

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1222

多層積層円筒殻の熱変形基礎式について

遠藤修司

1994年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

多層積層円筒殻の熱変形基礎式について*

遠藤修司*¹

Thermoelastic Equations for Multi-Layered Cylindrical Shells*

Shuji ENDO*¹

ABSTRACT

A governing equation for multi-layered cylindrical shells under combined thermal and mechanical loading is derived as a first approximation, consistent with the Kirchhoff-Love hypothesis, in the form of an eighth-order differential equation with respect to the lateral displacement. The shell structure is assumed to consist of homogeneous and isotropic layers having different material properties. It is also assumed that the material properties are constant for each layer. As an analytical example, the deformations and stresses of a multi-layered cylindrical shell under axisymmetric thermal load are analyzed.

Key Words : Structural Analysis, Thermoelasticity, Layered Cylindrical Shell, Thermal Stress, Laminated Construction

概 要

三次元弾性論の基礎方程式に Kirchhoff-Love の仮定を適用することによって、外的負荷として温度変化と表面力の作用を同時に受ける多層積層円筒殻の弾性変形の支配方程式の一次近似表示が、面外変位に関する8階の微分方程式の形で導かれる。多層積層円筒殻の各層はそれぞれ異なる均質等方性材料から構成されているものとし、また、各層内では物性値は一定と仮定される。解析例として、軸対称熱変形問題の解が示される。

1. 緒 言

航空機やロケットなどの高速飛翔体は、飛行荷重の外に空力加熱や推進系からの加熱などによる熱荷重を受けるのであるが、これらの熱から機体内部を守るために、外板の表面を低熱伝導率の熱絶縁材料で覆うなど、外板の構造様式を多層積層構造にして用いる場合がある。このような熱防護の観点から多層積層構造が飛翔体に採用されるとき、その主要な構造要素となる多層積層円筒殻の温度分布、熱変形および熱応力の状態を適確に把握することは、その構造設計の上で重要な課題の一つとなる。筆者¹⁾は、先に、各層が異種の均質等方性材料から成る多層積層円筒殻の熱構造解析を Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似殻理論を用いて行なうことを前提に、その第一段階として、多

層積層円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式を導いた。多層積層殻の力学的理論については、これまでに、殻を構成する材料の異方性をも考慮に入れた多くの研究^{2),3)}がなされている。しかしながら、積層殻の熱変形および熱応力の問題を取り扱った研究は数少ないようである^{2),4),5),6)}。

本報告では、三次元弾性論の基礎方程式に Kirchhoff-Love の仮定を適用することによって、外的負荷として温度変化と表面力の作用を同時に受ける多層積層円筒殻の弾性変形の支配方程式の一次近似表示を、面外変位のみで表わされる微分方程式の形で導く。次いで、熱変形および熱応力を考察の対象として、表面力の作用がない場合の支配方程式を示す。本解析においては異方性弾性には立ち入らず、筆者が以前に導出した“多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式¹⁾”との一貫性と解析の簡単のため、

* 平成5年11月10日受付 (received 10 November 1993)

*¹ 構造力学部 (Structural Mechanics Division)

多層積層円筒殻の各層はそれぞれ均質等方性材料から構成されていて、それらの層は互いに力学的にも熱的にも完全に接合されているものとして取り扱う。簡単な例題として軸対称熱変形問題を取り上げ、その解析解を示し、ごく簡単な数値計算例を示す。

なお、本稿は、日本機械学会第69期（平成3年度）材料力学講演会⁷⁾において、その要旨を発表したものである。

2. 基礎方程式

多層積層円筒殻の各層はそれぞれ異種の均質等方性材料から成るものとし、それらのすべての層は力学的にも熱的にも完全に接合されていて、各層間の界面に垂直な応力成分と界面における変位、ひずみおよび温度はそれぞれ連続であるとする。他方、界面に垂直な応力成分を除いた残りの応力成分と温度勾配は、積層の材料構成が層ごとに異なることから、界面において、それぞれ不連続であるとして取り扱う。もちろん、この界面における応力および温度勾配の不連続性は、層間の接合が完全であると考えているから、界面を形成するそれぞれの層が同一の材料から成るときには、消失して連続となる。

図1に示すような N 層の異種均質等方性材料から成る殻厚 h 、殻厚中央面の半径 R 、長さ $2L$ の多層積層円筒殻を考える。最外層から内に向かって j 番目（ $j=1, 2, \dots, N$ ）の層の肉厚および肉厚中央面の半径をそれぞれ h_j および R_j とする。以下において、添字 j は殻の最外層から内に数えて j 番目の層（任意の層）に係わる諸量を表わす。積層円筒殻の中央断面上に原点をとり、殻厚中央面上に座標 (x, θ) を定め、それに垂直に z 軸をとる。ここに、 x は軸方向距離、 θ は周方向角、そして z は殻厚中央面からの外向き垂直距離を表わす。さらに、各層に対し、その肉厚中央面からそれに垂直外向きに座標 z_j を定義する。座標 z と z_j との間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} z &= (R_j - R) + z_j \\ &; (-h/2 \leq z \leq h/2, -h_j/2 \leq z_j \leq h_j/2, \\ &j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 R_j は R と h_j を用いて次式で表わされる。

$$\begin{aligned} R_j &= R - \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{j-1} h_r - \sum_{r=j+1}^N h_r \right) \\ &; (j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\sum_{r=1}^{j-1}$ における $j=1$ のように j の値によって、和の範囲が空になるときは、その級数の項は零とする。

このように定義した座標系を用いて、先ず、三次元熱弾性論の基礎方程式を多層積層円筒殻に適用して書き下し、次いで、これら三次元の基礎方程式を二次元化して多層積層円筒殻に対する基礎方程式を導く。

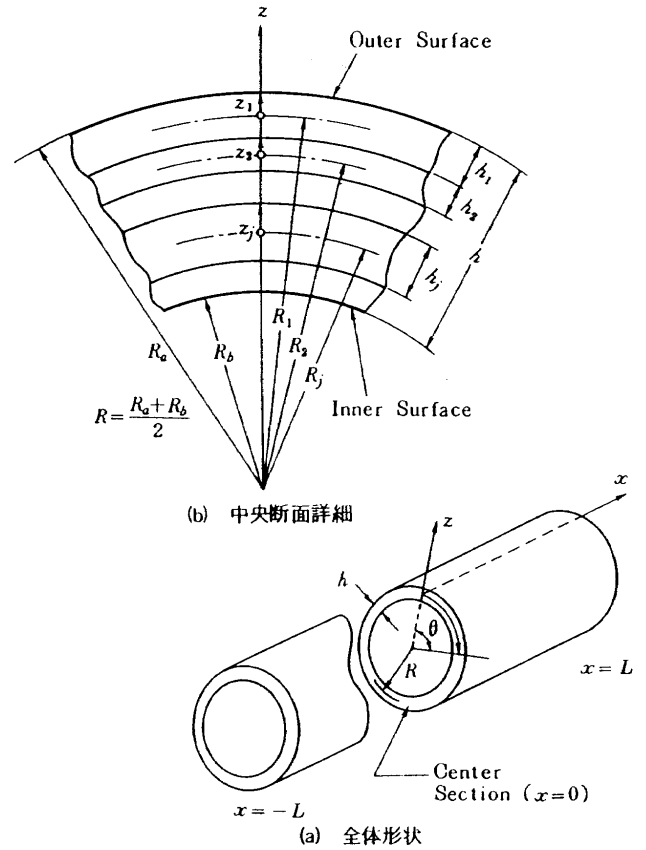


図1 円筒殻形状と座標系

2.1 三次元熱弾性論の基礎方程式

応力は物体内のいたるところで平衡を満足し、ひずみは平衡や材料の物理的性質に直接関係のない形状によって規定され、両者を結び付けるフックの法則は材料の物理的性質に依存する。

(1) 平衡方程式

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_{x,j}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{x\theta,j}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \tau_{zx,j} \right\} &= 0 \\ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \tau_{x\theta,j}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta,j}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta z,j}}{R} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \tau_{\theta z,j} \right\} = 0 \\ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \tau_{zx,j}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta z,j}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta,j}}{R} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \sigma_{z,j} \right\} = 0 \\ &; (\rho_j^- \leq z \leq \rho_j^+) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) ひずみ-変位関係式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u_x / \partial x \\ \epsilon_\theta &= (\partial u_\theta / \partial \theta + w_z) / (R+z) \\ \epsilon_z &= \partial w_z / \partial z \\ \gamma_{x\theta} &= \partial u_\theta / \partial x + (\partial u_x / \partial \theta) / (R+z) \\ \gamma_{\theta z} &= (\partial w_z / \partial \theta - u_\theta) / (R+z) + \partial u_\theta / \partial z \\ \gamma_{zx} &= \partial u_x / \partial z + \partial w_z / \partial x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3) フックの法則

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \{\sigma_{x,j} - \nu_j (\sigma_{\theta,j} + \sigma_{z,j})\} / E_j + \alpha_j T_j \\ \epsilon_\theta &= \{\sigma_{\theta,j} - \nu_j (\sigma_{z,j} + \sigma_{x,j})\} / E_j + \alpha_j T_j \\ \epsilon_z &= \{\sigma_{z,j} - \nu_j (\sigma_{x,j} + \sigma_{\theta,j})\} / E_j + \alpha_j T_j \\ \tau_{x\theta} &= \tau_{x\theta,j} / \{E_j / 2(1 + \nu_j)\} \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{\theta z,j} / \{E_j / 2(1 + \nu_j)\} \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx,j} / \{E_j / 2(1 + \nu_j)\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、平衡方程式においては体積力を零としている。以上の諸式において、 $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$ および τ_{zx} は応力成分、 $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$ および τ_{zx} はひずみ成分、 u_x, u_θ および w_z は変位成分であり、 E および ν はそれぞれ材料のヤング率およびポアソン比で、 α は線膨張率、 T は無ひずみ無応力状態からの温度変化で、添字 j は、前述のように、最外層から j 番目の層についての諸量を表わしている。また、平衡方程式、式(3)、で z の変域を規定している ρ_j^+ および ρ_j^- は、それぞれ j 番目の層の上面および下面における座標 z の値で、式(1)により、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_j^+ &= (R_j - R) + h_j / 2 \\ \rho_j^- &= (R_j - R) - h_j / 2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当然のことながら、また、次の関係がある。

$$\rho_1^+ = h/2, \quad \rho_N^- = -h/2 \quad (7)$$

以後、肩符号 + および - は、各層のそれぞれ上面および下面での諸量を表わすのに用いる。

なお、多層積層円筒殻の各層間の界面は完全に接合されているから、界面において、それに垂直な応力成分は連続である。すなわち界面で次の連続条件が成り立っている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z,j}^- (x, \theta) &= \sigma_{z,j+1}^+ (x, \theta) \\ \tau_{zx,j}^- (x, \theta) &= \tau_{zx,j+1}^+ (x, \theta) \\ \tau_{\theta z,j}^- (x, \theta) &= \tau_{\theta z,j+1}^+ (x, \theta) \\ &; (j=1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.2 多層積層円筒殻に対する基礎方程式

完全な固体として相互に接合された N 層から成る多層積層円筒殻の断面内の任意点におけるひずみを、殻厚中央面のひずみに結び付けるために、単層殻の場合と同様に、Kirchhoff-Love の仮定を導入する。

Kirchhoff-Love の仮定：

(i) 殻厚 h と殻厚中央面の半径 R との比は 1 に比較して微小である。

$$\frac{h}{R} \ll 1 \quad (9)$$

(ii) 変形前に殻厚中央面に垂直な直線素は、変形後も直線性を保ち、中央面に垂直で、長さに変化が生じない。

(iii) 殻厚方向の垂直応力は、他の応力成分に比べて微小で、無視できる。

以下、多層積層円筒殻に対して、Kirchhoff-Love の仮定に基づく、基礎方程式を導く。

(1) 殻断面内の任意点の変位

Kirchhoff-Love の仮定の(ii)により、積層殻断面内の任意点の変位成分 u_x, u_θ および w_z は、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, \theta, z) &= u_x^{(0)}(x, \theta) + z\beta_x(x, \theta) \\ u_\theta(x, \theta, z) &= u_\theta^{(0)}(x, \theta) + z\beta_\theta(x, \theta) \\ w_z(x, \theta) &= w_z^{(0)}(x, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、 $u_x^{(0)}, u_\theta^{(0)}$ および $w_z^{(0)}$ は殻厚中央面の変位である。また、 β_x および β_θ は中央面の法線のそれぞれ θ 軸および x 軸まわりの回転角で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= -\frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial x} \\ \beta_\theta &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(0)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(2) 殻断面内の任意点のひずみ

殻断面内の任意点のひずみは、式(10)の変位成分を三次元弾性論のひずみ-変位関係式、式(4)、の右辺に代入し、 z/R の項を、 $|z| \leq h/2$ の関係に留意して Kirchhoff-Love の仮定の(i)にしたがい、1 に比較して省略すると、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x(x, \theta, z) &= \epsilon_x^{(0)}(x, \theta) + z\kappa_x(x, \theta) \\ \epsilon_\theta(x, \theta, z) &= \epsilon_\theta^{(0)}(x, \theta) + z\kappa_\theta(x, \theta) \\ \tau_{x\theta}(x, \theta, z) &= \tau_{x\theta}^{(0)}(x, \theta) + 2z\tau(x, \theta) \\ \epsilon_z = \tau_{\theta z} = \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

上式の $\epsilon_z = \tau_{\theta z} = \tau_{zx} = 0$ の結果は、Kirchhoff-Love の仮定の(ii)の当然の帰結である。式(12)において、 $\epsilon_x^{(0)}, \epsilon_\theta^{(0)}$ および $\tau_{x\theta}^{(0)}$ は積層殻の中央面の面内ひずみで、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^{(0)} &= \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x}, \quad \epsilon_\theta^{(0)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) \\ \tau_{x\theta}^{(0)} &= \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、 κ_x および κ_θ は中央面の曲率変化、 τ は中央面の捩り率変化で、それぞれ次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} \right) \\ \tau &= -\frac{1}{2R} \left(2 \frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、座標 z と z_j との関係、式(1)、を式(12)の右辺に用いれば、殻断面内の各層の任意点のひずみが、各層の肉厚中央面に立てた法線座標 z_j によって次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^{(0)} + \left\{ (R_j - R) + \frac{h_j}{2} \zeta_j \right\} \kappa_x \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta^{(0)} + \left\{ (R_j - R) + \frac{h_j}{2} \zeta_j \right\} \kappa_\theta \\ \tau_{x\theta} &= \tau_{x\theta}^{(0)} + 2 \left\{ (R_j - R) + \frac{h_j}{2} \zeta_j \right\} \tau \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$; (j=1, 2, \dots, N)$$

ここに、 ζ_j は z_j を無次元化した座標で次式で定義される。

$$\zeta_j = \frac{2z_j}{h_j} ; (-1 \leq \zeta_j \leq 1, j=1, 2, \dots, N) \quad (16)$$

(3) 殻断面内の任意点の温度

Kirchhoff-Love の仮定に基づく単層の円筒殻理論では、殻断面内の温度は、合理的な近似として、殻厚方向に線形に近似される⁸⁾。同様に、多層積層円筒殻においても、殻断面内の温度は、各層ごとに、それぞれの肉厚方向に線形式で与えればよく、次のように表わすことができる¹⁾。

$$T_j(x, \theta, \zeta_j) = T_j^{(0)}(x, \theta) + \zeta_j T_j^{(1)}(x, \theta) ; (-1 \leq \zeta_j \leq 1, j=1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

各層の上下面における温度を、それぞれ T_j^+ および T_j^- と記すならば、上式により次の関係を得る。

$$T_j^{(0)} = \frac{T_j^+ + T_j^-}{2}, \quad T_j^{(1)} = \frac{T_j^+ - T_j^-}{2} \quad (18)$$

すなわち、 $T_j^{(0)}$ および $T_j^{(1)}$ は、無次元法線座標 ζ_j に基づく、各層の肉厚方向のそれぞれ平均温度および温度勾配であることが判る。なお、実座標 z_j を使えば、平均温度はそのまま $T_j^{(0)}$ で与えられるが、温度勾配は $2T_j^{(1)}/h_j$ となる。

さて、積層殻のすべての層は熱的に完全に接合されているから、隣接する各層の界面で、温度ならびに熱流束（熱流の方向に直交する面を通しての単位面積、単位時間当たりの熱エネルギーの移動量）の連続性が成立する。この場合、積層円筒殻断面内の各層の温度は、殻厚方向の任意の2点の温度が与えられると、定められるのであって、例えば、式(17)の右辺の $T_j^{(0)}(x, \theta)$ および $T_j^{(1)}(x, \theta)$ は、第1層と第2層のそれぞれの肉厚方向の平均温度 $T_1^{(0)}(x, \theta)$ と $T_2^{(0)}(x, \theta)$ とを用いて、それぞれ次のように表わされる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} T_j^{(0)} &= T_1^{(0)} - A_j^{(0)} (T_1^{(0)} - T_2^{(0)}) \\ T_j^{(1)} &= A_j^{(1)} (T_1^{(0)} - T_2^{(0)}) \end{aligned} \right\} ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_j^{(0)} &= \sum_{r=1}^{j-1} \left(\frac{h_r}{\lambda_r} + \frac{h_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) / \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right) \\ A_j^{(1)} &= \frac{h_j}{\lambda_j} / \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし、 λ_j は各層の材料の熱伝導率である。すなわち、式(17)および式(19)により、多層積層殻断面内の温度分布は、 $T_1^{(0)}$ と $T_2^{(0)}$ とによってすべて表わされるのである。なお、式(19)の右辺の $T_1^{(0)}$ および $T_1^{(0)} - T_2^{(0)}$ は、式(17)と式(19)それ自身の関係を用いて、殻厚方向の他の任意の2点の温度による表現に容易に書き換えられる。実用の問題で既知量として与えられることの多い積層殻外表面の温度 T_1^+ と内表面温度 T_2^- とを用いて表わせば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} T_1^{(0)} &= \frac{(A_N^{(0)} + A_N^{(1)}) T_1^+ + A_1^{(1)} T_2^-}{A_1^{(1)} + A_N^{(0)} + A_N^{(1)}} \\ T_1^{(0)} - T_2^{(0)} &= \frac{T_1^+ - T_2^-}{A_1^{(1)} + A_N^{(0)} + A_N^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、式(20)から、次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{h_1}{\lambda_1} / \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right) \\ A_N^{(0)} + A_N^{(1)} &= \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + 2 \sum_{r=2}^N \frac{h_r}{\lambda_r} \right) / \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right) \\ A_1^{(1)} + A_N^{(0)} + A_N^{(1)} &= 2 \sum_{r=1}^N \frac{h_r}{\lambda_r} / \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(4) 殻断面内の任意点の応力

Kirchhoff-Love の仮定(ii)および(iii)により、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z = \gamma_{\theta z} = \tau_{zx} &= 0 \\ \sigma_{z,j} &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これを考慮すると、積層円筒殻の各層内の任意点の応力は、フックの法則、式(5)、にしたがい次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \{ \varepsilon_x + \nu_j \varepsilon_\theta - (1+\nu_j) \alpha_j T_j \} \\ \sigma_{\theta,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \{ \nu_j \varepsilon_x + \varepsilon_\theta - (1+\nu_j) \alpha_j T_j \} \\ \tau_{x\theta,j} &= \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \gamma_{x\theta} \end{aligned} \right\} ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

ところで、式(19)および式(17)に見るように、積層円筒殻断面内の各層のひずみおよび温度は、それぞれの層の肉厚中央面に定義した無次元法線座標 ζ_j の線形式で表わされるから、殻断面内の各層の応力もこれに応じてそれぞれの層の肉厚方向に線形に分布することになる。具体的に、式(24)の $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ および $\gamma_{x\theta}$ ならびに式(17)の T_j を式(24)のそれぞれの右辺に代入すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[\varepsilon_x^{(0)} + \nu_j \varepsilon_\theta^{(0)} + (R_j - R) (\kappa_x + \nu_j \kappa_\theta) \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu_j) \alpha_j T_j^{(0)} + \frac{h_j}{2} \zeta_j \left\{ \kappa_x + \nu_j \kappa_\theta - \frac{2(1+\nu_j)}{h_j} \alpha_j T_j^{(1)} \right\} \right] \\ \sigma_{\theta,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[\nu_j \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_\theta^{(0)} + (R_j - R) (\nu_j \kappa_x + \kappa_\theta) \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu_j) \alpha_j T_j^{(0)} + \frac{h_j}{2} \zeta_j \left\{ \nu_j \kappa_x + \kappa_\theta - \frac{2(1+\nu_j)}{h_j} \alpha_j T_j^{(1)} \right\} \right] \\ \tau_{x\theta,j} &= \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \left\{ \gamma_{x\theta}^{(0)} + 2(R_j - R) \tau + h_j \zeta_j \tau \right\} \end{aligned} \right\} ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (25)$$

(5) 合応力およびモーメント

変位，ひずみおよび温度の表現が二次元化されたのに対応して，応力も二次元化する必要がある。そのために，殻厚断面に分布して作用する三次元応力を単純化して考え，殻厚中央面の単位幅に働く静的に等価な合応力およびモーメントで置き換える。 x 軸に垂直な断面での殻厚中央面の単位幅は， z にしたがって $1+z/R$ と変化し，要素断面は扇形になるのであるが，ここでは，この影響を，Kirchhoff-Loveの仮定の(i)にしたがい， z/R が1に比べて微小量であるとして省略し，合応力およびモーメントを次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= \sum_{j=1}^N \int_{\rho_j^-}^{\rho_j^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{x,j} \\ \sigma_{\theta,j} \\ \tau_{x\theta,j} \\ \tau_{zx,j} \\ \tau_{\theta z,j} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \sum_{j=1}^N \int_{\rho_j^-}^{\rho_j^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{x,j} \\ \sigma_{\theta,j} \\ \tau_{x\theta,j} \end{Bmatrix} z dz \\ N_{x\theta} &= N_{\theta x}, \quad M_{x\theta} = M_{\theta x} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

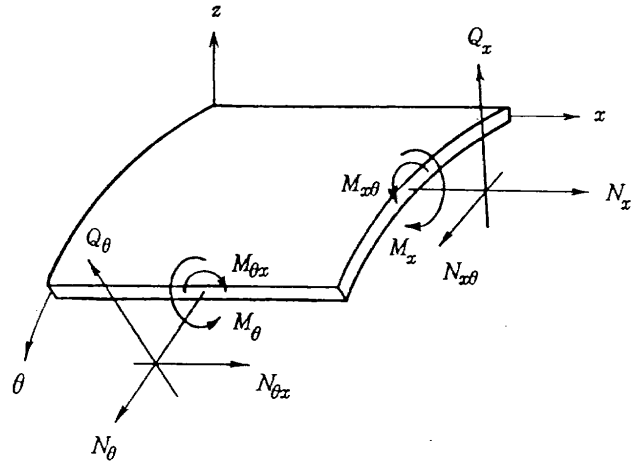


図2 円筒殻の面素に作用する合応力およびモーメント

このとき，隣り合う層の界面上に作用する応力，また，それによるモーメントは，連続条件，式(8)，により互いに打ち消し合い，積層円筒殻の外表面および内表面に作用する表面力のみが，また，それによるモーメントのみが残ることになる。こうして導かれる平衡方程式は，Kirchhoff-Loveの仮定の下では，その式に含まれる $h/2R$ なる項が1に比べて微小量として省略できることから，少し簡単化され，次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} + q_\theta &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + q_z &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x + m_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta + m_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに， q_x, q_θ および q_z ならびに m_x および m_θ は，積層円筒殻の外表面および内表面に作用している表面力を殻厚中央面に作用する単位面積当りの力およびモーメントに置き換えたときの，それぞれ x, θ および z 方向の分力ならびに x および θ 面に関するモーメントであって，次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \tau_{zx,1}^+ - \tau_{zx,N}^- \\ q_\theta &= \tau_{\theta z,1}^+ - \tau_{\theta z,N}^- \\ q_z &= \sigma_{z,1}^+ - \sigma_{z,N}^- \\ m_x &= \frac{h}{2} (\tau_{zx,1}^+ + \tau_{zx,N}^-) \\ m_\theta &= \frac{h}{2} (\tau_{\theta z,1}^+ + \tau_{\theta z,N}^-) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(6) 平衡方程式

合応力によって表わされる力の平衡方程式は，式(3)の三つの式の各々を z に関して ρ_j^- から ρ_j^+ まで積分し， j に1から N までの値を入れて加え合わせることににより，また，モーメントの平衡方程式は，式(3)の第1式および第2式の両辺に z を乗じ，同じ積分範囲で z について積分し， j に1から N までの値を入れて加え合わせることににより得られる。

(7) 構成方程式

積層円筒殻断面の合応力およびモーメントと殻厚中央面

のひずみとの関係を記述する構成方程式は、式(28)の $\sigma_{x,j}$, $\sigma_{\theta,j}$ および $\tau_{x\theta,j}$ に式(28)を代入し、定積分を実行すれば、マトリックス表示で次の形に書ける。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{x\theta} & 0 & B_{xx} & B_{x\theta} & 0 \\ A_{x\theta} & A_{xx} & 0 & B_{x\theta} & B_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} & 0 & 0 & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{x\theta} & 0 & D_{xx} & D_{x\theta} & 0 \\ B_{x\theta} & B_{xx} & 0 & D_{x\theta} & D_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & B_{ss} & 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \tau_{x\theta}^{(0)} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ 2\tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_T \\ N_T \\ 0 \\ M_T \\ M_T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{xx} &= \sum_{j=1}^N K_j, & A_{x\theta} &= \sum_{j=1}^N \nu_j K_j, & A_{ss} &= \sum_{j=1}^N \frac{1-\nu_j}{2} K_j \\ B_{xx} &= \sum_{j=1}^N (R_j - R) K_j, & B_{x\theta} &= \sum_{j=1}^N \nu_j (R_j - R) K_j \\ B_{ss} &= \sum_{j=1}^N \frac{1-\nu_j}{2} (R_j - R) K_j \\ D_{xx} &= \sum_{j=1}^N \{D_j + (R_j - R)^2 K_j\} \\ D_{x\theta} &= \sum_{j=1}^N \nu_j \{D_j + (R_j - R)^2 K_j\} \\ D_{ss} &= \sum_{j=1}^N \frac{1-\nu_j}{2} \{D_j + (R_j - R)^2 K_j\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし、 K_j および D_j は、それぞれ各層の伸び剛性および曲げ剛性で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_j &= \frac{E_j h_j}{1-\nu_j^2} \\ D_j &= \frac{E_j h_j^3}{12(1-\nu_j^2)} = \frac{h_j^2}{12} K_j \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

また、 N_T および M_T はそれぞれ次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} N_T &= \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j T_j^{(0)} \\ M_T &= \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j \left\{ \frac{2}{h_j} D_j T_j^{(1)} + (R_j - R) K_j T_j^{(0)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

構成方程式、式(31)の中には横せん断力 Q_x および Q_θ についての表示は現われない。これは、Kirchhoff-Loveの仮定に基づく殻理論では殻厚方向のせん断応力から生じる面外せん断変形を無視 ($\tau_{\theta z} = \tau_{zx} = 0$) しているためで、 Q_x および Q_θ は、変形とは無関係に面内力とモーメントの分布が定まると、平衡方程式、式(29)より自動的に定まるからである。また、積層構造では、各層の構成材料が、ここで取り

扱っているように、すべて均質等方性であっても、式(31)に見るように、曲げ-伸びのカップリング効果が現われる。積層構成が殻厚中央面に対して正確に対称であるならば、そのときのみ、すべての B_{ij} ($i, j = x, \theta, s$) の値が零となつて、このカップリング効果は消失する。

なお、式(31)を単層の場合に適用すると、その結果は、温度変化を考慮した Love-Reissner の円筒殻に対する構成方程式⁸⁾と完全に一致する。

3. 支配方程式

前章では、多層積層円筒殻に作用する合応力およびモーメントを定義して、これらの中に存在する平衡方程式を導き、さらに、合応力およびモーメントと殻厚中央面のひずみとの間の関係を記述する構成方程式を導いた。本章では、構成方程式を平衡方程式と結び付け、多層積層円筒殻に対する弾性変形の支配方程式を、表面力の作用と温度変化を考慮して、導出する。

3.1 表面力および温度が任意に分布する場合

平衡方程式、式(29)、および構成方程式、式(31)、は、結局、11個の未知関数 ($N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}, Q_x, Q_\theta, u_x^{(0)}, u_\theta^{(0)}, w_z^{(0)}$) に対して、11個の方程式を与えている。この連立方程式を解く第一歩は、横せん断力 Q_x および Q_θ が変形とは無関係に平衡の条件から定まることに留意し、式(29)の第4および第5式を使って最初の三つの平衡方程式の組から Q_x および Q_θ を消去することである。その結果は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + (q_\theta + \frac{m_\theta}{R}) &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} \\ + (q_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

上式および構成方程式により、もし、面内力およびモーメントが定められるならば、 Q_x および Q_θ は、それぞれ式(29)の第4および第5式から自動的に定まるのは明らかである。

以下の議論は、簡単のため、次に示す無次元量および演算子を用いて展開する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= \frac{N_x}{A_{xx}}, & \hat{N}_\theta &= \frac{N_\theta}{A_{xx}}, & \hat{N}_{x\theta} &= \hat{N}_{\theta x} = \frac{N_{x\theta}}{A_{xx}} \\ \hat{M}_x &= \frac{M_x}{A_{xx} R}, & \hat{M}_\theta &= \frac{M_\theta}{A_{xx} R}, & \hat{M}_{x\theta} &= \hat{M}_{\theta x} = \frac{M_{x\theta}}{A_{xx} R} \\ \hat{q}_x &= \frac{R q_x}{A_{xx}}, & \hat{q}_\theta &= \frac{R q_\theta}{A_{xx}}, & \hat{q}_z &= \frac{R q_z}{A_{xx}} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{m}_x &= \frac{m_x}{A_{xx}}, & \hat{m}_\theta &= \frac{m_\theta}{A_{xx}} \\
 u &= \frac{u_x^{(0)}}{R}, & v &= \frac{u_\theta^{(0)}}{R}, & w &= \frac{w_z^{(0)}}{R} \\
 \hat{N}_r &= \frac{N_r}{A_{xx}}, & \hat{M}_r &= \frac{M_r}{A_{xx}R} \\
 y &= \frac{x}{R}, & l &= \frac{L}{R}, & (\cdot)' &= \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \\
 (\cdot)' &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot), & \nabla^2(\cdot) &= (\cdot)'' + (\cdot)''
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

そうすると、式35の平衡方程式は無次元の形で次のように表わされる。

$$\begin{cases}
 \hat{N}'_x + \hat{N}'_{x\theta} + \hat{q}_x = 0 \\
 \hat{N}'_{x\theta} + \hat{M}'_{x\theta} + \hat{N}'_\theta + \hat{M}'_\theta + (\hat{q}_\theta + \hat{m}_\theta) = 0 \\
 \hat{M}''_x + 2\hat{M}''_{x\theta} + \hat{M}''_\theta - \hat{N}'_\theta + (\hat{q}_z + \hat{m}'_x + \hat{m}'_\theta) = 0
 \end{cases}
 \tag{37}$$

構成方程式、式31、に式33および式34を適用して、合応力およびモーメントを変位で表わすと、無次元の形で次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_x &= u' + \left(\frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) v' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' \\
 &\quad - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' + \frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} w - \hat{N}_r \\
 \hat{N}_\theta &= \frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} u' + \left(1 + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right) v' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' \\
 &\quad - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + w - \hat{N}_r \\
 \hat{N}_{x\theta} &= \hat{N}_{\theta x} = \frac{A_{ss}}{A_{xx}} u' + \left(\frac{A_{ss}}{A_{xx}} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} \right) v' \\
 &\quad - \frac{2}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} w'' \\
 \hat{M}_x &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} u' + \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} \right) v' \\
 &\quad - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w - \hat{M}_r \\
 \hat{M}_\theta &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} u' + \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) v' \\
 &\quad - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w - \hat{M}_r \\
 \hat{M}_{x\theta} &= \hat{M}_{\theta x} = \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} u' + \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{ss}}{R^2} \right) v' \\
 &\quad - \frac{2}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{ss}}{R^2} w''
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

なお、積層殻の各層内の任意点の応力と変位との関係は、式35に、上と同様に、式33および式34の関係を代入し、かつ、式36の無次元変位 u, v および w を用いれば、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[u' + \nu_j (v' + w) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) (w'' + \nu_j (w'' - v')) \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \right] \\
 \sigma_{\theta,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[\nu_j u' + v' + w \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) (\nu_j w'' + w'' - v') \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \right] \\
 \tau_{x\theta,j} &= \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \left\{ v' + u' - 2 \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(w'' - \frac{v'}{2} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

式37に、式38の関係を用いれば、変位成分 u, v および w で書かれた多層積層円筒殻の平衡方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
 G_1 u'' + G_2 u'' + G_3 v'' + G_4 (w'''' + w''''') + G_5 w' \\
 &= \hat{N}'_r - \hat{q}_x \\
 H_1 u'' + H_2 v'' + H_3 v'' + H_4 (w'''' + w''''') + H_5 w' \\
 &= \hat{N}'_r + \hat{M}'_r - \hat{q}_\theta - \hat{m}_\theta \\
 K_1 (u'''' + u''''') + K_2 u' + K_3 (v'''' + v''''') + K_4 v' \\
 &\quad + K_5 \nabla^4 w + K_6 w'' + K_7 w'' + K_8 w \\
 &= -\hat{N}'_r + \hat{M}'_r + \hat{M}'_r - \hat{q}_z - \hat{m}'_x - \hat{m}'_\theta
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 1, & G_2 &= \frac{A_{ss}}{A_{xx}}, & G_3 &= \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{A_{xx}} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta} + B_{ss}}{R} \\
 G_4 &= -\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R}, & G_5 &= \frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} \\
 H_1 &= \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{A_{xx}} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta} + B_{ss}}{R} \\
 H_2 &= \frac{A_{ss}}{A_{xx}} + \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{2B_{ss}}{R} + \frac{D_{ss}}{R^2} \right) \\
 H_3 &= 1 + \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{2B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\
 H_4 &= -\frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right), & H_5 &= 1 + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \\
 K_1 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R}, & K_2 &= -\frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} \\
 K_3 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right), & K_4 &= -\left(1 + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right) \\
 K_5 &= -\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2}, & K_6 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{2B_{x\theta}}{R} \\
 K_7 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{2B_{xx}}{R}, & K_8 &= -1
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

式40の最初の二つの式から、先ず v を消去し、次いで u を消去すると、 u と v とが分離され、 u および v は変位成分 w によりそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u &= f_1 w'''' + f_2 w'''' + f_3 w'''' + f_4 w'''' + f_5 w'''' \\ &\quad + f_6 \hat{N}_T'''' + f_7 \hat{N}_T'''' + f_8 \hat{M}_T'''' \\ &\quad + f_9 \hat{q}_x'' + f_{10} \hat{q}_x'' + f_{11} \hat{q}_\theta'' + f_{12} \hat{m}_\theta'' \\ \mathcal{L}v &= g_1 w'''' + g_2 w'''' + g_3 w'''' + g_4 w'''' + g_5 w'''' \\ &\quad + g_6 \hat{N}_T'''' + g_7 \hat{N}_T'''' + g_8 \hat{M}_T'''' + g_9 \hat{M}_T'''' \\ &\quad + g_{10} \hat{q}_x'' + g_{11} \hat{q}_\theta'' + g_{12} \hat{q}_\theta'' + g_{13} \hat{m}_\theta'' + g_{14} \hat{m}_\theta'' \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ただし、 \mathcal{L} は線形微分演算子で次式で定義される。

$$\mathcal{L}(\) = L_1(\)'''' + L_2(\)'''' + L_3(\)'''' \quad (43)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= G_1 H_2 \\ L_2 &= G_1 H_3 + G_2 H_2 - G_3 H_1 \\ L_3 &= G_2 H_3 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -G_4 H_2, \quad f_2 = G_3 H_4 - G_4 H_2 - G_4 H_3 \\ f_3 &= G_3 H_4 - G_4 H_3, \quad f_4 = -G_5 H_2 \\ f_5 &= G_3 H_5 - G_5 H_3, \quad f_6 = H_2, \quad f_7 = -(G_3 - H_3) \\ f_8 &= -G_3, \quad f_9 = -H_2, \quad f_{10} = -H_3, \quad f_{11} = G_3 \\ f_{12} &= G_3 \\ g_1 &= -(G_1 H_4 - G_4 H_1), \quad g_2 = -(G_1 H_4 + G_2 H_4 - G_4 H_1) \\ g_3 &= -G_2 H_4, \quad g_4 = -(G_1 H_5 - G_5 H_1) \\ g_5 &= -G_2 H_5, \quad g_6 = G_1 - H_1, \quad g_7 = G_2, \quad g_8 = G_1 \\ g_9 &= G_2, \quad g_{10} = H_1, \quad g_{11} = -G_1, \quad g_{12} = -G_2 \\ g_{13} &= -G_1, \quad g_{14} = -G_2 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

式(40)の第3式に演算子 \mathcal{L} を作用させた後に、式(42)の $\mathcal{L}u$ および $\mathcal{L}v$ を代入し、 u および v を消去すれば、最終的に変位成分 w のみで表わされる多層積層円筒殻の支配方程式が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} &a_{81} w'''' + a_{82} w'''' + a_{83} w'''' + a_{84} w'''' + a_{85} w'''' \\ &\quad + a_{61} w'''' + a_{62} w'''' + a_{63} w'''' + a_{64} w'''' \\ &\quad + a_{41} w'''' + a_{42} w'''' + a_{43} w'''' \\ &= -(b_{61} \hat{N}_T'''' + b_{62} \hat{N}_T'''' + b_{63} \hat{N}_T'''' + b_{64} \hat{N}_T'''' \\ &\quad + b_{41} \hat{N}_T'''' + b_{42} \hat{N}_T'''' + b_{43} \hat{N}_T'''') \\ &\quad + (c_{61} \hat{M}_T'''' + c_{62} \hat{M}_T'''' + c_{63} \hat{M}_T'''' + c_{64} \hat{M}_T'''' \\ &\quad + c_{41} \hat{M}_T'''' + c_{42} \hat{M}_T'''') \\ &\quad - \{ (d_{51} \hat{q}_x'' + d_{52} \hat{q}_x'' + d_{53} \hat{q}_x'' + d_{31} \hat{q}_x'' + d_{32} \hat{q}_x'') \\ &\quad + (e_{51} \hat{q}_\theta'' + e_{52} \hat{q}_\theta'' + e_{53} \hat{q}_\theta'' + e_{31} \hat{q}_\theta'' + e_{32} \hat{q}_\theta'') + \mathcal{L}\hat{q}_z \} \\ &\quad - \{ \mathcal{L}\hat{m}_\theta + (p_{51} \hat{m}_\theta'' + p_{52} \hat{m}_\theta'' + p_{53} \hat{m}_\theta'' \\ &\quad + p_{31} \hat{m}_\theta'' + p_{32} \hat{m}_\theta'') \} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_{81} &= K_1 f_1 + L_1 K_5 \\ a_{82} &= K_1 (f_1 + f_2) + K_3 g_1 + (2L_1 + L_2) K_5 \\ a_{83} &= K_1 (f_2 + f_3) + K_3 (g_1 + g_2) + (L_1 + 2L_2 + L_3) K_5 \\ a_{84} &= K_1 f_3 + K_3 (g_2 + g_3) + (L_2 + 2L_3) K_5 \\ a_{85} &= K_3 g_3 + L_3 K_5 \\ a_{61} &= K_1 f_4 + K_2 f_1 + L_1 K_6 \\ a_{62} &= K_1 (f_4 + f_5) + K_2 f_2 + K_3 g_4 + K_4 g_1 + L_1 K_7 + L_2 K_6 \\ a_{63} &= K_1 f_5 + K_2 f_3 + K_3 (g_4 + g_5) + K_4 g_2 + L_2 K_7 + L_3 K_6 \\ a_{64} &= K_3 g_5 + K_4 g_3 + L_3 K_7 \\ a_{41} &= K_2 f_4 + L_1 K_8 \\ a_{42} &= K_2 f_5 + K_4 g_4 + L_2 K_8 \\ a_{43} &= K_4 g_5 + L_3 K_8 \\ b_{61} &= K_1 f_6, \quad b_{62} = K_1 (f_6 + f_7) + K_3 g_6 \\ b_{63} &= K_1 f_7 + K_3 (g_6 + g_7), \quad b_{64} = K_3 g_7 \\ b_{41} &= L_1 + K_2 f_6, \quad b_{42} = L_2 + K_2 f_7 + K_4 g_6 \\ b_{43} &= L_3 + K_4 g_7 \\ c_{61} &= L_1, \quad c_{62} = L_1 + L_2 - K_1 f_8 - K_3 g_8 \\ c_{63} &= L_2 + L_3 - K_1 f_8 - K_3 (g_8 + g_9) \\ c_{64} &= L_3 - K_3 g_9, \quad c_{41} = -(K_2 f_8 + K_4 g_8) \\ c_{42} &= -K_4 g_9 \\ d_{51} &= K_1 f_9, \quad d_{52} = K_1 (f_9 + f_{10}) + K_3 g_{10} \\ d_{53} &= K_1 f_{10} + K_3 g_{10}, \quad d_{31} = K_2 f_9 \\ d_{32} &= K_2 f_{10} + K_4 g_{10} \\ e_{51} &= K_1 f_{11} + K_3 g_{11}, \quad e_{52} = K_1 f_{11} + K_3 (g_{11} + g_{12}) \\ e_{53} &= K_3 g_{12}, \quad e_{31} = K_2 f_{11} + K_4 g_{11}, \quad e_{32} = K_4 g_{12} \\ p_{51} &= L_1 + K_1 f_{12} + K_3 g_{13} \\ p_{52} &= L_2 + K_1 f_{12} + K_3 (g_{13} + g_{14}), \quad p_{53} = L_3 + K_3 g_{14} \\ p_{31} &= K_2 f_{12} + K_4 g_{13}, \quad p_{32} = K_4 g_{14} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ここに導かれた多層積層円筒殻に対する支配方程式、式(46)、ならびに変位成分 u および v と変位成分 w との関係式、式(42)、は、前章に示した多層積層円筒殻の一次近似精度での基礎方程式から出発して、その導出過程でいかなる省略も行わずに得られたのであるから、それらの基礎方程式に厳密に対応する一次近似の表示である。式(46)および式(42)の式の中のそれぞれの諸係数を、式(43)、(44)、(45)、(47)および式(41)を用いて具体的に書き下すと、構成方程式、式(38)、の式の中の諸係数と同様に A_{ij}/A_{xx} 、 $B_{ij}/A_{xx}R$ および $D_{ij}/A_{xx}R^2$ ；($i, j = x, \theta, s$)、で表わされる定数となる。しかしながら、その具体的な表示は非常に煩雑な形である。ところで、式(32)の関係を用いれば判るように、 A_{ij}/A_{xx} 、 $B_{ij}/A_{xx}R$ および $D_{ij}/A_{xx}R^2$ には、それぞれ取り得る値の範囲があって、例えば、 $A_{x\theta}/A_{xx}$ 、 $B_{x\theta}/A_{xx}R$ および $D_{x\theta}/A_{xx}R^2$ について見てみると、これらは、それぞれ ν_j 、 $\nu_j(R_j - R)/R$ および $\nu_j \{ h_j^2/12R^2 + (R_j - R)^2/R^2 \}$ のいずれも伸び剛性 K_j を

重みとする加重平均を表わしており、次の関係が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq N} \nu_j &\leq \nu_A \leq \max_{1 \leq j \leq N} \nu_j \\ \min_{1 \leq j \leq N} \nu_j \left(\frac{R_j - R}{R} \right) &\leq \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \leq \max_{1 \leq j \leq N} \nu_j \left(\frac{R_j - R}{R} \right) \\ \min_{1 \leq j \leq N} \nu_j \left\{ \frac{h_j^2}{12R^2} + \left(\frac{R_j - R}{R} \right)^2 \right\} &\leq \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \nu_j \left\{ \frac{h_j^2}{12R^2} + \left(\frac{R_j - R}{R} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ただし、上式の第1式では、以後の式の展開の便利のため、ポアソン比 ν_j の加重平均を意味する $A_{x\theta}/A_{xx}$ を簡潔に ν_A と記している。すなわち、

$$\frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} = \nu_A \quad (49)$$

そうすると、 A_{ss}/A_{xx} も、また、次のように書くことができる。

$$\frac{A_{ss}}{A_{xx}} = \frac{1 - \nu_A}{2} \quad (50)$$

ところで、式(48)の第1式の ν_A の変域は、具体的には各層の材料のポアソン比 ν_j の値によって定まる。一般的に言えば、 ν_j の取り得る値の変域は、ヤング率、せん断弾性率および体積弾性率がそれぞれ正であるという制約から、 $-1 < \nu_j < 0.5$ 、となる。しかし、現実の等方性材料でポアソン比が零あるいは負のものを採るのは容易ではない。そこで、ここでは現実的に ν_j の加重平均 ν_A の大きさについて次の仮定を設ける。

$$h/R \ll \nu_A < 0.5 \quad (51)$$

つまり、 ν_A は常に正で、その大きさは0.5よりは小さいが、極端に小さくはなく、 h/R の値と比べると、それを無視し得る程度の大きさを持つものとするのである。さて、次に、式(48)の第2および第3式を見てみると、この両式に現われる因子 $(R_j - R)/R$ および h_j/R には、Kirchhoff-Love の仮定の下では、当然、式(9)により、それぞれ次の関係のあることが明らかである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{|R_j - R|}{R} &\ll 1 \\ \frac{h_j}{R} &\ll 1 \end{aligned} \right\} ; (j=1, 2, \dots, N) \quad (52)$$

このことに留意すると、式(48)の第2および第3式から、それぞれ次の関係を得る。

$$\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{|B_{x\theta}|}{R} \ll 1, \quad \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} \ll 1$$

この外の $B_{ij}/A_{xx}R$ および $D_{ij}/A_{xx}R^2$ についても同様の関係が得られるから、これらをまとめて書くと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{|B_{ij}|}{R} &\ll 1 \\ \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{ij}}{R^2} &\ll 1 \end{aligned} \right\} ; (i, j=x, \theta, s) \quad (53)$$

したがって、支配方程式、式(46)、を始めとする諸式は、ポアソン比の大きさに対する現実的な仮定、式(51)、と Kirchhoff-Love の仮定の下での合理的な関係、式(53)、とを用いることにより、一次近似精度の範囲で、さらに省略を進めることができるのである。

結局、式(46)に対して式(51)および式(53)に基づく省略を行ない、全体を共通係数 A_{ss}/A_{xx} で割り、整理することによって、多層積層円筒殻の一次近似理論における支配方程式が次の形に求まる。

$$\left. \begin{aligned} &\mathcal{V}^4 (\mathcal{V}^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' \\ &+ a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' + a_{63}^0 w'''' + a_{42}^0 w'''' \\ &= \frac{4k^4}{1 - \nu_A^2} \left[\{ (1 - \nu_A) \mathcal{V}^2 \hat{N}_T'' \right. \\ &+ b_{61}^0 \hat{N}_T'''' + b_{62}^0 \hat{N}_T'''' + b_{63}^0 \hat{N}_T'''' + b_{64}^0 (\hat{N}_T'''' + \hat{N}_T''') \\ &- \{ \mathcal{V}^6 \hat{M}_T + (2 + \nu_A) \hat{M}_T'' + \hat{M}_T'''' \} \\ &+ (\nu_A \hat{q}_x'' - \hat{q}_x'' - d_{51}^0 \hat{q}_x'' - d_{52}^0 \hat{q}_x'' - d_{53}^0 \hat{q}_x''') \\ &+ \{ (2 + \nu_A) \hat{q}_\theta'' + \hat{q}_\theta'' - e_{51}^0 \hat{q}_\theta'' - e_{52}^0 \hat{q}_\theta'' - e_{53}^0 \hat{q}_\theta'' \} + \mathcal{V}^4 \hat{q}_z \\ &+ \mathcal{V}^4 \hat{m}_x + \{ \mathcal{V}^4 \hat{m}_\theta + (2 + \nu_A) \hat{m}_\theta'' + \hat{m}_\theta'''' \} \end{aligned} \right] \quad (54)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} 4k^4 &= \frac{1 - \nu_A^2}{\delta} \\ \delta &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} - \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} a_{61}^0 &= \frac{2}{\delta} \left(\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) - 2 \\ a_{62}^0 &= \frac{4}{\delta} \left\{ \frac{\nu_A}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{2R^2} \right) - \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{x\theta}}{R} - \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \right\} - 6 \\ a_{63}^0 &= \frac{2}{\delta} \left\{ \frac{\nu_A}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) - \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{x\theta}}{R} - \frac{3D_{xx}}{R^2} \right) \right\} - 6 \\ a_{42}^0 &= \frac{2}{\delta} \left\{ \frac{\nu_A}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{x\theta}}{R} - \frac{2D_{xx} + D_{ss}}{2R^2} \right) \right\} - 2 \\ b_{61}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R}, \quad b_{62}^0 = \frac{3}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{3R^2} \right) \\ b_{63}^0 &= \frac{3}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{2D_{xx}}{3R^2} \right), \quad b_{64}^0 = \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ d_{51}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R}, \quad d_{52}^0 = \frac{2}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} - \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{2A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ d_{53}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} - \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} e_{s1}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{A_{xx}}{A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ e_{s2}^0 &= \frac{2}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{A_{xx} + A_{ss}}{2A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ e_{s3}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

δ および $4k^4$ には、その定義、式(55) から、容易に次の関係の成り立つことが判る。

$$\left. \begin{aligned} 0 < \delta \ll 1 \\ 4k^4 \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

すなわち、 δ は、常に正で、1 に比較して微小な量である。

同様に、式(42)で示される変位成分 w から変位成分 u および v を求めるための表示は、一次近似精度で、さらに次のように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}^4 u &= -\nu_A w'''' + w'''' + f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w'''' \\ &+ \mathcal{F}^2 \hat{N}_T' - \frac{1+\nu_A}{1-\nu_A} \hat{M}_T'' \\ &- \left(\hat{q}_x'' + \frac{2}{1-\nu_A} \hat{q}_x' - \frac{1+\nu_A}{1-\nu_A} \hat{q}_\theta' \right) + \frac{1+\nu_A}{1-\nu_A} \hat{m}_\theta'' \\ \mathcal{F}^4 v &= -(2+\nu_A) w'''' - w'''' + g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w'''' \\ &+ \mathcal{F}^2 \hat{N}_T' + \frac{2}{1-\nu_A} \hat{M}_T'' + \hat{M}_T'' \\ &+ \left(\frac{1+\nu_A}{1-\nu_A} \hat{q}_x' - \frac{2}{1-\nu_A} \hat{q}_\theta' - \hat{q}_\theta'' \right) - \left(\frac{2}{1-\nu_A} \hat{m}_\theta'' + \hat{m}_\theta'' \right) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \\ f_2^0 &= \frac{2}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} - \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{2A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ f_3^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} - \frac{A_{x\theta} + A_{ss}}{A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ g_1^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{A_{xx}}{A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ g_2^0 &= \frac{2}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{A_{xx} + A_{ss}}{2A_{ss}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \\ g_3^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \left(\frac{B_{xx}}{R} + \frac{D_{xx}}{R^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

構成方程式、式(38) も、少し簡略化され、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= u' + \nu_A v' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' + \nu_A w - \hat{N}_T \\ \hat{N}_\theta &= \nu_A u' + v' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + w - \hat{N}_T \\ \hat{N}_{x\theta} &= \hat{N}_{\theta x} = \frac{1-\nu_A}{2} (u' + v') - \frac{2}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} w'' \\ \hat{M}_x &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} u' + \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} \right) v' \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &- \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w - \hat{M}_T \\ \hat{M}_\theta &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} u' + \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \right) v' \\ &- \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} w'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w - \hat{M}_T \\ \hat{M}_{x\theta} &= \hat{M}_{\theta x} = \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} u' \\ &+ \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{ss}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{ss}}{R^2} \right) v' - \frac{2}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{ss}}{R^2} w'' \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

同様に、式(39)の各層内の任意点の応力を与える表示は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{x,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left\{ u' + \nu_j (v' + w) \right. \\ &- \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) (w'' + \nu_j w''') \\ &- (1 + \nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \left. \right\} \\ \sigma_{\theta,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left\{ \nu_j u' + v' + w \right. \\ &- \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) (\nu_j w'' + w''') \\ &- (1 + \nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \left. \right\} \\ \tau_{x\theta,j} &= \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \left\{ v' + u' \right. \\ &- 2 \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) w'' \left. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

式(54)が、Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似殻理論における多層積層円筒殻の支配方程式である。積層殻に作用する表面力および温度分布が与えられると、この支配方程式を解くことにより、面外変位 w が求まる。この w を用いれば、変位成分 u および v が、式(58)から、それぞれ求まって、合応力およびモーメントは式(60)、そして各層内の応力は式(61)より、それぞれ計算することができる。結局、課せられた問題に応じて適当な方法により問題の条件に適するように支配方程式、式(54)、の解を求めることができれば、多層積層円筒殻の変形および応力の挙動は解明されるのである。

なお、等温弾性で、中央面に垂直な表面力のみが作用する場合、支配方程式、式(54)、の右辺は \hat{q}_z による項だけが残る、また、 u および v を与える式(58)のそれぞれの右辺の温度および表面力による項は消失する。すなわち、この場合、式(54)および式(58)は、それぞれ次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}^4 (\mathcal{F}^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' \\ + a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' + a_{63}^0 w'''' + a_{42}^0 w'''' \\ = \frac{4k^4}{1-\nu_A^2} \mathcal{F}^4 \hat{q}_z \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 u &= -\nu_A w'''' + w'''' + f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w'''' \\ \nabla^4 v &= -(2+\nu_A) w'''' - w'''' + g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w'''' \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

単層の円筒殻に対して、式62および式63に対応する同様の結果が、例えば、Morley⁹⁾によって与えられている。

3.2 表面力および温度が軸対称に分布する場合

多層積層円筒殻の軸に関して、表面力および温度が対称的に分布している場合には、その対称性によって、表面力の周方向成分 q_θ および表面力に基づくモーメントの θ 面に作用する成分 m_θ は零とならねばならず、さらに、面内せん断力 $N_{x\theta}$ (= $N_{\theta x}$)および振りモーメント $M_{x\theta}$ (= $M_{\theta x}$)は明らかに零となる。しかも、変位、ひずみおよび応力の状態はすべて軸対称で、円周に沿って変化しないから、これらの諸量の θ についての導関数はすべて零となり、また、変形の対称性から、円周方向変位 u_θ^0 は零となる。すなわち、軸対称の問題では次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_\theta &= \hat{m}_\theta = 0 \\ \hat{N}_{x\theta} &= \hat{M}_{x\theta} = 0 \\ (\cdot)' &= 0, \quad v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

したがって、この条件の下では、平衡方程式、式60, は、次のようになりに簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}'_x + \hat{q}_x &= 0 \\ \hat{M}''_x - \hat{N}_\theta + (\hat{q}_z + \hat{m}'_x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

同様に、構成方程式、式68, は次のように簡単な表示になる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= u' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + \nu_A w - \hat{N}_T \\ \hat{N}_\theta &= \nu_A u' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' + w - \hat{N}_T \\ \hat{M}_x &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} u' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w - \hat{M}_T \\ \hat{M}_\theta &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} u' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} w'' + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w - \hat{M}_T \\ \hat{N}_{x\theta} &= \hat{M}_{x\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

ここで、 \hat{N}_T および \hat{M}_T は、それぞれ軸対称に分布する温度に基づき与えられることは言うまでもない。変位成分で表わした平衡方程式、式40, は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u'' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'''' + \frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} w' &= \hat{N}'_T - \hat{q}_x \\ \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} u'''' - \frac{A_{x\theta}}{A_{xx}} u' - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} w'''' & \\ + \frac{2}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} w'' - w &= -\hat{N}_T + \hat{M}'_T - \hat{q}_z - \hat{m}'_x \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

u と w についての連立微分方程式、式67, から u を消去し、

w のみで表わせれば、何らの省略もすることなしに、軸対称問題に対する支配方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} w'''' + 4k^4 w + a_{21}^0 w'' \\ = \frac{4k^4}{1-\nu_A^2} \{ (1-\nu_A) \hat{N}_T + b_{21}^0 \hat{N}'_T - \hat{M}'_T \\ - d_{11}^0 \hat{q}'_x + \hat{q}_z + \hat{m}'_x - \nu_A \hat{N}_x \} \end{aligned} \quad (68)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{21}^0 &= \frac{2}{\delta} \left(\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \\ b_{21}^0 = d_{11}^0 &= \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

変位成分 w から変位成分 u を求めるための式は、式66の第1式から容易に得られ、式68を導く過程でも用いられているのであるが、改めて書けば、次のとおりである。

$$u' = -\nu_A w + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + \hat{N}_T + \hat{N}_x \quad (70)$$

支配方程式、式68, と上の式70の式中に現われる \hat{N}_x は、 \hat{q}_x が与えられるならば、平衡方程式、式65, の第1式と境界条件とによって決定される。

なお、軸対称の変形では、殻の各層内の任意点の応力と変位との関係、式69, は、次のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left\{ u' + \nu_j w - \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) w'' \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \right\} \\ \sigma_{\theta,j} &= \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left\{ \nu_j u' + w - \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \nu_j w'' \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu_j) \alpha_j (T_j^{(0)} + \zeta_j T_j^{(1)}) \right\} \\ \tau_{x\theta,j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

4. 熱変形の支配方程式

前章では、多層積層円筒殻に表面力とともに熱の作用のある一般的な場合に対して、支配方程式を始めとする諸式を導いた。本章では、加熱による温度変化だけから生じる変形と応力を考察の対象とする熱変形の支配方程式について述べる。

4.1 温度が任意に分布する場合

前章までに取り扱ってきた多層積層円筒殻に表面力が作用しない場合を考えればよいから、支配方程式は、式54により、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 (\nabla^2 + 1)^2 w + 4k^4 w'''' \\ + a_{61}^0 w'''' + a_{62}^0 w'''' + a_{63}^0 w'''' + a_{64}^0 w'''' \\ = \frac{4k^4}{1-\nu_A^2} \{ (1-\nu_A) \nabla^2 \hat{N}'_T + b_{61}^0 \hat{N}''''_T + b_{62}^0 \hat{N}''''_T + b_{63}^0 \hat{N}''''_T \\ + b_{64}^0 (\hat{N}''''_T + \hat{N}''''_T) \} - \{ \nabla^6 \hat{M}_T + (2+\nu_A) \hat{M}''''_T + \hat{M}''''_T \} \end{aligned} \quad (72)$$

同様に、変位成分 w から変位成分 u および v を求めるための式は、式(58)から、それぞれ次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^4 u &= -\nu_A w'''' + w'''' + f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w'''' \\ &\quad + \mathcal{L}^2 \hat{N}_T - \frac{1+\nu_A}{1-\nu_A} \hat{M}_T'''' \\ \mathcal{L}^4 v &= -(2+\nu_A) w'''' - w'''' + g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w'''' \\ &\quad + \mathcal{L}^2 \hat{N}_T + \frac{2}{1-\nu_A} \hat{M}_T'''' + \hat{M}_T'''' \end{aligned} \right\} (73)$$

式(72)と式(73)の式中の \hat{N}_T および \hat{M}_T は、式(64)で与えられる N_T および M_T を、式(66)の定義にしたがい、それぞれ無次元化したものであるが、ここで、その具体形を示せば次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_T &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j T_j^{(0)} \\ \hat{M}_T &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j \left(\frac{h_j}{6R} T_j^{(1)} + \frac{R_j - R}{R} T_j^{(0)} \right) \end{aligned} \right\} (74)$$

この \hat{N}_T および \hat{M}_T の表現は、多層積層円筒殻の各層の温度が、式(17)に見るように、その肉厚方向に線形に近似できることに基づいている。ところで、ここで取り扱っている積層円筒殻のすべての層は熱的に完全に接合されているのであるから、この場合、式(19)の関係が使えて、 \hat{N}_T および \hat{M}_T の表現は、さらに、第1層と第2層のそれぞれの肉厚方向の平均温度 $T_1^{(0)}$ と $T_2^{(0)}$ のみによって、それぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_T &= \alpha_a T_1^{(0)} - \alpha_b (T_1^{(0)} - T_2^{(0)}) \\ \hat{M}_T &= \beta_a (T_1^{(0)} - T_2^{(0)}) + \beta_b T_1^{(0)} \end{aligned} \right\} (75)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j \\ \alpha_b &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j A_j^{(0)} \\ \beta_a &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j \left(\frac{h_j}{6R} A_j^{(1)} - \frac{R_j - R}{R} A_j^{(0)} \right) \\ \beta_b &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N K_j} \cdot \sum_{j=1}^N (1+\nu_j) \alpha_j K_j \cdot \frac{R_j - R}{R} \end{aligned} \right\} (76)$$

なお、合応力およびモーメントは式(60)で、各層内の応力は式(61)で、それぞれ与えられる。

単層の円筒殻に対して、式(72)および式(73)に対応する同様の結果が、Bijlaard¹⁰⁾、Johns¹¹⁾、Mizoguchi¹²⁾ および筆者⁸⁾ などにより、それぞれ導かれている。文献(8)には、種々の一次近似殻理論に対応する温度変化を考慮した、それ

ぞれの支配方程式ならびに u および v を与える式が与えられている。因みに、式(72)および式(73)を単層殻に適用するならば、それらの結果は、文献(8)に与えられている種々の表式の中の Love-Reissner 理論による表示と一致する。

4.2 温度が軸対称に分布する場合

温度が軸および殻厚方向に沿って変化するが、円周方向の角 θ に無関係の場合で、支配方程式は、式(68)から、次のように書かれる。

$$\begin{aligned} w'''' + 4k^4 w + a_{21}^0 w'' \\ = \frac{4k^4}{1-\nu_A^2} \{ (1-\nu_A) \hat{N}_T + b_{21}^0 \hat{N}_T' - \hat{M}_T' - \nu_A \hat{N}_x \} \end{aligned} \quad (77)$$

変位成分 w から u を求めるための式は、式(70)がそのままの形で使える。便宜のため、再び記すならば、次のとおりである。

$$u' = -\nu_A w + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + \hat{N}_T + \hat{N}_x \quad (78)$$

ただし、式(77)および式(78)の式中の \hat{N}_x は、平衡方程式、式(65)の第1式において、 \hat{q}_x が零であるから、定数となる。すなわち、

$$\hat{N}_x = \text{constant} \quad (79)$$

この具体的な値は境界条件により決定される。また、 \hat{N}_T および \hat{M}_T は、軸対称に分布する温度に基づいて、式(75)から、それぞれ計算される。各層の界面で温度および熱流束の連続性が成立しない場合は、式(74)を用いばよい。

なお、合応力およびモーメントは式(60)で、各層内の応力は式(61)で、それぞれ与えられる。

5. 多層積層円筒殻の軸対称熱変形の解

筆者は、先に、外部媒体との間に熱伝達による熱交換がある多層積層円筒殻に対し、各層の界面で温度ならびに熱流束の連続性が成立するものとして、熱伝導の一次近似方程式を導出した¹⁾。この熱伝導の一次近似方程式を、与えられた温度境界条件に対して解けば、多層積層円筒殻の温度分布が決定される。そして、この温度分布に対応した熱変形および熱応力を求めるには、前章に導いた多層積層円筒殻に対する熱変形の支配方程式を、与えられた力学的境界条件の下に解けばよい。

本解析例では、簡単のため、上述の熱伝導の一次近似方程式は既に解けていて、その解 $T_1^{(0)}$ および $T_2^{(0)}$ 、すなわち、多層積層円筒殻の第1層および第2層の肉厚方向の平均温度が、それぞれ一定で、次式で与えられる場合を考える。

$$T_1^{(0)} = \theta_1^{(00)}, \quad T_2^{(0)} = \theta_2^{(00)} \quad (80)$$

ここに、 $\theta_1^{(00)}$ および $\theta_2^{(00)}$ はそれぞれ一定の温度を表わす定数である。したがって、積層円筒殻の温度は、殻厚方向に各層を直線状に横切って全体として折れ線状に分布する

が、軸および周方向にはそれぞれ一様一定で、軸対称の分布となる。

支配方程式は、式(77)に式(75)および式(80)の関係を用いて、次の形に書ける。

$$w'''' + 4k^4 w + a_{21}^0 w'' = \frac{4k^4}{1-\nu_A^2} [(1-\nu_A) \{\alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)})\} - \nu_A \hat{N}_x] \quad (81)$$

同様に、変位成分 w から変位成分 u を求めるための式は、式(78)から、次のように書ける。

$$u' = -\nu_A w + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} w'' + \{\alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)})\} + \hat{N}_x \quad (82)$$

ただし、式(81)および式(82)において、 \hat{N}_x は境界条件により定まる定数である。

支配方程式、式(81)、の斉次解を得るために、 p を定数として $w = e^{py}$ とおき、これを式(81)に対応する斉次微分方程式に代入し、その結果を e^{py} で割れば、この斉次微分方程式に対する特性方程式が次のように得られる。

$$p^4 + a_{21}^0 p^2 + 4k^4 = 0 \quad (83)$$

この特性方程式の根の判別式を D とおくと、次式を得る。

$$D = \left(\frac{a_{21}^0}{2}\right)^2 - 4k^4 \quad (84)$$

単層殻の場合や、積層殻でも中央面対称積層あるいは各層の材料のポアソン比がすべて等しい場合などでは、 $a_{21}^0 = 0$ となり、判別式の符号は負となって、四つの特性根は二対の共役な複素数となるが、一般には、 $(a_{21}^0/2)^2$ が $4k^4$ より大きい、等しい、小さいかにしたがって三組の異なる根が存在することになる。つまり、支配方程式、式(81)、の斉次解には、剛性マトリックスの要素 A_{ij} 、 B_{ij} および D_{ij} ($i, j = x, \theta, s$) の間の相対的な大小関係によって、三組の異なる形がある。しかし、ここでは、簡単のため、次式を仮定する。

$$\sqrt{\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2}} \gg \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{|B_{xx}|}{R} \quad (85)$$

式(53)に見るように、 $B_{xx}/A_{xx}R$ および $D_{xx}/A_{xx}R^2$ の大きさは、いずれも1に比べて微小な量で、しかも $D_{xx}/A_{xx}R^2$ は高々 $(h/R)^2$ のオーダーの大きさである。したがって、上の仮定は $B_{xx}/A_{xx}R$ が $D_{xx}/A_{xx}R^2$ と同じ程度か、それ以下の大きさであるならば満足されることになる。さて、式(85)の仮定にしたがえば、式(55)と式(69)の第1式を使って、容易に次の関係を得る。

$$2k^2 \gg \frac{|a_{21}^0|}{2} \quad (86)$$

当然のこととして、また、次の関係を得る。

$$4k^4 \gg \left(\frac{a_{21}^0}{2}\right)^2 \quad (87)$$

したがって、式(85)の条件の下において、判別式、式(84)、の符号は常に負となり、特性方程式、式(83)、の四根は、二対の共役な複素数となって、次のように求まる。

$$p_1, p_2, p_3, p_4 = \pm (\xi \pm i\eta) \quad ; i = \sqrt{-1} \quad (88)$$

ここに、

$$\xi = k \sqrt{1 - \frac{a_{21}^0}{4k^2}}, \quad \eta = k \sqrt{1 + \frac{a_{21}^0}{4k^2}} \quad (89)$$

よって、支配方程式、式(81)、の斉次解 w_h は次の形に書ける。

$$w_h = \text{Re } \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \quad (90)$$

ただし、

$$\chi = \eta + i\xi \quad (91)$$

また、 $c^{(00)}$ および $a^{(00)}$ は境界条件によって定まる任意複素定数であり、 Re は次に続く複素数の実数部をとることを意味する。他方、式(81)の特解 w_p は次式で与えられる。

$$w_p = \frac{1}{1+\nu_A} \{\alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)})\} - \frac{\nu_A}{1-\nu_A^2} \hat{N}_x \quad (92)$$

支配方程式、式(81)、の一般解 w は、斉次解 w_h 、式(90)、と特解 w_p 、式(92)、とを重ね合わせるにより得られる。この一般解 w を、微分方程式、式(82)、に代入し、それを解けば u が求まる。次いで、これらの解 w および u を、式(66)の右辺のそれぞれに代入し、かつ、式(75)および式(80)の関係を用いれば、解 w および u に対応した合応力およびモーメントの表示が得られる。ただし、 \hat{N}_x の表示については、平衡方程式から直接に得られる表現、式(79)、を採用する。これらの結果をまとめて書くと、次のようになる。

変位：

$$\left. \begin{aligned} w &= \text{Re } \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\ &\quad + \frac{1}{1+\nu_A} \{\alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)})\} - \frac{\nu_A}{1-\nu_A^2} \hat{N}_x \\ u &= -\text{Re} \left(\nu_A + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \chi^2 \right) (c^{(00)} \sin \chi y + a^{(00)} \cos \chi y) \\ &\quad + \left[\frac{1}{1+\nu_A} \{\alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)})\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-\nu_A^2} \hat{N}_x \right] y + U \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

ここに、 U は実数の任意定数で境界条件により定められる。

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= \text{constant} \\ \hat{N}_\theta &= \text{Re } \chi \left\{ 1 - \nu_A^2 - \left(\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \chi^2 \right\} \\ &\quad \times (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\ \hat{M}_x &= \text{Re } \chi \left[-\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} - \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right)^2 \right\} \chi^2] \\
& \times (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
& - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\
& \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)}] \\
& + \frac{1}{1-\nu_A^2} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \hat{N}_x \\
\hat{M}_\theta = & \operatorname{Re} \chi \left[\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} + \left\{ \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{x\theta}}{R^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right) \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \right\} \chi^2 \right] \\
& \times (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
& - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\
& \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)}] \\
& - \frac{1}{1-\nu_A^2} \left(\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \hat{N}_x
\end{aligned} \tag{94}$$

ところで、これらの解、式93および式94、の導出に当たっては、仮定、式85、を使っているのであるから、式86が成立し、式89および式91はそれぞれ次のように簡単化される。

$$\xi = \eta = k \tag{95}$$

$$\chi = k(1+i) \tag{96}$$

また、式85の第2式は次のように近似される。

$$\delta = \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{D_{xx}}{R^2} \tag{97}$$

これらの関係とポアソン比の大きさについての関係、式51、に留意すれば、式89および式94は、さらに省略を進めることができ、それぞれ次のように簡単な形になる。

変位：

$$\begin{aligned}
w = & \operatorname{Re} \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
& + \frac{1}{1+\nu_A} \{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \} - \frac{\nu_A}{1-\nu_A^2} \hat{N}_x \\
u = & -\nu_A \operatorname{Re} (c^{(00)} \sin \chi y + a^{(00)} \cos \chi y) \\
& + \left[\frac{1}{1+\nu_A} \{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \} \right. \\
& \left. + \frac{1}{1-\nu_A^2} \hat{N}_x \right] y + U
\end{aligned} \tag{98}$$

応力およびモーメント：

$$\hat{N}_x = \text{constant}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_\theta = & (1-\nu_A^2) \operatorname{Re} \chi (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
\hat{M}_x = & \delta \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
& - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\
& \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)}] \\
& + \frac{1}{1-\nu_A^2} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \hat{N}_x \\
\hat{M}_\theta = & \nu_D \delta \operatorname{Re} \chi^3 (c^{(00)} \cos \chi y - a^{(00)} \sin \chi y) \\
& - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\
& \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)}] \\
& - \frac{1}{1-\nu_A^2} \left(\frac{\nu_A}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} - \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \hat{N}_x
\end{aligned} \tag{99}$$

ここに、 ν_D は次式で与えられ、 $D_j + (R_j - R)^2 K_j$ を重みとするポアソン比 ν_j の加重平均を表わしている。

$$\nu_D = \frac{D_{x\theta}}{D_{xx}} \tag{100}$$

式98および式99の式中の複素定数 $c^{(00)}$ および $a^{(00)}$ 、実数定数 U ならびに軸方向内力 \hat{N}_x の大きさを決めるためには境界条件が使われる。本解析では、多層積層円筒殻が両端末で単純支持されていて、境界条件が次式で表わされる場合を考える。

$$y = \pm l \text{ で } : w = \hat{M}_x = \hat{N}_x = \nu = 0 \tag{101}$$

殻の形状、支持条件および温度分布の対称性を考慮すれば、積層円筒殻の変形様式は、その中央 ($y=0$) に関して対称となる。よって、 w は y の偶関数、 u は奇関数でなければならないことから、次式を得る。

$$a^{(00)} = 0, \quad U = 0 \tag{102}$$

また、式99の第1式と境界条件、式(101)、とから、 \hat{N}_x は零でなければならないことが判る。すなわち、次式を得る。

$$\hat{N}_x = 0 \tag{103}$$

したがって、残りの未定複素定数 $c^{(00)}$ を定める方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \chi \cos \chi l & \bar{\chi} \cos \bar{\chi} l \\ \chi^3 \cos \chi l & \bar{\chi}^3 \cos \bar{\chi} l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c^{(00)} \\ \bar{c}^{(00)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \tag{104}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
A = & -\frac{2}{1+\nu_A} \{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \} \\
B = & \frac{2}{\delta} \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

また、 $\bar{\chi}$ および $\bar{c}^{(00)}$ は、それぞれ χ および $c^{(00)}$ の共役複素数である。 $c^{(00)}$ および $\bar{c}^{(00)}$ についての連立方程式、式(104)、を解いて、 $c^{(00)}$ が次のように定まる。

$$c^{(00)} = \frac{A\bar{\chi}^2 - B}{(2i\chi \cos \chi l) \text{Im} \bar{\chi}^2} \quad (106)$$

ここに、 Im は次に続く複素数の虚数部をとることを表わす。この $c^{(00)}$ は、式(105)の A および B 、さらに式(96)の χ を用いて表わせば、次の形に書き換えられる。

$$c^{(00)} = -\frac{(FS_l + GC_l) + i(GS_l - FC_l)}{2k(1+\nu_A)(S_l^2 + C_l^2)} \quad (107)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \frac{F-G}{2} &= -\frac{2k^2}{1-\nu_A} \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right. \\ & \left. + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)} \right] \\ \frac{F+G}{2} &= \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} S_l &= \sin kl \sinh kl \\ C_l &= \cos kl \cosh kl \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

以上で、すべての任意定数は定められたから、これらの $a^{(00)}$ 、 U 、 N_x そして $c^{(00)}$ の値を、式(99)および式(99)に用いれば、境界条件、式(101)、を満足する解が得られる。このようにして求まる複素形式の解を実数形式に移せば、結果は次のとおりである。

変位：

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{1}{(1+\nu_A)(S_l^2 + C_l^2)} \left\{ \left(\frac{F+G}{2} S_l \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{F-G}{2} C_l \right) \sin ky \sinh ky \right. \\ & \left. + \left(\frac{F-G}{2} S_l + \frac{F+G}{2} C_l \right) \cos ky \cosh ky \right\} \\ & + \frac{1}{1+\nu_A} \left\{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right\} \\ u &= \frac{\nu_A}{k(1+\nu_A)(S_l^2 + C_l^2)} \left\{ \left(\frac{F}{2} S_l + \frac{G}{2} C_l \right) \sin ky \cosh ky \right. \\ & \left. - \left(\frac{G}{2} S_l - \frac{F}{2} C_l \right) \cos ky \sinh ky \right\} \\ & + \frac{1}{1+\nu_A} \left\{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right\} y \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

合応力およびモーメント：

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= 0 \\ \hat{N}_\theta &= -\frac{1-\nu_A}{S_l^2 + C_l^2} \left\{ \left(\frac{F+G}{2} S_l - \frac{F-G}{2} C_l \right) \sin ky \sinh ky \right. \\ & \left. + \left(\frac{F-G}{2} S_l + \frac{F+G}{2} C_l \right) \cos ky \cosh ky \right\} \\ \hat{M}_x &= -\frac{1-\nu_A}{2k^2(S_l^2 + C_l^2)} \left\{ \left(\frac{F-G}{2} S_l \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{F+G}{2} C_l \right) \sin ky \sinh ky \right. \\ & \left. - \left(\frac{F+G}{2} S_l - \frac{F-G}{2} C_l \right) \cos ky \cosh ky \right\} \\ & - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\ & \left. \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)} \right] \\ \hat{M}_\theta &= -\frac{\nu_D(1-\nu_A)}{2k^2(S_l^2 + C_l^2)} \left\{ \left(\frac{F-G}{2} S_l \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{F+G}{2} C_l \right) \sin ky \sinh ky \right. \\ & \left. - \left(\frac{F+G}{2} S_l - \frac{F-G}{2} C_l \right) \cos ky \cosh ky \right\} \\ & - \left[\left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} \right. \\ & \left. \times (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) + \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

解、式(110)、のそれぞれの右辺には、 y を変数とする三角関数と双曲線関数とを積で含む項が存在するが、これらの項は、いわゆる縁領域変形解で、他の項が殻全体にわたっての変形を表わす全体変形解であるのに対し、殻の端部に近い領域に生じ中央部に向けて周期的に変化しつつ急激に減衰する変形を表わしている。

次に、式(110)の w および u を式(7)のそれぞれの右辺に代入し、さらに、式(99)および式(80)を用いて、各層の応力を求めれば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,j} &= -\frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[\frac{1}{(1+\nu_A)(S_l^2 + C_l^2)} \left[\left\{ (\nu_j - \nu_A) \left(\frac{F+G}{2} S_l \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{F-G}{2} C_l \right) + 2k^2 \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \left(\frac{F-G}{2} S_l \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{F+G}{2} C_l \right) \right\} \sin ky \sinh ky \right. \\ & \left. + \left\{ (\nu_j - \nu_A) \left(\frac{F-G}{2} S_l + \frac{F+G}{2} C_l \right) \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -2k^2 \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \left(\frac{F+G}{2} S_l \right. \\
& \left. - \frac{F-G}{2} C_l \right) \} \cos ky \cosh ky] \\
& + (1+\nu_j) \left[\left(\alpha_j - \frac{\alpha_a}{1+\nu_A} \right) \theta_1^{(00)} \right. \\
& \left. - \left\{ \left(\alpha_j A_j^{(0)} - \frac{\alpha_b}{1+\nu_A} \right) - \alpha_j A_j^{(1)} \zeta_j \right\} (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right] \\
\alpha_{\theta, j} = & - \frac{E_j}{1-\nu_j^2} \left[\frac{1}{(1+\nu_A)(S_l^2 + C_l^2)} \left[\{ (1-\nu_j \nu_A) \left(\frac{F+G}{2} S_l \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{F-G}{2} C_l \right) + 2k^2 \nu_j \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \left(\frac{F-G}{2} S_l \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{F+G}{2} C_l \right) \right] \sin ky \sinh ky \\
& + \left\{ (1-\nu_j \nu_A) \left(\frac{F-G}{2} S_l + \frac{F+G}{2} C_l \right) \right. \\
& \left. - 2k^2 \nu_j \left(\frac{R_j - R}{R} + \frac{h_j}{2R} \zeta_j \right) \left(\frac{F+G}{2} S_l \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{F-G}{2} C_l \right) \right] \cos ky \cosh ky] \\
& + (1+\nu_j) \left[\left(\alpha_j - \frac{\alpha_a}{1+\nu_A} \right) \theta_1^{(00)} \right. \\
& \left. - \left\{ \left(\alpha_j A_j^{(0)} - \frac{\alpha_b}{1+\nu_A} \right) - \alpha_j A_j^{(1)} \zeta_j \right\} (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right] \quad (112)
\end{aligned}$$

これらの解, 式(110), (111)ならびに式(112), を用いれば, $\sinh kl \approx \cosh kl$ が成り立つ程度に十分に長い多層積層円筒殻の中央 ($y=0$) における変位, 合応力およびモーメント, ならびに応力は, それぞれ次式で与えられる。

変位:

$$\left. \begin{aligned}
(w)_{y=0} &= \frac{1}{1+\nu_A} \{ \alpha_a \theta_1^{(00)} - \alpha_b (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \} \\
(u)_{y=0} &= 0
\end{aligned} \right\} (113)$$

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned}
\hat{N}_x &= 0, \quad (\hat{N}_\theta)_{y=0} = 0 \\
(\hat{M}_x)_{y=0} &= (\hat{M}_\theta)_{y=0} \\
&= - \left\{ \beta_a + \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_b \right\} (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \\
& - \left\{ \beta_b - \frac{1}{1+\nu_A} \left(\frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{xx}}{R} + \frac{1}{A_{xx}} \cdot \frac{B_{x\theta}}{R} \right) \alpha_a \right\} \theta_1^{(00)}
\end{aligned} \right\} (114)$$

応力:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{x, j})_{y=0} &= (\sigma_{\theta, j})_{y=0} \\
&= - \frac{E_j}{1-\nu_j} \left[\left(\alpha_j - \frac{\alpha_a}{1+\nu_A} \right) \theta_1^{(00)} - \left\{ \left(\alpha_j A_j^{(0)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_b}{1+\nu_A} \right) - \alpha_j A_j^{(1)} \zeta_j \right\} (\theta_1^{(00)} - \theta_2^{(00)}) \right] \quad (115)
\end{aligned}$$

これらの結果は, 前にも述べたように, 十分に長い積層円筒殻の中央部分の変形の状態は, 端部の影響は消え, 全体変形解(支配方程式の特解の部分に該当)が支配的であることを示している。

もし, 円筒殻が単層から成るなら, 式(113), (114)および式(115)は, それぞれの右辺の諸量を積層数 N が 1 の積層殻の場合として求めればよく, 第 1 層であることを示す添字 1 を省略して書くならば, それぞれ次式で表わされる。

変位:

$$(w)_{y=0} = \alpha \left(\frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \right), \quad (u)_{y=0} = 0 \quad (116)$$

合応力およびモーメント:

$$\left. \begin{aligned}
\hat{N}_x &= 0, \quad (\hat{N}_\theta)_{y=0} = 0 \\
(\hat{M}_x)_{y=0} &= (\hat{M}_\theta)_{y=0} = - \frac{(1+\nu) \alpha h}{12R} (\theta^+ - \theta^-)
\end{aligned} \right\} (117)$$

応力:

$$(\sigma_x)_{y=0} = (\sigma_\theta)_{y=0} = - \frac{E \alpha}{2(1-\nu)} (\theta^+ - \theta^-) \zeta \quad (118)$$

ただし, θ^+ および θ^- はそれぞれ円筒殻の外表面および内表面での一様な一定温度を表わす。また, 次の関係がある。

$$\zeta = \frac{2z}{h} ; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (119)$$

式(118)によれば, 単層の円筒殻の外表面および内表面における応力はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
(\sigma_x^+)_{y=0} &= (\sigma_\theta^+)_{y=0} = - \frac{E \alpha}{2(1-\nu)} (\theta^+ - \theta^-) \\
(\sigma_x^-)_{y=0} &= (\sigma_\theta^-)_{y=0} = \frac{E \alpha}{2(1-\nu)} (\theta^+ - \theta^-)
\end{aligned} \right\} (120)$$

この結果は, 周知の解であって, Timoshenko¹³⁾ や Johns¹¹⁾ の著書に与えられている解に一致する。

6. 数値計算例

加熱される多層積層構造では, 異種材料間の物性値の相違による相互干渉によって, 各層の界面およびその近傍で大きな熱応力を発生する。そこで, 本章では数値計算例として, 十分に長い多層積層円筒殻が, 軸対称で, しかも軸方向にも一様な温度分布となるときに円筒殻中央部での面外変位, 曲げモーメントおよび各層の応力を, 前章に得た解析解, 式(113)~(115), を用いて計算し, 特に, 殻厚を一定とするときの熱応力の分布が積層数とともにどのように変化するかを数値的に見ることにする。計算に当たっては, 各層の物性値は層内ではもちろんそれぞれ一定値とするけれども, 殻断面内の各層の肉厚中央面でのそれらの値は殻厚方向に線形に変化するものとし, 既知量として最外層と最内層の物性値を与えることにする。

本計算例での積層円筒殻の温度は, 外表面温度 T_1^+ およ

び内表面温度 T_N^- がそれぞれ一様一定で次のように規定されているとする。

$$T_1^+ = 500 \text{ K } (= 226.85^\circ\text{C})$$

$$T_N^- = 300 \text{ K } (= 26.85^\circ\text{C})$$

当然、温度の分布は軸対称で、かつ軸方向に一様一定となる。また、円筒殻に関する諸元は次のとおりとする。

$$R = 0.4 \text{ m } (= 400 \text{ mm})$$

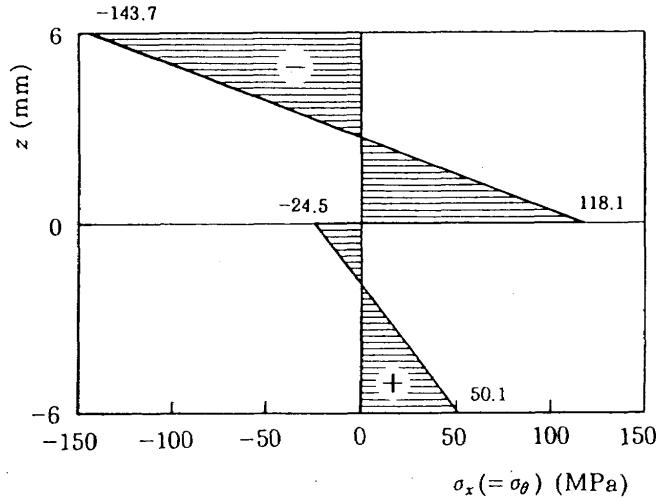
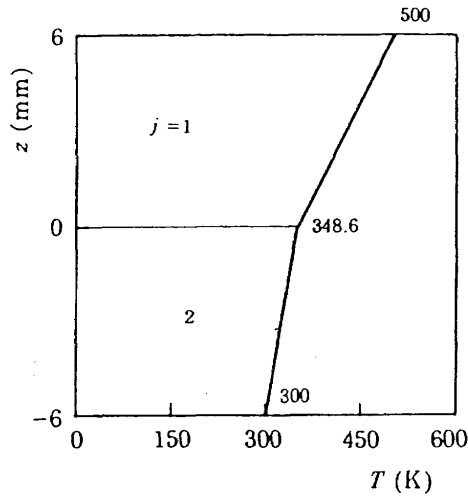
$$h = 0.012 \text{ m } (= 12 \text{ mm})$$

なお、この円筒殻は等厚の層から構成されているものとし、積層数 N は 2, 3, 6 および 12 の 4 とおりの場合について考察する。物性値は、最外層（第 1 層）および最内層（第 N 層）に、それぞれジルコニア系セラミック ZrO_2 およびチタン合金 Ti-6Al-4V を想定し、表 1 に示す値^{14),15)}を用いる。

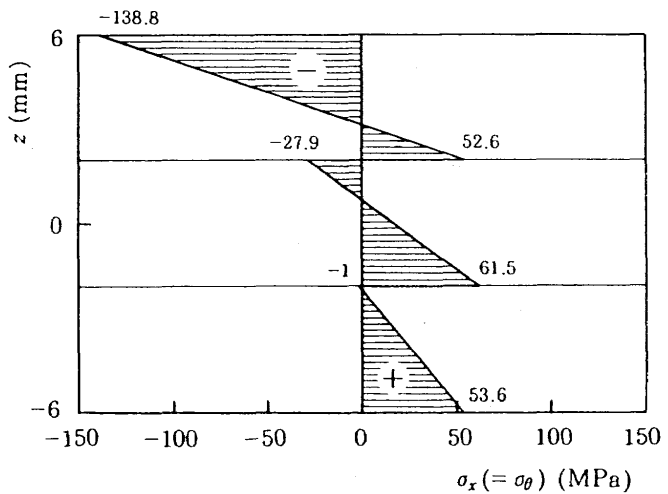
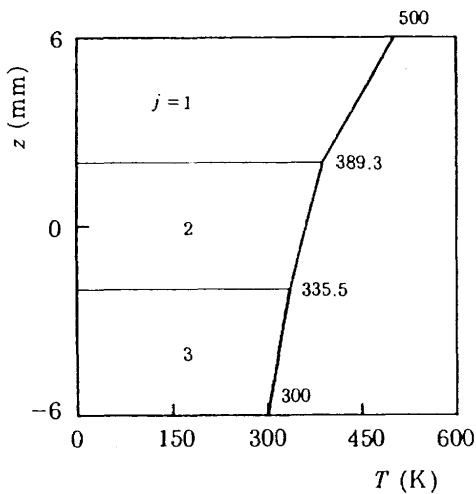
図 3 に、数値計算の結果を示す。積層数 N を増すとともに、熱応力が緩和されてゆく様子がよく判る。これは、積層数を増すことによって隣接する各層の界面での物性値間の段差が縮まり、殻厚方向の物性値が線形に連続的に変化する場合に近づくからで、最近、注目されている傾斜機能

表 1 計算に用いた物性値（常温）

	ZrO_2	Ti-6Al-4V
ヤング率 E (GPa)	155.8	112.8
ポアソン比 ν	0.324	0.31
線膨張率 α (1/K)	7.5×10^{-6}	9.4×10^{-6}
熱伝導率 λ (W/m·K)	1.88	5.86
引張強度 σ_B (MPa)	144.8	931.6

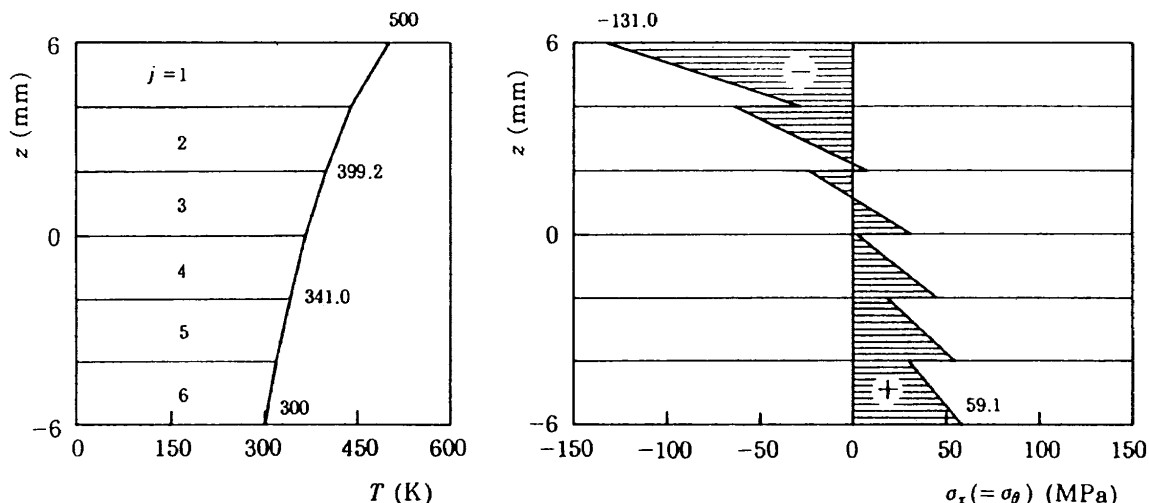


(i) $N=2$, ($w_z=1.25 \text{ mm}$, $M_x=M_\theta=-1.47 \text{ kN}$)

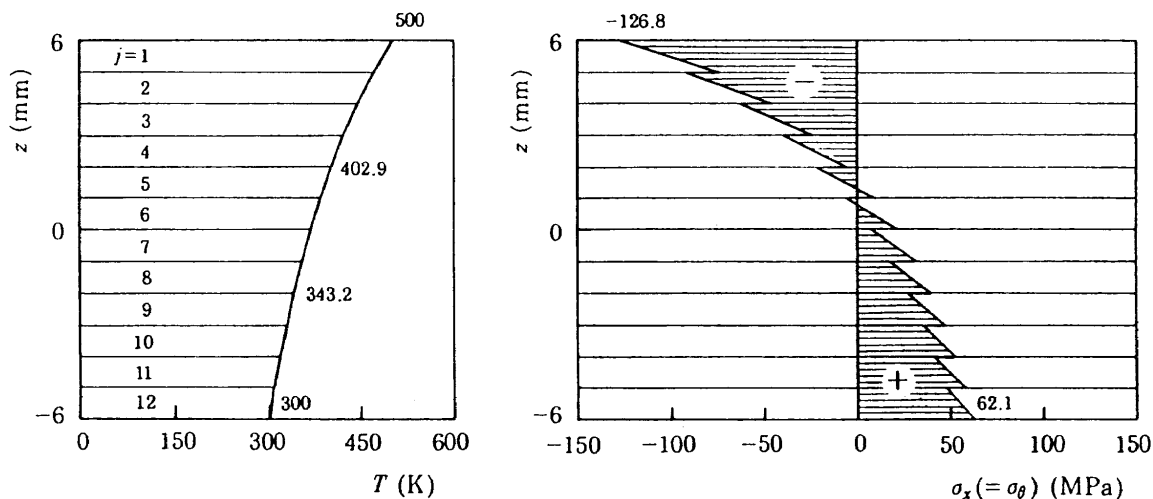


(ii) $N=3$, ($w_z=1.26 \text{ mm}$, $M_x=M_\theta=-1.56 \text{ kN}$)

図 3(a) 温度および熱応力分布



(iii) $N=6$, ($w_z=1.27$ mm, $M_x=M_\theta=-1.78$ kN)



(iv) $N=12$, ($w_z=1.28$ mm, $M_x=M_\theta=-1.93$ kN)

図 3 (b) 温度および熱応力分布

材料 (Functionally Gradient Materials) の概念の一端をよく説明している。

7. 結 言

本報告では、外的負荷として温度変化と表面力の作用を同時に受ける多層積層円筒殻の弾性変形の支配方程式を、三次元弾性論の基礎式に Kirchhoff-Love の仮定を適用することによって、一次近似精度で導いた。次いで、熱変形および熱応力のみを考察の対象として、表面力の作用がない場合の支配方程式を示した。この熱変形の支配方程式は、単層殻に適用するとき、以前に筆者が Love-Reissner の殻理論を用いて導いた単層の円筒殻に対する支配方程式と一致した。簡単な解析例として、両端を単純支持された多層積層円筒殻の軸対称熱変形問題の解析解を示した。また、

この解析解の数値計算例として、端部の影響が消失する十分に長い円筒殻の中央部での熱応力を計算し、殻厚を一定とするときのその分布が積層数とともにどのように変化するかを数値的に示した。

参 考 文 献

- 1) 遠藤修司；“多層複合円筒殻に対する熱伝導の一次近似方程式”，航空宇宙技術研究所報告 TR-1049，平成元年（1989年）12月。
- 2) Ambartsumyan, S. A. ; “Contributions to the Theory of Anisotropic Layered Shells,” Applied Mechanics Reviews, Vol.15, No.4, April 1962, pp. 245-249.
- 3) Dong, S. B., Pister, K. S. and Taylor, R. L. ; “On

- the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 29, No.8, August 1962, pp.969-975.
- 4) Stavsky, Y. and Smolash, I. ; "Thermoelasticity of Heterogeneous Orthotropic Cylindrical Shells," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.6, No.8, August 1970, pp.1211-1231.
 - 5) Hsu, Y. S., Reddy, J. N. and Bert, C. W. ; "Thermoelasticity of Circular Cylindrical Shells Laminated of Bimodulus Composite Materials," *Journal of Thermal Stresses*, Vol.4, No.2, April 1981, pp.155-177.
 - 6) 日本機械学会 P-SC56 熱応力と設計に関する研究分科会 (主査 竹内洋一郎) ; "熱応力文献標題集", 昭和59年 (1984年) 9月.
 - 7) 遠藤修司 ; "熱荷重による多層複合円筒殻の変形と応力", 日本機械学会 No.910-71 材料力学講演会講演論文集, Vol.A, 平成3年 (1991年) 11月2日, pp.522-524.
 - 8) 遠藤修司 ; "円筒シェルの熱変形基礎式について", 航空宇宙技術研究所報告 TR-577, 昭和54年 (1979年) 6月.
 - 9) Morley, L. S. D. ; "An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.12, Part 1, February 1959, pp. 89-99.
 - 10) Bijlaard, P. P. ; "Differential Equations for Cylindrical Shells With Arbitrary Temperature Distributions," *Journal of the Aero/Space Sciences*, Vol. 25, No.9, September 1958, pp.594-595.
 - 11) Johns, D. J. ; "Thermal Stress Analyses," Pergamon Press, Oxford, 1965.
 - 12) Mizoguchi, K. ; "On Thermoelasticity of Cylindrical Shells," *Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A*, Vol.15, No.2, 1966, pp.1-9.
 - 13) Timoshenko, S. ; "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill Book Co., New York, 1940 (second edition : 1959).
 - 14) Lynch, C. T., Ed. ; "Handbook of Materials Science," Vol. II : Metals, Composites, and Refractory Materials, CRC Press, Inc., Cleveland, 1975.
 - 15) 機械設計便覧編集委員会編, "新版機械設計便覧", 丸善株式会社, 昭和48年 (1973年) 1月25日.

航空宇宙技術研究所報告1222号

平成6年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区西早稲田2-1-18

Printed in Japan