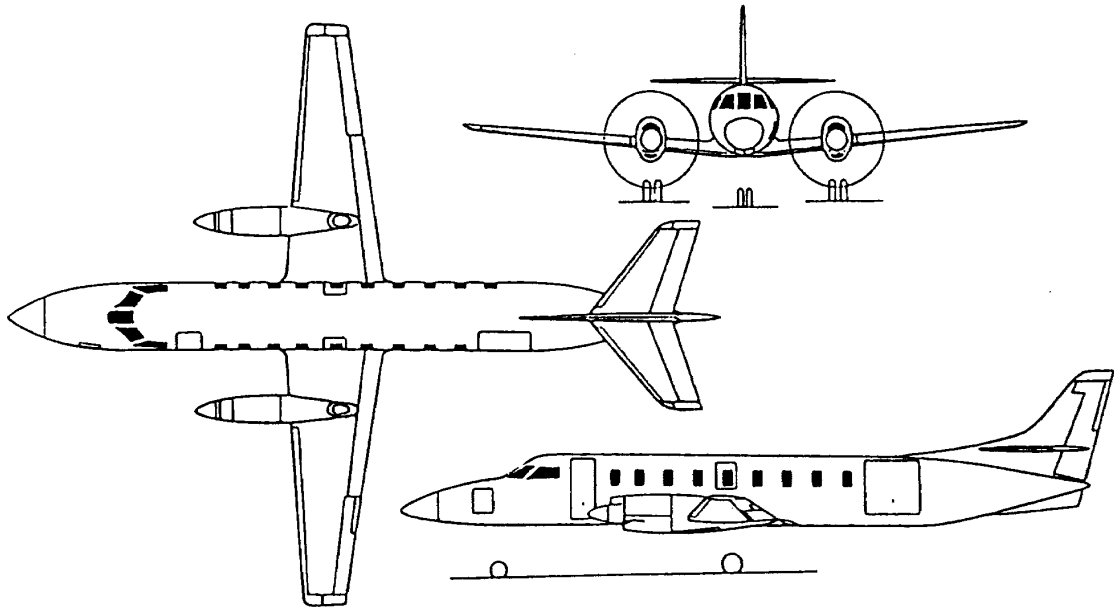


図 5.1 スウェリンジェン・メトロ II 三面図

表 5.1 スウェリンジェン・メトロ II の主要諸元

| | | |
|--------|-----------------------------|---------------------------------------|
| 全長 | 18.10m | |
| 翼幅 | 14.10m | |
| 翼面積 | 25.78m ² | |
| 平均翼弦長 | 1.95m | |
| 最大巡航速度 | 473km/h (高度3050m, 重量5445kg) | |
| エンジン | 形式 | Garret-AiResearch TPE 331-3UW-304G |
| | 搭載数 | 2台 |
| | 最大連続出力 | 626kW (プロペラ軸出力) |

5.2 TLS法及び最小二乗法による空力微係数の推定

合計7ケースの昇降舵入力による縦運動に対して、TLS法及び最小二乗法を用いて C_{z_0} 、 C_{z_α} 、 C_{z_q} 及び $C_{z_{\delta e}}$ を推定した。

各試験ケースの飛行条件、昇降舵入力波形及び

TLS法で用いた各変数に対する計測誤差の標準偏差等を表5.2に示す。各試験ケースにおいて昇降舵入力を入れる直前のトリム状態での計測値の標準偏差を、各変数に対する計測誤差の標準偏差とした。これは計測機器単体のノイズだけではなく、飛行中の機体振動、気流の乱れ等によるノイズも

表 5.2 飛行試験ケース一覧表

| ケース番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|-------|
| 飛行試験番号 | 728 | 728 | 732 | 732 | 734 | 734 | 734 | |
| レコード番号 | 10 | 15 | 25 | 29 | 31 | 42 | 44 | |
| 昇降舵入力 | ダブルット | ダブルット | ダブルット | ダブルット | ダブルット | 3 2 1 1* | 3 2 1 1* | |
| 釣合速度 (m/s) | CAS | 88.0 | 86.3 | 88.2 | 88.0 | 87.1 | 88.4 | 87.5 |
| | TAS | 102.5 | 100.6 | 94.8 | 94.6 | 99.8 | 101.6 | 100.5 |
| 気圧高度 (m) | 3060 | 3060 | 1540 | 1540 | 3050 | 3070 | 3070 | |
| 機体質量 (kg) | 5820 | 5789 | 5793 | 5782 | 5735 | 5707 | 5703 | |
| データ長*1 (s) | 13.20 | 12.80 | 9.60 | 12.00 | 9.20 | 14.80 | 15.60 | |
| σ_α (deg) | 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.04 | 0.02 | 0.04 | 0.02 | |
| σ_q (deg/s) | 0.014 | 0.021 | 0.014 | 0.018 | 0.007 | 0.034 | 0.018 | |
| $\sigma_{\delta e}$ (deg) | 0.018 | 0.011 | 0.010 | 0.013 | 0.018 | 0.011 | 0.015 | |
| $\sigma_{\lambda z}$ (m/s ²) | 0.014 | 0.013 | 0.014 | 0.018 | 0.014 | 0.057 | 0.044 | |

- DFVLR (現在のDLR)で1977年に提案された入力波形(図5.2参照)
- 1 サンプル間隔は40msである。

考慮に入れるためである。また、定数項 C_{z_0} に対する説明変数は1であり、本来計測誤差を含まない。しかし、 C_{z_0} に対する標準偏差をより正確に推定するため、TLS法の計算においては定数項に対する計測誤差の標準偏差として、他の変数に含まれる計測誤差の標準偏差と比べて十分小さい値 10^{-6} を与えた(4.4節参照)。ケース7における各変数の計測値の時歴を図5.2に示す。

上下荷重係数 C_z に関する空力微係数の推定結果を図5.3に示す。図5.3において、(a)はTLS法による空力微係数の推定値及びその標準偏差である。(b)は最小二乗法による空力微係数の推定値及

びその標準偏差である。空力微係数の推定値については、TLS法及び最小二乗法のいずれを用いてもほぼ同じ値が得られた。しかし、空力微係数の標準偏差の推定については、最小二乗法と比べて、TLS法の方が(平均値)±(標準偏差の推定値)を示す線が長く、互いに重なり合っている試験ケースも多い。各試験ケースより求めた空力微係数のばらつきと比較すると、TLS法における標準偏差の推定値の方がより実際に近いと考えられる。

本章で述べた飛行試験は、本来最小二乗法を用いて空力微係数の推定を行うために実施されたものである。このため、飛行試験データの取得は高

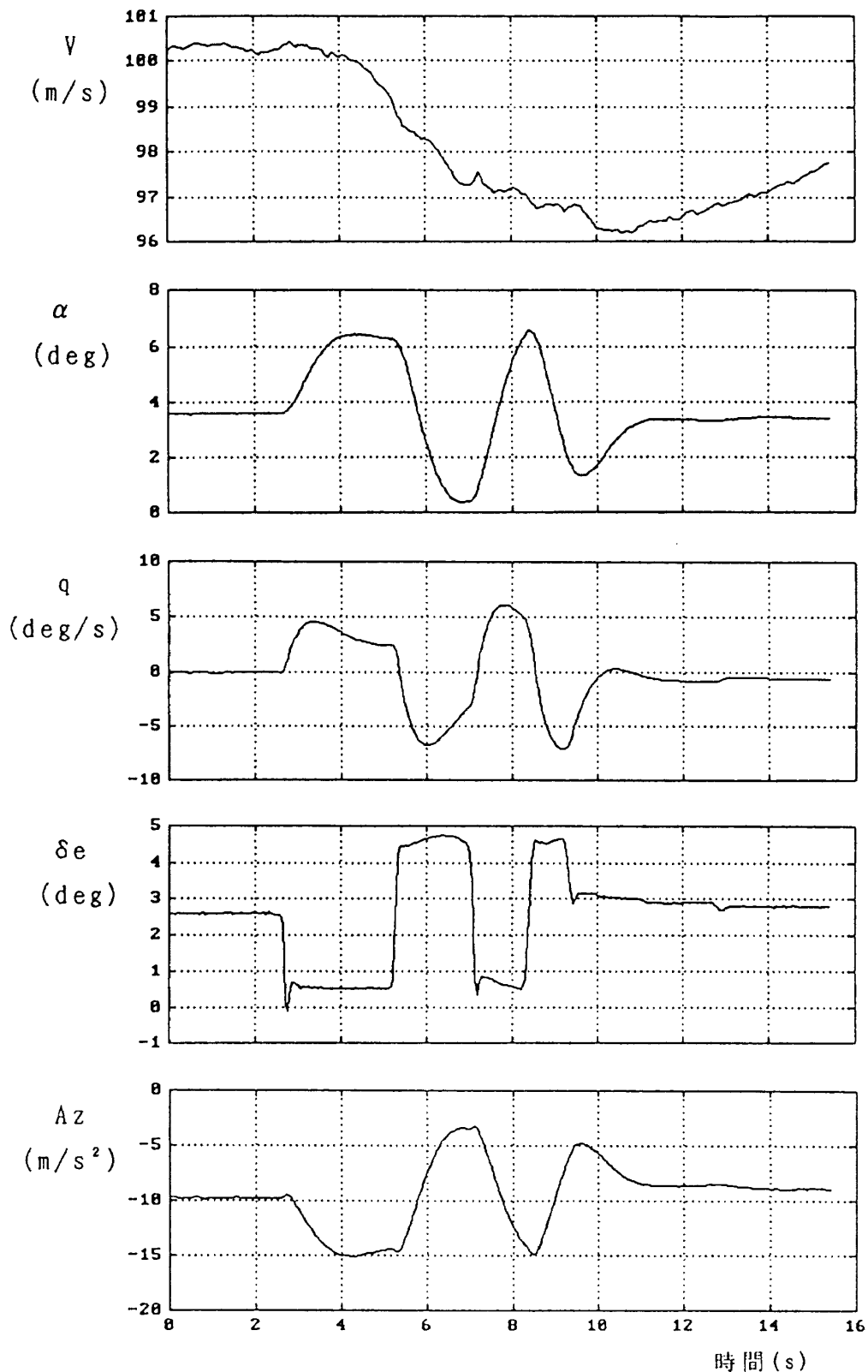


図5.2 メトロⅡによる飛行試験データ(ケース7)

精度のデータ計測システムを用いて、静穏な大気中で実施された。空力微係数の推定値について TLS法と最小二乗法との差がほとんど見られないのは、計測誤差が信号と比べて小さい(データの

S/N比が高い)ためであると考えられる(計測ノイズは信号の1%以下である)。

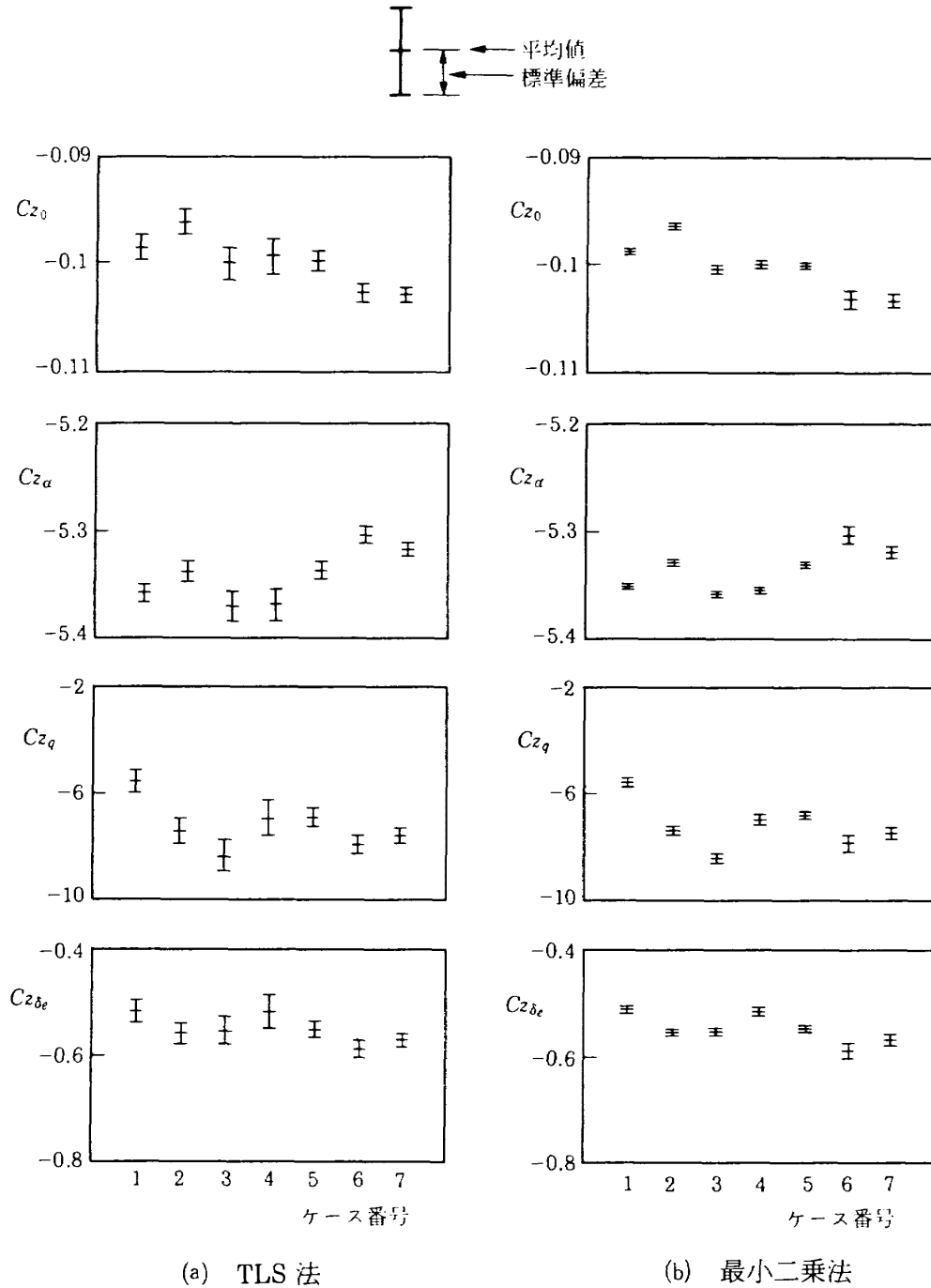


図5.3 飛行試験データを用いた空力微係数の推定結果

6. 結 論

本報告書では、TLS法と最小二乗法の違いを述べ、TLS法の航空機の空力微係数推定への応用例を示した。その要旨を以下に述べる。

(1) TLS法は、各変数に含まれる誤差の標準偏差の比が既知であれば、線形モデル方程式の目的変数のみならず説明変数に誤差が含まれる場合にも、未知係数及び係数のばらつきの標

準偏差を正しく推定することができる。これに対し、最小二乗法は、説明変数に誤差が含まれる場合には未知係数の推定結果にバイアス誤差を含み、係数のばらつきの標準偏差を正しく推定することができない。

(2) 説明変数及び目的変数に含まれる計測誤差が同じ大きさの場合、データのS/N比が小さい程、TLS法と最小二乗法の差は顕著になる。
 (3) 目的変数に含まれる計測誤差が一定の場合、

説明変数に含まれる計測誤差が大きい程、TLS法と最小二乗法の差は顕著になる。

- (4) 説明変数に含まれる計測誤差が一定の場合、目的変数に含まれる計測誤差が小さい程、最小二乗法における係数のばらつきの推定誤差は大きくなるが、TLS法では常に係数のばらつきの推定は正しい。
- (5) 各変数に含まれている計測誤差の標準偏差の比が正しく見積もられなかった場合、TLS法による未知係数の推定結果には誤差が生じる。
- (6) 飛行試験データを用いた航空機の空力微係数推定例において、TLS法は推定結果のばらつきの標準偏差を最小二乗法よりも正しく推定した。しかし、空力微係数の推定値については、TLS法と最小二乗法に顕著な差は見られなかった。これは飛行試験データのS/N比が高いためと考えられる。

TLS法の航空機の空力微係数推定への応用において、次の点が問題であると考えられる。

- (1) 各変数に含まれる計測誤差の標準偏差の比の正確な推定。
- (2) モデル方程式が非線形項を含む場合へのTLS法の適用。

今後、TLS法を他の飛行試験データに対しても適用し、既存の手法との比較検討を行ってゆきたいと考えている。

本報告書の作成に当たり、著者のデルフト工科大学航空工学部での研究を快く受け入れ、メトロⅡによる飛行試験プロジェクトへの参加等、数々の御指導、御助力を頂いたJ. A. Mulder教授に感謝の意を表す。また、M. Laban氏及びH. Muhammad氏と共に研究を行い、有益な討論及び協力が得られたことは幸いであった。さらに、著者にメトロⅡによる飛行試験への搭乗の機会を与えて下さったオランダ国立航空宇宙研究所(NLR)のテストパイロットG. L. Lamers氏、飛行試験データを含む貴重な資料及び助言を提供して下さいましたNLRの研究スタッフJ. Breeman氏及びH. Kannemans氏にも感謝の意を表す。その他、著者のデルフト工科大学航空工学部での研究に対して御助力を頂いた多くの方々に感謝する。

参 考 文 献

- 1) J. P. Norton ; An Introduction to Identification, 1985, Academic Press.
- 2) G. H. Golub, C. F. Van Loan ; An analysis of the total least squares problem, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.17, No.6, (1980/12), pp.883-893.
- 3) L. J. Gleser ; Estimation in a multivariate "errors in variables" regression model : Large sample results, The Annals of Statistics, Vol.9, No.1, 1981, pp.24-44.
- 4) S. Van Huffel ; Analysis of the total least squares problem and its use in parameter estimation, Ph. D. dissertation Leuven University (1987/6).
- 5) 齋藤正彦 ; 線型代数入門, 1966年, 東京大学出版会.
- 6) 児玉慎三, 須田信英 ; システム制御のためのマトリクス理論, 1978年, 計測自動制御学会.
- 7) S. Van Huffel, J. Vandewalle, J. Staar ; The total linear least squares problem : formulation, algorithm and applications, Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), May 7-10, 1984, pp. 328-331.
- 8) D. R. Hill, C. B. Moler ; Experiments in Computational Matrix Algebra, Random House.
- 9) Jane's all the worlds aircraft 1980-81, 1980, Jane's.
- 10) M. Tolsma ; De Identificatie van het symmetrische aerodynamisch model van de Swearingen Metro Ⅱ in een aantal kruiscondities, NLR TR-86065C (1986).

既 刊 報 告

| | | | |
|----------|---|------------|------------------------------|
| TR-1140T | Experimental Studies of Vortex Flaps and Vortex Plates Part 1. 0.53m Span 60° Delta Wing | March 1992 | Kenichi RINOIE |
| TR-1141T | Numerical Simulation of Dynamic Stall of NACA0012 Airfoil Oscillating near Static Stall Angle Using the Navier-Stokes Equations | March 1992 | Koji ISOGAI |
| TR-1142 | 菱形結合翼機の直接揚力・横力制御力の低速風洞試験 Low-Speed Wind Tunnel Study of the Direct Lift and Direct Side-Force Characteristics of a Joined-Wing Airplane | 1992年3月 | 藤田 敏美, 岩崎 昭人 藤枝 郭俊, 滝澤 直人 |
| TR-1143 | 落下塔を用いた液滴の大振幅振動実験 Large Amplitude Shape Oscillations in a Mercury Drop Using a Drop Tower | 1992年3月 | 吉原 正一, 東 久雄 |
| TR-1144 | 低騒音STOL実験機「飛鳥」の速度計及び高度計の位置誤差 Position Error Determination for the Speedometer and Altimeter of the NAL QSTOL Experimental Aircraft "ASKA" | 1992年3月 | STOLプロジェクト 推進本部 飛行試験室 |
| TR-1145 | 小型実験衛星「おりづる」の姿勢運動 Estimation of the Attitude Motion of the Small Satellite "ORIZURU" | 1992年4月 | 中島 厚, 照井 冬人 石井 和人, 波部 宏朗 |
| TR-1146 | ベクトル計算機における多重DOループの高速処理効果とその解析 Analysis and Effects of the Number of Nests of DO Loops during Vector Super-computing | 1992年4月 | 吉田 正廣 |
| TR-1147 | アニメーション用画像データ生成サブルーチン機能について Subroutine Functions for Generating Animation Data | 1992年4月 | 末松 和代 |
| TR-1148 | 金膜の付着強度および潤滑特性におよぼす軸受鋼基板表面清浄度の影響 Effect of surface cleanliness of bearing steel on adhesive strength and tribological properties of sputter-deposited gold films | 1992年4月 | 西村 允, 松井 昭彦 |
| TR-1149 | スクラムジェットノズルの研究 その1 2次元ノズルの性能 STUDIES ON SCRAMJET NOZZLES (1) Performance of Two Dimensional Nozzles | 1992年4月 | スクラムジェットノズル 研究グループ |

航空宇宙技術研究所報告1150号

平成4年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所

東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1

電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス

東京都板橋区桜川2-27-12
