ISSN 0389-4010
UDC 527.62
527.8
629.783
629.7.05

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1416

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法アルゴリズムの開発

張 替 正 敏, 辻 井 利 昭
村 田 正 秋, 新 宮 博 公

2000 年 12 月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目　　次

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法アルゴリズムの開発

張 替 正 敏[*1]，辻 井 利 昭[*1]
村 田 正 秋[*1]，新 宮 博 公[*2]

Development of Carrier-phase DGPS/INS Hybrid Navigation Algorithm

Masatoshi HARIGAE[*1], Toshiaki TSUJII[*1]
Masaaki MURATA[*1], Hirokimi SHINGU[*2]

ABSTRACT

To enable precision approach and landing navigation, a carrier-phase DGPS/INS hybrid navigation system was developed characterized by the primary use of a GPS carrier-phase rather than a GPS pseudorange. Half the advantages of this system are derived from installing a reliable INS able to provide 6-degrees of freedom navigation data with a wide dynamic range, and maintain high availability and continuity. The other advantages of the system come from the use of DGPS/INS hybrid navigation to improve navigation accuracy. In this DGPS/INS hybrid navigation algorithm, we used the Kalman filter, which estimates the carrier-phase ambiguity as well as INS drift errors. This system can then utilize the GPS carrier-phase, although the majority of conventional DGPS/INS systems are based on the GPS pseudorange. Because the GPS carrier-phase is tolerant to multipath errors, sub-meter positioning performance is achieved, while conventional DGPS/INS systems achieve accuracy over several meters.

The HSFD (High Speed Flight Demonstrator) is to be equipped with this system as a landing navigation system. The carrier-phase DGPS/INS hybrid navigation algorithm developed by NAL is installed on an onboard navigation computer. However there are no documents on the algorithm and the control logic of the onboard software. The purpose of this report is to clarify the algorithm and control logic in order to successfully develop a carrier-phase DGPS/INS hybrid navigation system for the HSFD.

Key words: CDGPS/INS hybrid navigation, High Speed Flight Demonstrator

平成 12 年 5 月 17 日受付（received 17 May 2000）
*1 飛行研究部（Flight Division）
*2 飛行システム総合研究グループ（Flight Systems Research Center）

概　　要

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムは，GPS の搬送波位相を観測量として用いる精密進入着陸のための航法システムである．その特長は，すでに航空機の航法アビオニクスとして実績のある INS を用いることで広いダイナミックレンジをもつ６自由度航法を実現し，また高い利用性と連続性を確保することにある．さらに，測位精度の向上には DGPS との複合化による INS 誤差の推定・除去（DGPS/INS 複合航法）を考える．DGPS/INS 複合航法アルゴリズムにおいて INS のドリフト誤差を除去するのに用いる観測量は従来と異なり，シュードレンジだけではなくマルチパスに対して強固な GPS の搬送波位相も使用する．そのため，航法フィルタ（カルマンフィルタ）を位相のアンビギュイティも推定できるよう設計した．その結果，従来の DGPS/INS 複合航法システムに比べ，本システムでは測位精度がサブメートルまで向上している．

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムは，2001 年度に飛行予定の HOPE-X 高速飛行実証機に着陸航法システムとして搭載が決定している．このシステムにおいて，機上装置に含まれる航法計算部には上述の複合航法アルゴリズムが搭載されている．このアルゴリズムは航空宇宙技術研究所において開発されたもので，アルゴリズム，制御ロジックに関して，その詳細を解説する必要がある．本報告は，高速飛行実証機搭載の搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムを円滑に開発するため，航法計算部の搭載ソフトウェアのアルゴリズムと制御ロジックを明確にすることを目的とする．

記号表

^	推定値を表す修飾記号
~	誤差を含む状態量を表す修飾記号
(-)	観測更新前の推定値を表す修飾記号
$\Delta\boldsymbol{\theta}^b$	角度増分（IMU 出力）
$\Delta\boldsymbol{v}^b$	速度増分（IMU 出力）
(G_{sx}, G_{sy}, G_{sz})	ジャイロのスケールファクタ推定値
$(G_{xy}, G_{xz}, G_{yx}, G_{yz}, G_{zx}, G_{zy})$	ジャイロのミスアライメント推定値
(A_{sx}, A_{sy}, A_{sz})	加速度計のスケールファクタ推定値
$(A_{xy}, A_{xz}, A_{yx}, A_{yz}, A_{zx}, A_{zy})$	加速度計のミスアライメント推定値
$(\delta\hat{\omega}_{bx}, \delta\hat{\omega}_{by}, \delta\hat{\omega}_{bz})$	フィルタのジャイロバイアス誤差推定値
$(\delta\hat{a}_{bx}, \delta\hat{a}_{by}, \delta\hat{a}_{bz})$	フィルタの加速度バイアス誤差推定値
Δt	IMU の積分時間（サンプリング時間）
$\boldsymbol{\phi}(t_n)$	時刻 t_{n-1} から t_n までの間に機体軸が回転する量
$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)$	機体座標系で表した時刻 t におけるジャイロの角速度出力
$\boldsymbol{x}_{ant}^b$	機体座標系で表した IMU に対する GPS アンテナの位置
$\boldsymbol{x}_{acc}^i$	慣性空間における加速度計の位置
C_1^2	座標系１から座標系２への変換を表す方向余弦行列
C_b^n	機体軸座標系から航法座標系への変換を表す方向余弦行列
$\Delta\boldsymbol{v}_{ant}^b$	GPS アンテナの位相中心における速度増分
$\boldsymbol{q}^n$	機体座標系から航法座標系への回転を表すクォータニオン
$m[]$	クォータニオン変質行列
Φ_q	クォータニオン時間更新のための遷移行列
r_e	赤道平均半径（WGS84 の定義に基づく）
f	扁平率（WGS84 の定義に基づく）
ω_e	自転速度（GPS での定義に基づく）
$\boldsymbol{\delta e}^n$	方向余弦行列 C_b^n の誤差
$\boldsymbol{\delta q}^n$	クォータニオンの誤差
(ϕ, θ, ψ)	オイラー角（ロール，ピッチ，ヨー）
U	地球の重力ポテンシャル
μ	地球重力パラメータ
r	地球中心から現在位置までの距離
J_k	地球重力ポテンシャルの調和係数（Zonal 項）
P_k	k 次のルジャンドル多項式
φ	北極を 0°として赤道方向に取った逆方向の地心緯度
$\boldsymbol{i}_r$	地球半径方向の単位ベクトル

$\boldsymbol{i}_{\varphi}$	逆緯度方向の単位ベクトル
$\boldsymbol{\omega}_{ie}$	地球自転の角速度ベクトル
$\boldsymbol{g}^{n}$	航法座標系（NED 座標系）での重力ベクトル
(L, l, h)	飛翔体の測地学的緯度，経度，高度
(v_N, v_E, v_D)	飛翔体の北方向，東方向，下方向の速度
L_c	地心緯度
$\boldsymbol{r}$	飛翔体の位置ベクトル（地球固定座標系）
r_m	現在地における地球の子午半径
r_p	現在地における地球の大圏半径
$\boldsymbol{x}$	n×1 次元の誤差状態量ベクトル
F	n×n 次元のシステムダイナミクス行列
$\boldsymbol{w}$	n×1 次元の平均値０のシステムノイズベクトル
Φ	遷移行列
P	共分散行列
Q	プロセスノイズの共分散行列
q	プロセスノイズの電力密度行列
T	カルマンフィルタにおける離散化の時間間隔
z_{k+1}	時刻 t_{k+1} における観測データ
$\boldsymbol{h}_{k+1}$	n×1 次元の観測行列
v_{k+1}	観測ノイズ
$\boldsymbol{k}$	カルマンゲイン
r_{k+1}	観測ノイズの分散
$\delta \boldsymbol{r}^n = (\delta L, \delta l, \delta h)^T$	INS 位置誤差
$\delta \boldsymbol{v}^n = (\delta v_N, \delta v_E, \delta v_D)^T$	INS 速度誤差
$\delta \boldsymbol{e}^n = (\delta e_1, \delta e_2, \delta e_3)^T$	INS 方向余弦行列誤差
$\delta \boldsymbol{b}_{acc} = (\delta a_{bx}, \delta a_{by}, \delta a_{bz})^T$	INS 加速度計バイアス誤差
$\delta \boldsymbol{b}_{gyro} = (\delta \omega_{bx}, \delta \omega_{by}, \delta \omega_{bz})^T$	INS ジャイロバイアス誤差
$\delta \boldsymbol{b}_{clk} = (\delta b, \delta \dot{b})^T$	GPS 時計バイアス誤差
$\delta \boldsymbol{n} = (\lambda \delta n_1, \lambda \delta n_2, \cdots, \lambda \delta n_9)^T$	搬送波位相アンビギュイティ誤差
λ	搬送波の波長
$\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$	航法座標系の慣性空間に対する回転を表す角速度ベクトル
(a_x, a_y, a_z)	機体軸座標系における加速度計出力
T_{ba}	加速度計バイアスの時定数
T_{bg}	ジャイロバイアスの時定数
T_n	アンビギュイティ誤差の時定数
q_a	加速度計バイアスに関するプロセスノイズの電力密度
q_g	ジャイロバイアスに関するプロセスノイズの電力密度
q_b	GPS 時計バイアスに関するプロセスノイズの電力密度
$q_{\dot{b}}$	GPS 時計ドリフトに関するプロセスノイズの電力密度
q_{amb}	アンビギュイティに関するプロセスノイズの電力密度
$\boldsymbol{b}_{acc}$	加速度計バイアス
$\boldsymbol{b}_{gyro}$	ジャイロバイアス
$\boldsymbol{b}_{clk}$	GPS 時計バイアス
$\boldsymbol{n}$	搬送波位相アンビギュイティ
t_2	信号の発射時刻（衛星時計）
t_3	信号の受信時刻（受信機時計）
c	光速
$\delta\rho$	受信機で伝播時間を測定するときのエラー（観測ノイズ）
T_2	信号の発射時刻（GPS タイム）
T_3	信号の受信時刻（GPS タイム）
dt_2	衛星搭載時計のＧＰＳタイムに対する誤差（$= t_2 - T_2$）
dt_3	受信機時計のＧＰＳタイムに対する誤差（$= t_3 - T_3$）
$\boldsymbol{R}_A$	送信アンテナ位相中心の慣性座標系に関する位置ベクトル
$\boldsymbol{R}$	受信アンテナ位相中心の慣性座標系に関する位置ベクトル
d_{iono}	電離層遅延
d_{trop}	対流圏遅延
$\boldsymbol{r}_A$	送信アンテナ位相中心の位置ベクトル（地球固定座標系）
$\boldsymbol{r}$	受信アンテナ位相中心の位置ベクトル（地球固定座標系）
d_{sag}	Sagnac 効果
$\boldsymbol{r}_{sv}$	放送暦を使って計算した送信アンテナ位置
Δt_2	放送暦を使って計算した衛星クロック誤差
d_{SA}	SA 誤差
E	受信機から見た衛星の迎角
A	受信機から見た衛星の方位角，真北から時計方向に正
ϕ_u	受信機の測地学的緯度
λ_u	受信機の経度
a_{f0}	位相誤差補正係数
a_{f1}	周波数誤差補正係数
a_{f2}	周波数レート誤差補正係数
t_{oc}	クロック補正基準時刻

Δn mean motion 補正
M_0 基準時の mean anomaly
e eccentricity
$a^{1/2}$ semimajor axis の平方根
Ω_0 基準時の昇交点経度
i_0 基準時の軌道傾斜角
ω 近地点引数
$\dot{\Omega}$ right ascension の変化率
$\dot{i}$ 軌道傾斜角の変化率
C_{uc}, C_{us} 緯度引数の補正量
C_{rc}, C_{rs} 軌道半径の補正量
C_{ic}, C_{is} 軌道傾斜角の補正量
T_{oe} 軌道暦基準時刻
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 電離層遅延補正の多項式係数
$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 電離層遅延補正の多項式係数
P 気圧（対流圏遅延モデルで使用される場合）
e 水蒸気分圧(対流圏遅延モデルで使用される場合)
T 温度（対流圏遅延モデルで使用される場合）
h_0 地表高度（対流圏遅延モデルで使用される場合）
P_0 地表での気圧（対流圏遅延モデルで使用される場合）
H_P 気圧のスケール高度（対流圏遅延モデルで使用される場合）
T_0 地表での温度（対流圏遅延モデルで使用される場合）
α 温度勾配（対流圏遅延モデルで使用される場合）
e_0 地表での水蒸気分圧（対流圏遅延モデルで使用される場合）
H_e 水蒸気分圧のスケール高度
t_{3_b} DGPS 地上局におけるシュードレンジの取得時刻
$\boldsymbol{r}_b$ DGPS 地上局の位置で既知
d_{sag_b} DGPS 地上局における sagnac 効果
d_{trop_b} DGPS 地上局における対流圏遅延
dt_{3_b} DGPS 地上局の時計バイアス
$\delta\rho_b$ DGPS 地上局におけるシュードレンジの観測ノイズ
$\Delta\rho$ シュードレンジ一重差
dt_{3_Δ} ユーザと DGPS 地上局の時計バイアスの差
$\delta\rho_\Delta$ シュードレンジ一重差の観測ノイズ
$\theta_2(t_2)$ 時刻 t_2 における GPS 信号の搬送波の位相
$\theta_3(t_3)$ 時刻 t_3 における受信機ローカルクロックの位相
$\phi(t_3)$ 搬送波位相
f_L 送信周波数
n アンビギュイティ（不確定値）
$\delta\phi$ 搬送波位相の観測ノイズ
n_b DGPS 地上局における搬送波位相のアンビギュイティ
$\delta\phi_b$ DGPS 地上局における搬送波位相の観測ノイズ
$\lambda\Delta\phi$ 搬送波位相の一重差
n_Δ ユーザと DGPS 地上局のアンビギュイティの差
$\delta\phi_{\lambda\_\Delta}$ 搬送波位相一重差の観測ノイズ
$\upsilon_{\Delta\rho}$ シュードレンジ一重差の観測残差
$\upsilon_{\lambda\Delta\phi}$ 搬送波位相一重差の観測残差
σ_p 初期位置誤差の標準偏差
σ_v 初期速度誤差の標準偏差
σ_e 初期姿勢角誤差の標準偏差
σ_a 初期加速度バイアス誤差の標準偏差
σ_g 初期ジャイロバイアス誤差の標準偏差
σ_{amb} 初期アンビギュイティ誤差の標準偏差
$Ps_{clk\_frandom}$ クロック周波数ランダムウォークのプロセスノイズ電力密度
Th_ϕ 搬送波位相観測残差のスレショルド値
Th_ρ シュードレンジ観測残差のスレショルド値
n_{slip} サイクルスリップの検定回数

1．はじめに

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムは, GPS（Global Positioning System，全地球測位システム）の搬送波位相を観測量とする精密進入着陸のための航法システムである．その特長は，すでに航空機の航法アビオニクスとして実績のある INS（Inertial Navigation System，慣性航法システム）を用いることで広いダイナミックレンジをもつ６自由度航法を実現し，また高い利用性と連続性を確保することにある．さらに，測位精度の向上には DGPS（Differential GPS）との複合化による INS 誤差の推定・除去（DGPS/INS 複合航法）を考える．DGPS/INS 複合航法アルゴリズムにおいて INS のドリフト誤差を除去するのに用いる観測量は，シュードレンジとともにマルチパスに対してロバストな GPS の搬送波位相を使用する．そのため，航法フィルタを位相のアンビギュイティも推定できるよう設計した．その結果，従来の DGPS/INS 複合航法システムに比べ，本システムでは測位精度がサブメートルまで向上している．

DGPS/INS 複合航法アルゴリズムでは搬送波位相を観測量として利用する際に，従来のキネマティック GPS 航法で採用されていた OTF（On-the-Fly，飛行中の）アンビギュイティ解法とは異なり，搬送波位相アンビギュイティ解の探索空間の設定と探索アルゴリズムを用いない．これは，キネマティック GPS 航法において，OTF アンビ

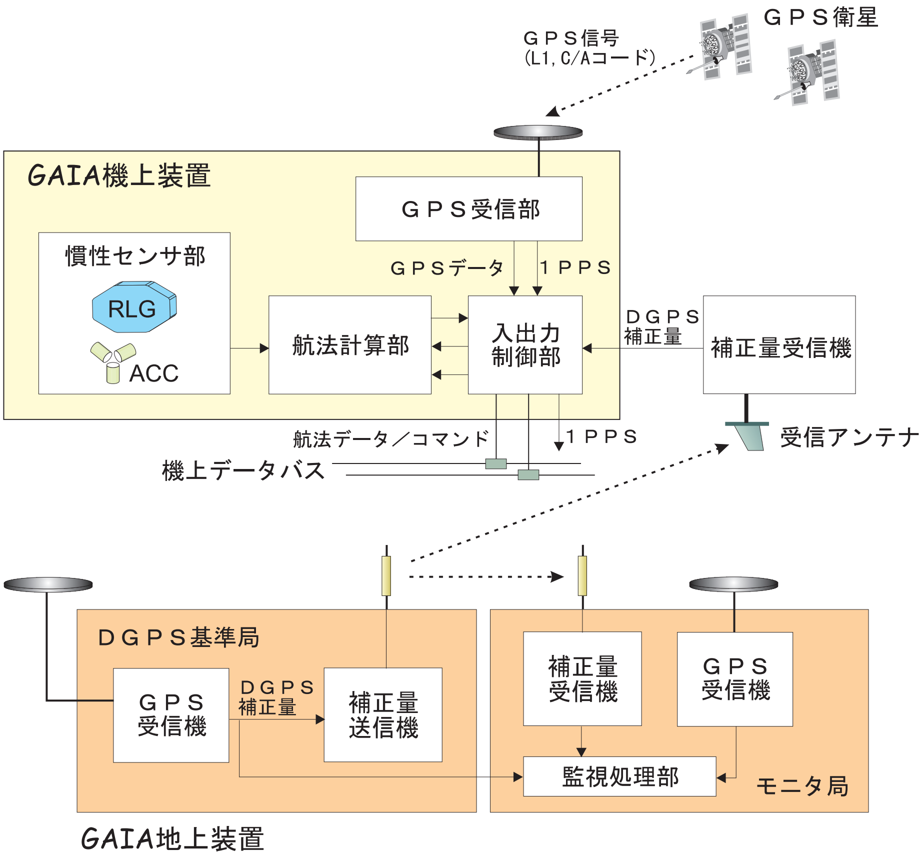

図 1-1　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムのブロック図（高速飛行実証機における例）

ギュイティ解法が利用性と連続性を劣化させる要因になっていたためである．そのかわりに，カルマンフィルタにより INS ドリフト誤差の推定と同時にアンビギュイティ解を推定する．その結果，搬送波位相を利用した複合航法で測位精度が向上するだけでなく，INS の特長である高い利用性と連続性が OTF アンビギュイティ解法により低下することなく，カテゴリーⅢの航法精度要件を満たす航法システムが構築できる．

本システムは，2001 年度に飛行予定の HOPE-X 高速飛行実証機（HSFD, High Speed Flight Demonstrator）に着陸航法システムとして搭載が決定している．図 1-1 は，高速飛行実証機で用いられる搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムの全体概念図を示したものである．ここでは本システムを GAIA（GPS Assisted Inertial Navigation Avionics, GPS 補強型慣性航法システム）と呼んでいる．このシステムにおいて，機上装置に含まれる航法計算部には上述の複合航法アルゴリズムが搭載されている．このアルゴリズムは航空宇宙技術研究所において開発されたもので，アルゴリズム，制御ロジックに関して，その詳細を解説する必要がある．本報告は，高速飛行実証機搭載の搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムを円滑に開発するため，航法計算部の搭載ソフトウェアのアルゴリズムと制御ロジックを数学的に明確にすることを目的とする．なお，本アルゴリズムを航空宇宙技術研究所で開発するにあたり，

- アルゴリズム開発の経緯（研究の背景）
- 従来アルゴリズムとの比較と本アルゴリズムの新規性
- 実験結果と従来研究との性能比較

に関しては，すでに刊行されている別の報告 [15]にまとめたのでそちらを参照されたい．

２．搬送波位相 DGPS/INS 複合航法アルゴリズム

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムは航法センサとして，加速度計とジャイロで構成される IMU（Inertial Measurement Unit，慣性センサ）と機上 GPS 受信機，および地上の定点に設置してディファレンシャル GPS 航法を行うための地上 GPS 受信機を用いる．複合航法アルゴリズムは搭載計算機において，これらの航法センサからの信号を得て位置，速度，姿勢角情報などを計算するアルゴリズムである．図 2-1 に，搬送波位相 DGPS/INS 複合航

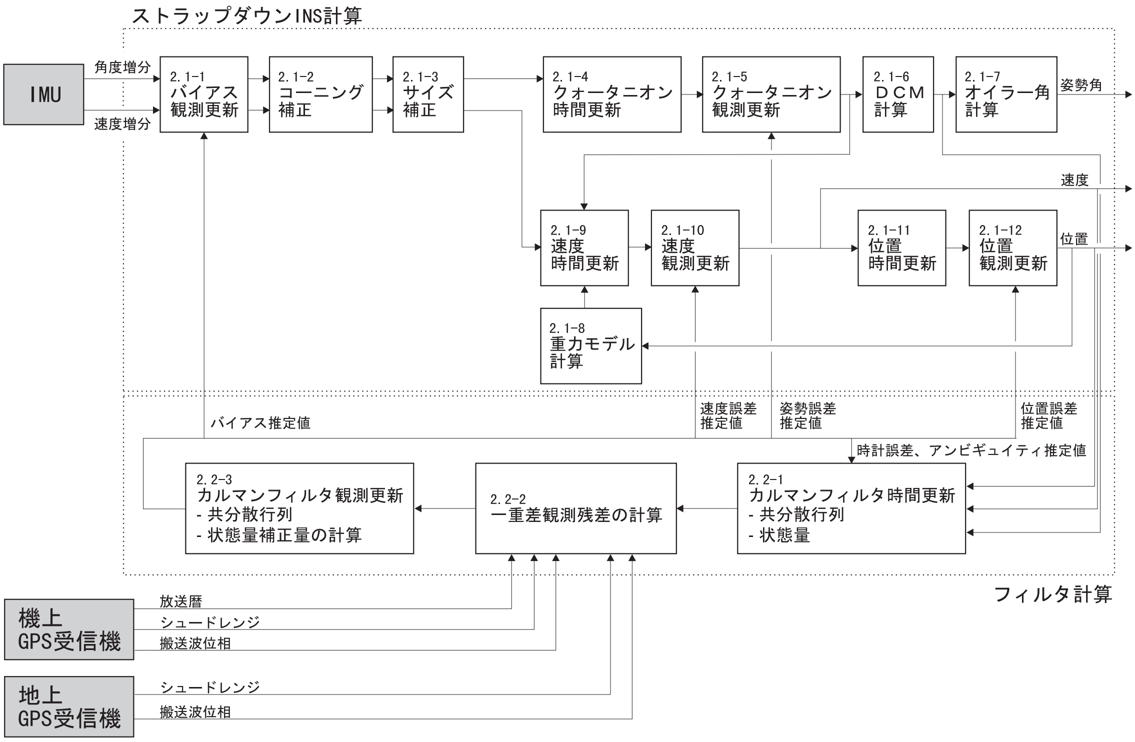

図 2-1 搬送波位相 DGPS/INS 複合航法アルゴリズム

法アルゴリズムのブロック線図を示した．アルゴリズムは，大きくストラップダウン INS 計算とフィルタ計算に分かれる．ストラップダウン INS 計算は加速度を積分することで位置と速度を求める．フィルタ計算は，ストラップダウン INS 計算で生じる誤差を GPS 観測量によりカルマンフィルタで推定，除去する．本章では，図 2-1 に示すブロック線図（各ブロックに本章で解説している項目番号を付加した）に沿って，そのアルゴリズムを解説する．

２．１　ストラップダウン INS 計算

ストラップダウン INS は，機体に固定した加速度計とジャイロから速度増分（サンプリング時間内における加速度計設置点での速度の増分値）と角度増分（同じくジャイロ設置点での角度の増分値）を入力とし，位置，速度，姿勢角を出力するものである．その特長は，早い計算周期（50 Hz～100 Hz）で計算を行うことで機体の激しい運動にも追従したダイナミックレンジの広い航法情報を生成できること，IMU 以外の外部センサを必要としない完全自律航法であること，の二点である．

２．１－１　バイアス観測更新

観測更新とは，GPS 観測量によりカルマンフィルタでストラップダウン INS 計算に含まれる誤差を推定した結果を使って，それぞれの誤差を補正する処理である．本節では IMU 出力の誤差を補正するアルゴリズムの定式化を行う．

本研究で用いたカルマンフィルタは IMU の誤差源としてバイアスのみを状態量と仮定している．したがって，フィルタの誤差推定量を使った IMU 出力の観測更新ではそのバイアスを補正することになる．ただし実時間のフィルタ出力になくても，IMU のスケールファクタやミスアライメントなどが事前に与えられている場合は，それらも同時に補正することができるよう定式化する．

今，ジャイロから出力される角度増分を$\Delta\boldsymbol{\theta}^b$，加速度計から出力される速度増分を$\Delta\boldsymbol{v}^b$とすると，IMU 出力の観測更新は以下の式に基づき行う．

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^b=\begin{pmatrix}1+G_{sx} & G_{xy} & G_{xz}\\ G_{yx} & 1+G_{sy} & G_{yz}\\ G_{zx} & G_{zy} & 1+G_{sz}\end{pmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}^b+\begin{pmatrix}\delta\hat{\omega}_{bx}\\ \delta\hat{\omega}_{by}\\ \delta\hat{\omega}_{bz}\end{pmatrix}\Delta t \quad (2.1\text{-}1)$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{v}}^b=\begin{pmatrix}1+A_{sx} & A_{xy} & A_{xz}\\ A_{yx} & 1+A_{sy} & A_{yz}\\ A_{zx} & A_{zy} & 1+A_{sz}\end{pmatrix}\Delta\boldsymbol{v}^b+\begin{pmatrix}\delta\hat{a}_{bx}\\ \delta\hat{a}_{by}\\ \delta\hat{a}_{bz}\end{pmatrix}\Delta t \quad (2.1\text{-}2)$$

ここで，（G_{sx}, G_{sy}, G_{sz}）はジャイロのスケールファクタ推定値，（$G_{xy}, G_{xz}, G_{yx}, G_{yz}, G_{zx}, G_{zy}$）はジャイロのミスアライメント推定値，（$A_{sx}, A_{sy}, A_{sz}$）は加速度計のスケールファクタ推定値，（$A_{xy}, A_{xz}, A_{yx}, A_{yz}, A_{zx}, A_{zy}$）は加速度計のミスアライメント推定値であり，すべて事前に値が与えられているものとする．また，$(\delta\hat{\omega}_{bx}, \delta\hat{\omega}_{by}, \delta\hat{\omega}_{bz})$はフィルタのジャイロバイアス誤差推定値，$(\delta\hat{a}_{bx}, \delta\hat{a}_{by}, \delta\hat{a}_{bz})$はフィルタの加速度計バイアス誤差推定値，$\Delta t$ は IMU において角度増分，速度増分を計測するときの積分時間（サンプリング時間）である．

２．１－２　コーニング補正 [1), 2), 3)]

ジャイロから出力される角度増分は，ジャイロ各軸で計測した角速度を一定時間積分したものである．積分の間，ジャイロの回転軸が動かなければ機体軸の角度変化量と等しくなるが，実際は回転軸が変化しているため正しい角度変化量を表していない．そこで，機体軸の角度変化量をジャイロの角度増分を使って計算する場合は補正が必要になる．これをコーニング補正と呼ぶ．

サンプリング時刻 t_{n-1} から t_n までの間に，機体軸が回転する量を機体座標系[†]で表したものを$\boldsymbol{\phi}(t_n)$とする．このとき，$\boldsymbol{\phi}(t_n)$は以下の微分方程式に基づいて計算される [1)]．

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) \tag{2.1-3}$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)$は時刻 t におけるジャイロの角速度を機体座標系で表したものである．右辺第２項がコーニング補正を示しており，ここでは$\boldsymbol{\phi}^2$以降の高次項を$\boldsymbol{\phi}$が微小であるとして無視している．時刻 t_{n-1} から t_n まで積分することにより$\boldsymbol{\phi}(t_n)$は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t_n) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt + \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\varphi}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt \\ &= \Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n) + \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\varphi}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt\end{aligned} \tag{2.1-4}$$

となる．コーニング補正の項は演繹的に計算できないので以下のように近似する [3)]．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\varphi}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt \\ &\approx \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \{\int_{t_{n-1}}^{t} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) + \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1}))dt\} \\ &\times(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) + \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1}))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1})}{2(t_n - t_{n-1})}(t - t_{n-1})^2\} \\ &\times(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) + \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1}))dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n)}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1})^2 dt \\ &= \frac{(t_n - t_{n-1})^2}{12}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n) \\ &= \frac{(t_n - t_{n-1})^2}{12}\{\frac{3\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n)}{2} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{n-1}) + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_n)}{2}\} \\ &= \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_{n-1}) \times \Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n)\end{aligned} \tag{2.1-5}$$

したがって，コーニング補正も含めた機体軸の角度増分は，

$$\boldsymbol{\varphi}(t_n) = \Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n) + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_{n-1}) \times \Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n) \tag{2.1-6}$$

となる．なお本アルゴリズムでは，コーニング補正における $\Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n)$として，時刻 t_n における観測更新後のジャイロ出力（角度増分値）$\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^b(t_n)$ を使用する．さらに，次節以降で使われる角度増分$\Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_n)$は，すべてコーニング補正後の機体軸の角度増分$\boldsymbol{\phi}(t_n)$である．

２．１－３　サイズ補正

ストラップダウン INS 計算では機体のどの点を軌道伝播させるかにより，積分する加速度の値を補正しなければならない．これは，軌道伝播させる点と加速度を計測する IMU の設置位置が異なっている場合，それぞれの点の加速度が違うからである．この補正をサイズ補正と呼ぶ．

いま，GPS/INS 複合航法に使用することを考えて，GPS アンテナの位置を軌道伝播する．IMU に対する GPS アンテナの位相中心を機体座標系で表したとき，$\boldsymbol{x}_{ant}^b$ になるとすると，慣性空間におけるアンテナ位置は，

$$\boldsymbol{x}_{ant}^i = \boldsymbol{x}_{acc}^i + C_b^i \boldsymbol{x}_{ant}^b \tag{2.1-7}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{x}_{acc}^i$ は慣性空間における加速度計の位

[†] 機体座標系は，機体に固定された座標系である．その３軸を総称して機体軸と呼ぶ．機体軸の取り方，原点を機体のどこに置くかに制限はないが，通常 x 軸を機首方向，y 軸を右翼方向，z 軸を機体下方向にとる（付録１参照）．

置，C_b^i は機体座標系から慣性座標系への方向余弦行列（DCM, Direction Cosine Matrix）である．したがって GPS アンテナの位相中心における加速度は，

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{ant}^{i} = \ddot{\boldsymbol{x}}_{acc}^{i} + C_b^i \{[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}\times]\boldsymbol{x}_{ant}^{b} + [\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\times]^2 \boldsymbol{x}_{ant}^{b}\} \tag{2.1-8}$$

となる．右辺第２項がここで考えるサイズ補正項で，レバーアーム効果による正接力と遠心力を表している．この結果，GPS アンテナの位相中心における速度増分は，

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{ant}^{b} &= \Delta\boldsymbol{v}^{b} + \Delta\boldsymbol{v}_{size} \\ &= \Delta\boldsymbol{v}^{b} + \{[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}\times] + [\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\times]^2\}\boldsymbol{x}_{ant}^{b}\Delta t\end{aligned} \tag{2.1-9}$$

と表される．ここでΔt は速度増分の積分時間である．なお本アルゴリズムでは，サイズ補正における$\Delta\boldsymbol{v}^b$として観測更新後の加速度計出力（速度増分値）$\Delta\hat{\boldsymbol{v}}^b$ を使用する．さらに，次節以降で使われる速度増分$\Delta\boldsymbol{v}^b$は，すべてサイズ補正後の GPS アンテナの位相中心における速度増分 $\Delta\boldsymbol{v}_{ant}^{b}$ である．

２．１－４　クォータニオン時間更新 [4), 5)]

機体座標系から航法座標系†への回転を表すクォータニオンを以下のように定義する．

$$\boldsymbol{q}^n = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} + q_4 \tag{2.1-10}$$

このときクォータニオンは以下の微分方程式を満足する．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Delta\omega_z & -\Delta\omega_y & \Delta\omega_x \\ -\Delta\omega_z & 0 & \Delta\omega_x & \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_y & -\Delta\omega_x & 0 & \Delta\omega_z \\ -\Delta\omega_x & -\Delta\omega_y & -\Delta\omega_z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \tag{2.1-11}$$

ここで，

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} - C_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} \tag{2.1-12}$$

である．(2.1-11)と(2.1-12)式を用いてクォータニオンの時間更新を行うには航法座標系から機体座標系への方向余弦行列C_n^b が必要である．ところが，この方向余弦行列はクォータニオンを用いて生成されるため，誤差が入ると計算上発散する可能性がある．そこで，C_n^b を必要としない形の時間更新アルゴリズムを求める．

まず，以下の４つの座標系を定義する．

S1：時刻 t での航法座標系

S2：時刻 $t+\Delta t$ での航法座標系

S3：時刻 t での機体座標系

S4：時刻 $t+\Delta t$ での機体座標系

このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}^n(t+\Delta t) &= \boldsymbol{q}(4\to 2) \\ \boldsymbol{q}^n(t) &= \boldsymbol{q}(3\to 1)\end{aligned} \tag{2.1-13}$$

と定義され，

$$\boldsymbol{q}^n(t+\Delta t) = m[\boldsymbol{q}(1\to 2)]m^*[\boldsymbol{q}(4\to 3)]\boldsymbol{q}^n(t) \tag{2.1-14}$$

となる．ここで $m[]$，$m^*[]$はクォータニオン変質行列（quaternion transmuted matrix）と呼ばれるものである．この結果，クォータニオン時間更新のための遷移行列 Φ_q は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\Phi_q(t+\Delta t, t) &= m\big[\boldsymbol{q}(1\to 2)\big]m^*\big[\boldsymbol{q}(4\to 3)\big] \\ &= \left\{\cos(\frac{\phi_n}{2})\boldsymbol{I} + \sin(\frac{\phi_n}{2})\frac{\Omega_n}{|\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}|}\right\}\left\{\cos(\frac{\phi_b}{2})\boldsymbol{I} + \sin(\frac{\phi_b}{2})\frac{\Omega_b}{|\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}|}\right\}\end{aligned} \tag{2.1-15}$$

ここで，

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{nz} & -\omega_{ny} & -\omega_{nx} \\ -\omega_{nz} & 0 & \omega_{nx} & -\omega_{ny} \\ \omega_{ny} & -\omega_{nx} & 0 & -\omega_{nz} \\ \omega_{nx} & \omega_{ny} & \omega_{nz} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1-16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^{n} = (\omega_{nx}, \omega_{ny}, \omega_{nz})^T \tag{2.1-17}$$

$$\Omega_b = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{bz} & -\omega_{by} & \omega_{bx} \\ -\omega_{bz} & 0 & \omega_{bx} & \omega_{by} \\ \omega_{by} & -\omega_{bx} & 0 & \omega_{bz} \\ -\omega_{bx} & -\omega_{by} & -\omega_{bz} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1-18}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = (\omega_{bx}, \omega_{by}, \omega_{bz})^T \tag{2.1-19}$$

† 航法座標系は，その原点が機体に固定され，３軸がそれぞれ現在地での北方向，東方向，下方向を向く座標系である．原点の位置は軌道の基準点（今の場合，GPS アンテナの位置）にとる（付録１参照）．現在地での北，東，下は，WGS84 座標系で定義される回転楕円体を基準とする．

$$\phi_n = |\boldsymbol{\omega}_{in}^n|\Delta t \tag{2.1-20}$$

$$\phi_b = |\boldsymbol{\omega}_{ib}^b|\Delta t \tag{2.1-21}$$

ここで計算量を減らすため，(2.1-15)式をテーラー展開したときの近似を考える．ϕ_n は時間Δt の間に飛翔体が地球近傍を飛行するときの航法座標系の慣性空間に対する回転を表しており非常に小さな値である．したがって 2 乗以上の項を消去する．ϕ_b は時間Δt の間に機体が回転する角度であり，Δt が小さいと仮定して 5 乗以上の項を消去する．その結果，(2.1-15)式は，

$$\Phi_q(t+\Delta t, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+\lambda & \varepsilon_z & -\varepsilon_y & \varepsilon_x \\ -\varepsilon_z & 2+\lambda & \varepsilon_x & \varepsilon_y \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 2+\lambda & \varepsilon_z \\ -\delta_x & -\delta_y & -\delta_z & 2+\delta \end{pmatrix} \tag{2.1-22}$$

となる．ここで，

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T \tag{2.1-23}$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_x, \delta_y, \delta_z)^T \tag{2.1-24}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \kappa\Delta\boldsymbol{\theta}^b + \Delta\boldsymbol{\varphi}_n \tag{2.1-25}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \kappa\Delta\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{b}} - \Delta\boldsymbol{\varphi}_n \tag{2.1-26}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^b \equiv \boldsymbol{\varphi}(t_n) \quad \text{‥コーニング補正後の角度増分} \tag{2.1-27}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\omega}_{in}^n \Delta t \tag{2.1-28}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \left(\frac{v_E}{r_p+h} + \omega_e \cos L, -\frac{v_N}{r_m+h}, -\frac{v_E}{r_p+h}\tan L - \omega_e \sin L\right)^T \tag{2.1-29}$$

$$r_p = \frac{r_e}{(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}} \,{}^{\dagger} \tag{2.1-30}$$

$$r_m = \frac{r_e(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{3/2}} \,{}^{\dagger} \tag{2.1-31}$$

$$e^2 = 2f(1-f) \tag{2.1-32}$$

$$\lambda = -\frac{\phi_b^2}{4} + \frac{\phi_b^4}{192} \tag{2.1-33}$$

$$\kappa = 1 - \frac{\phi_b^2}{24} \tag{2.1-34}$$

$$\phi_b = |\Delta\boldsymbol{\theta}_b| \tag{2.1-35}$$

である．上式において r_e, f, ω_e は GPS の準拠楕円体である WGS84 の定義にしたがい，それぞれ以下の値をとる．

$$r_e = 6{,}378{,}137\ \mathrm{m} \tag{2.1-36}$$

$$f = \frac{1}{298.257223563} \tag{2.1-37}$$

$$\omega_e = 7.2921151467\times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s} \tag{2.1-38}$$

また，L, h はそれぞれ飛翔体の測地学的緯度，高度であり，v_N, v_E は飛翔体の北方向，東方向の速度である．

２．１－５　クォータニオン観測更新

本アルゴリズムでは，カルマンフィルタの次元を少なくするため，姿勢角誤差の状態量として方向余弦行列の誤差を選択した．したがって，ストラップダウン INS 計算で使われるクォータニオンの観測更新を行うためには，方向余弦行列の誤差からクォータニオンの誤差への変換が必要である．

方向余弦行列の誤差$\delta\boldsymbol{e}^n$ は以下の式で定義される．

$$\tilde{C}_b^n = (I - [\delta\boldsymbol{e}^n\times])C_b^n \tag{2.1-39}$$

ここで，~ は誤差を含む方向余弦行列とする．よって，誤差推定量が得られたとき観測更新後の方向余弦行列は以下の式で表される．

$$\hat{C}_b^n = (I + [\delta\hat{\boldsymbol{e}}^n\times])\tilde{C}_b^n \tag{2.1-40}$$

† r_p, r_m はそれぞれ現在地における地球の大圏半径と子午半径を表している（付録１参照）．

同様にクォータニオン $\boldsymbol{q}^n$ の観測更新を以下の式で定義する．ここで $\tilde{\boldsymbol{q}}^n$ は時間更新後のクォータニオン（ストラップダウン INS 計算での誤差を含む）である．

$$\hat{\boldsymbol{q}}^n = \tilde{\boldsymbol{q}}^n + \delta\hat{\boldsymbol{q}}^n \tag{2.1-41}$$

ところで，方向余弦行列の誤差 $\delta\boldsymbol{e}^n$ は(2.1-40)式よりクォータニオンを使うと以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&[\delta\hat{e}^n\times] \\
&= \hat{C}_b^n \tilde{C}_n^b - I \\
&= \begin{pmatrix} \hat{q}_1^2-\hat{q}_2^2-\hat{q}_3^2+\hat{q}_4^2 & 2(\hat{q}_1\hat{q}_2-\hat{q}_3\hat{q}_4) & 2(\hat{q}_1\hat{q}_3+\hat{q}_2\hat{q}_4) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_2+\hat{q}_3\hat{q}_4) & \hat{q}_2^2-\hat{q}_1^2-\hat{q}_3^2+\hat{q}_4^2 & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3-\hat{q}_1\hat{q}_4) \\ 2(\hat{q}_1\hat{q}_3-\hat{q}_2\hat{q}_4) & 2(\hat{q}_2\hat{q}_3+\hat{q}_1\hat{q}_4) & \hat{q}_3^2-\hat{q}_1^2-\hat{q}_2^2+\hat{q}_4^2 \end{pmatrix} \cdot \\
&\begin{pmatrix} \tilde{q}_1^2-\tilde{q}_2^2-\tilde{q}_3^2+\tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2+\tilde{q}_3\tilde{q}_4) & 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3-\tilde{q}_2\tilde{q}_4) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2-\tilde{q}_3\tilde{q}_4) & \tilde{q}_2^2-\tilde{q}_1^2-\tilde{q}_3^2+\tilde{q}_4^2 & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3+\tilde{q}_1\tilde{q}_4) \\ 2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3+\tilde{q}_2\tilde{q}_4) & 2(\tilde{q}_2\tilde{q}_3-\tilde{q}_1\tilde{q}_4) & \tilde{q}_3^2-\tilde{q}_1^2-\tilde{q}_2^2+\tilde{q}_4^2 \end{pmatrix} - I
\end{aligned} \tag{2.1-42}$$

(2.1-41)式と(2.1-42)式より，誤差の二乗項以上を消去すると，

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{e}_1 \\ \delta\hat{e}_2 \\ \delta\hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_3 & 2\tilde{q}_2 & -2\tilde{q}_1 \\ 2\tilde{q}_3 & 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_1 & -2\tilde{q}_2 \\ -2\tilde{q}_2 & 2\tilde{q}_1 & 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{q}_1 \\ \delta\hat{q}_2 \\ \delta\hat{q}_3 \\ \delta\hat{q}_4 \end{pmatrix} \tag{2.1-43}$$

となる．さらに，クォータニオンの正規性から，

$$|\hat{\boldsymbol{q}}^n| = |\tilde{\boldsymbol{q}}^n| = 1 \tag{2.1-44}$$

$$\therefore 2\tilde{q}_1\delta\hat{q}_1 + 2\tilde{q}_2\delta\hat{q}_2 + 2\tilde{q}_3\delta\hat{q}_3 + 2\tilde{q}_4\delta\hat{q}_4 = 0 \tag{2.1-45}$$

である．以上より，方向余弦行列の誤差推定量とクォータニオンの誤差推定量には以下の関係がある．

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{e}_1 \\ \delta\hat{e}_2 \\ \delta\hat{e}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_3 & 2\tilde{q}_2 & -2\tilde{q}_1 \\ 2\tilde{q}_3 & 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_1 & -2\tilde{q}_2 \\ -2\tilde{q}_2 & 2\tilde{q}_1 & 2\tilde{q}_4 & -2\tilde{q}_3 \\ 2\tilde{q}_1 & 2\tilde{q}_2 & 2\tilde{q}_3 & 2\tilde{q}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\hat{q}_1 \\ \delta\hat{q}_2 \\ \delta\hat{q}_3 \\ \delta\hat{q}_4 \end{pmatrix} \tag{2.1-46}$$

(2.1-41)式と(2.1-46)式から，クォータニオンの観測更新を行うことができる．

クォータニオンはその定義からノルムが１である．しかし，時間更新と観測更新において二乗以上の微小項を無視して定式化したため，計算とともにその正規性が崩れる．そこで，本アルゴリズムでは観測更新のたびにクォータニオンの正規化を行う．今，正規化後のクォータニオンを $\boldsymbol{q}^n$ とすると，その最適推定値は，

$$\begin{aligned} \zeta &= |\boldsymbol{q}^n| - 1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1-47}$$

の条件のもとに，以下の関数を最小にする値と考える．

$$z = \sum (\hat{q}_i - q_i)^2 \tag{2.1-48}$$

変数 λ を導入し，

$$\frac{\partial z}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} = 0 \tag{2.1-49}$$

を解くと，

$$\boldsymbol{q}^n = \hat{\boldsymbol{q}}^n / |\hat{\boldsymbol{q}}^n| \tag{2.1-50}$$

となる．

２．１－６　ＤＣＭ計算

クォータニオンの定義より方向余弦行列 C_b^n は以下の式で計算される．

$$C_b^n = \begin{pmatrix} q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_1q_2-q_3q_4) & 2(q_1q_3+q_2q_4) \\ 2(q_1q_2+q_3q_4) & q_2^2-q_1^2-q_3^2+q_4^2 & 2(q_2q_3-q_1q_4) \\ 2(q_1q_3-q_2q_4) & 2(q_2q_3+q_1q_4) & q_3^2-q_1^2-q_2^2+q_4^2 \end{pmatrix} \tag{2.1-51}$$

２．１－７　オイラー角計算

方向余弦行列 C_b^n とオイラー角 $(\phi,\ \theta,\ \psi)$ には以下の関係式がある．

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi+\sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi+\cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi+\sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.1-52}$$

したがってオイラー角は方向余弦行列から，以下のアル

ゴリズムで計算される．

・ $C_b^n(1,1)$ と $C_b^n(2,1)$ がともに 0 近傍ならば，ピッチ角 90°の特異点でオイラー角は求めることができない．

・それ以外の時は，

$$\psi = \tan^{-1}(C_b^n(2,1)/C_b^n(1,1)) \tag{2.1-53}$$

$$\phi = \tan^{-1}(C_b^n(3,2)/C_b^n(3,3)) \tag{2.1-54}$$

$$\theta = \sin^{-1}(-C_b^n(3,1)) \tag{2.1-55}$$

で計算する．

２．１－８　重力モデル計算

地球を回転楕円体と仮定すると†，その重力ポテンシャルは以下の式で表される．

$$U(r,\varphi) = \frac{\mu}{r}\{1 - \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{r_e}{r})^k J_k P_k(\cos\varphi)\} \tag{2.1-56}$$

ここで μ は地球重力パラメータ，r_e は赤道半径，r は地球中心から現在位置までの距離，J_k は地球重力調和係数（zonal 項），P_k は k 次のルジャンドル多項式を表している．なお，φ は北極を 0°として赤道方向に取った逆方向の地心緯度である．

いま座標中心を地球の質量中心と一致するとし，さらに $k = 2$ 次までの重力ポテンシャルを考えるとすると，(2.1-56)式は以下のように近似される．

$$U(r,\varphi) = \mu\{\frac{1}{r} - \frac{J_2}{2}\frac{r_e^2}{r^3}(3\cos^2\varphi - 1)\} \tag{2.1-57}$$

地球の自転軸を含む平面内での重力ベクトルを求めるためには演算子，

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi \tag{2.1-58}$$

で偏分を取ればよい．ここで $\boldsymbol{i}_r$ は半径方向，$\boldsymbol{i}_\varphi$ は逆緯度方向の単位ベクトルを表している．この結果，重力ベクトルは，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= \nabla U(r,\varphi)\\ &= G_r\boldsymbol{i}_r + G_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi\end{aligned} \tag{2.1-59}$$

$$G_r = -\frac{\mu}{r^2}\{1 - \frac{3}{2}J_2(\frac{r_e}{r})^2(3\cos^2\varphi - 1)\} \tag{2.1-60}$$

$$G_\varphi = 3\frac{\mu}{r^2}(\frac{r_e}{r})^2 J_2\sin\varphi\cos\varphi \tag{2.1-61}$$

となる．

ストラップダウン INS 計算では，重力モデルに地球自転による遠心力も含めて定式化する．遠心力も考えた重力ベクトル $\boldsymbol{g}$ は，

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{G} - [\boldsymbol{\omega}_{ie}\times][\boldsymbol{\omega}_{ie}\times]\boldsymbol{r} \tag{2.1-62}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{\omega}_{ie}$ は地球自転の角速度ベクトル，$\boldsymbol{r}$ は地球の自転軸を含む平面内での現在位置ベクトルである．この結果，航法座標系（NED 座標系）での重力ベクトル $\boldsymbol{g}^n$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^n &= (g_N, g_E, g_D)^T\\ &= (G_N - r\omega_e^2\sin L\cos L_c, G_E, G_D - r\omega_e^2\cos L\cos L_c)^T\end{aligned} \tag{2.1-63}$$

と表される．ここで，ω_e は地球自転の角速度，L は測地学的緯度，L_c は地心緯度である．G_N，G_E，G_D を(2.1-60)式と(2.1-61)式から求め，緯度 L で展開すると(2.1-63)式は，

$$g_N \approx f_N(h\sin L\cos L) \tag{2.1-64}$$

$$g_E = 0 \tag{2.1-65}$$

$$g_D \approx f_D(h, h\sin^2 L, h\sin^4 L, h^2, h^2\sin^2 L, \sin^2 L, \sin^4 L, \sin^6 L) \tag{2.1-66}$$

の関数で近似できることが分かる．それぞれの関数（f_N, f_D）は種々にモデル化されており，ここでは測地基準系 1980 正規重力式 [6)] を採用する．すなわち，

$$\begin{pmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_n h\sin L\cos L \\ 0 \\ g_0(1 + g_2\sin^2 L + g_4\sin^4 L)\{1 - (g_{n1} - g_{n2}\sin^2 L)h + g_{n3}h^2\} \end{pmatrix}$$

† 実際の地球は回転楕円体ではないので，重力ポテンシャルの一般的表式には経度に依存する項（tesseral 項）が入る．しかし，ストラップダウン INS 計算は高レート（50 ~ 100 Hz）で処理しなければならないので，ここでは回転楕円体と簡単化している．

(2.1-67)

である．ここで，

$$g_0 = 9.7803267715\,\mathrm{m/s^2} \tag{2.1-68}$$

$$g_2 = 0.0052790414 \tag{2.1-69}$$

$$g_4 = 0.0000232718 \tag{2.1-70}$$

$$g_n = 1.63 \times 10^{-8}\ 1/\mathrm{s}^2 \tag{2.1-71}$$

$$g_{n1} = 3.1571 \times 10^{-7}\ 1/\mathrm{m} \tag{2.1-72}$$

$$g_{n2} = 2.1027 \times 10^{-9}\ 1/\mathrm{m} \tag{2.1-73}$$

$$g_{n4} = 7.3749 \times 10^{-14}\ 1/\mathrm{m}^2 \tag{2.1-74}$$

である．

例として，仙台における重力ベクトルを計算し，実際の測定値と比較する．理科年表より測定点（仙台）の座標は，

$$L = 38°\,14.9',\ h = 140\ \mathrm{m} \tag{2.1-75}$$

であり，重力の実測値は，

$$g = 9.8006583\ \mathrm{m/s^2} \tag{2.1-76}$$

である．(2.1-67)式より求めた重力モデルは，

$$g_D = 9.7997156\ \mathrm{m/s^2} \tag{2.1-77}$$

となる．その差は約 94 mgal であり，差の要因としてはモデル誤差，重力異常などが考えられる．ストラップダウン INS では，この誤差が航法精度を悪化させる要因となるが，複合航法では，加速度計バイアスと合算されてカルマンフィルタで推定，除去されることになる．

２．１－９　速度時間更新

ニュートンの運動則に基づき，加速度計では慣性空間における加速度（位置を２回微分したもの）から重力加速度を差し引いた値が計測される．すなわち，地球近傍において，

$$\boldsymbol{a}^i = \ddot{\boldsymbol{r}}^i - \boldsymbol{g}^i \tag{2.1-78}$$

である．ここで，$\boldsymbol{r}^i$ は加速度計の位置ベクトル，$\boldsymbol{a}^i$ は加速度計で計測される飛翔体の加速度ベクトル，$\boldsymbol{g}^i$ は地球重力加速度である．添字 i は(2.1-78)式が慣性空間で表現されていることを示す．

時刻 t における加速度計の位置，速度は，(2.1-78)式を以下のように積分することによって得られる．

$$\boldsymbol{v}^i(t) = \boldsymbol{v}^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \{\boldsymbol{a}^i(\tau) + \boldsymbol{g}^i(\tau)\} d\tau \tag{2.1-79}$$

$$\boldsymbol{r}^i(t) = \boldsymbol{r}^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}^i(\tau) d\tau \tag{2.1-80}$$

ここで，$\boldsymbol{v}^i(t_0)$，$\boldsymbol{r}^i(t_0)$ はそれぞれ計算開始時刻 t_0 における加速度計の速度，位置ベクトルである．ただし本システムでは，2.1-3 節で述べたサイズ補正を加速度計出力(2.1-78)式に施すので，(2.1-79)式と(2.1-80)式で計算されるのは GPS アンテナの位置となる．それぞれの初期値もそれに対応して，GPS アンテナの速度と位置とする．

以下ではストラップダウン INS 計算を行う局所的な座標系として航法座標系（NED 座標系）を選び，この座標系での速度時間更新の定式化を行う．航法座標系は飛翔体の位置（ここでは GPS アンテナの位置と同義）を原点として North 軸 East 軸 Down 軸を取った座標系である．また速度は，慣性空間に対してではなく地球に対するもの（対地速度）を考える．

まず，地球中心地球固定座標系で表した飛翔体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}^e$ を時間微分し，その結果を航法座標系に座標変換して対地速度を求める．すなわち，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^n &= C_e^n \frac{d\boldsymbol{r}^e}{dt} \\ &= C_e^n \frac{d(C_i^e \boldsymbol{r}^i)}{dt} \\ &= C_i^n \frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} + C_e^n \frac{dC_i^e}{dt} \boldsymbol{r}^i \end{aligned} \tag{2.1-81}$$

が航法座標系における速度ベクトルである．ここで，C_a^b は a 座標系から b 座標系への変換行列を表し，添字 e と n はそれぞれ，地球中心地球固定座標系，航法座標系を示している．(2.1-81)式において，

$$\frac{dC_i^e}{dt} = -C_i^e \Omega_{ie}^i \tag{2.1-82}$$

である．Ω_{ie}^{i} （$=[\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i}\times]$）は，地球固定座標系の慣性座標系に対する回転を表す角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i}$ のスキュー・シンメトリック・フォームである．この結果(2.1-81)式は,

$$\boldsymbol{v}^n = C_i^n \frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} - C_i^n \Omega_{ie}^i \boldsymbol{r}^i \qquad (2.1\text{-}83)$$

となる．(2.1-83)式をもう一度時間微分することにより，航法座標系における速度時間更新のための微分方程式が導かれる．すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{v}^n}{dt} &= C_i^n \frac{d^2\boldsymbol{r}^i}{dt^2} - C_i^n \Omega_{in}^i \frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} + C_i^n \Omega_{in}^i \Omega_{ie}^i \boldsymbol{r}^i - C_i^n \Omega_{ie}^i \frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} \\ &= C_i^n \{\frac{d^2\boldsymbol{r}^i}{dt^2} - (\Omega_{in}^i + \Omega_{ie}^i)\frac{d\boldsymbol{r}^i}{dt} + (\Omega_{en}^i + \Omega_{ie}^i)\Omega_{ie}^i \boldsymbol{r}^i\} \\ &= C_i^n \{\frac{d^2\boldsymbol{r}^i}{dt^2} - (\Omega_{en}^i + 2\Omega_{ie}^i) C_n^i \boldsymbol{v}^n - \Omega_{ie}^i \Omega_{ie}^i \boldsymbol{r}^i\}\end{aligned} \qquad (2.1\text{-}84)$$

である．ここで(2.1-78)式を代入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{v}^n}{dt} = C_i^n \{\boldsymbol{a}^i + \boldsymbol{g}^i - (\Omega_{en}^i + 2\Omega_{ie}^i) C_n^i \boldsymbol{v}^n - \Omega_{ie}^i \Omega_{ie}^i \boldsymbol{r}^i\} \qquad (2.1\text{-}85)$$

となり，これが航法座標系での速度に関する微分方程式である．なお，(2.1-85)式において重力加速度と右辺最終項の遠心力は合わせて，航法座標系における重力加速度 $\boldsymbol{g}^n$ として扱われる．またストラップダウン方式の場合，加速度計は機体に固定されている．すなわち，(2.1-85)式は，

$$\frac{d\boldsymbol{v}^n}{dt} = C_b^n \boldsymbol{a}^b - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \qquad (2.1\text{-}86)$$

となる．なお，右辺第２項のコリオリ力を計算するときにスキュー・シンメトリック・フォームで使われる角速度ベクトルは，

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [(\dot{l} + 2\omega_e)\cos L, -\dot{L}, -(\dot{l} + 2\omega_e)\sin L]^T \qquad (2.1\text{-}87)$$

$$\begin{aligned}\dot{L} &= v_N / (r_m + h) \\ \dot{l} &= v_E / (r_p + h)\cos L \\ \boldsymbol{v}^n &= (v_N, v_E, v_D)^T \\ r_m &= \frac{r_e(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{3/2}} \\ r_p &= \frac{r_e}{(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}}\end{aligned} \qquad (2.1\text{-}88)$$

で計算される．ここで，$(L, l, h)^T$ は飛翔体の緯度，経度，高度，r_m は現在地における地球の子午半径，r_p は大圏半径である．また，ω_e は地球の自転速度である．地球の形状パラメータ r_e，e については WGS84 の値を採用する（2.1-3 節参照）．

(2.1-86)式をオイラー法による積分で解くと，速度の時間更新の式は，

$$\boldsymbol{v}^n(t+\Delta t) = C_b^n \Delta\boldsymbol{v}^b - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\boldsymbol{v}^n(t)\Delta t + \boldsymbol{g}^n \Delta t + \boldsymbol{v}^n(t) \qquad (2.1\text{-}89)$$

となる．

２．１－１０　速度観測更新

カルマンフィルタで得られた速度誤差推定値は以下の式に基づき，観測更新に用いられる．

$$\hat{\boldsymbol{v}}^n(t) = \boldsymbol{v}^n(t) + \delta\hat{\boldsymbol{v}}^n(t) \qquad (2.1\text{-}90)$$

２．１－１１　位置時間更新

飛翔体の緯度，経度，高度は，以下の微分方程式で表される（2.1-9 節参照）．

$$\dot{L} = v_N / (r_m + h) \qquad (2.1\text{-}91)$$

$$\dot{l} = v_E / (r_p + h)\cos L \qquad (2.1\text{-}92)$$

$$\dot{h} = -v_D \qquad (2.1\text{-}93)$$

オイラー法による積分で解くと，位置の時間更新の式は，

$$L(t+\Delta t) = L(t) + \Delta t \frac{v_N(t)}{r_m(t) + h(t)} \qquad (2.1\text{-}94)$$

$$l(t+\Delta t)=l(t)+\Delta t\frac{v_N(t)}{(r_p(t)+h(t))\cos L(t)} \qquad (2.1\text{-}95)$$

$$h(t+\Delta t)=h(t)-\Delta t\cdot v_D(t) \qquad (2.1\text{-}96)$$

となる．

２．１－１２　位置観測更新

カルマンフィルタで得られた位置誤差推定値は以下の式に基づき，観測更新に用いられる．

$$\hat{L}(t)=L(t)+\delta\hat{L}(t) \qquad (2.1\text{-}97)$$

$$\hat{l}(t)=l(t)+\delta\hat{l}(t) \qquad (2.1\text{-}98)$$

$$\hat{h}(t)=h(t)+\delta\hat{h}(t) \qquad (2.1\text{-}99)$$

２．２　フィルタ計算 7)９６絵 133@tw 区。ア C。jp、

カルマンフィルタでは，複合航法における推定すべき誤差状態量のダイナミクスを次式のように状態空間における１次の連立微分方程式で定義する．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=F(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{w}(t) \qquad (2.2\text{-}1)$$

ここで，

- $\boldsymbol{x}$ … n × 1 次元の誤差状態量ベクトル
- F … n × n 次元のシステムダイナミクス行列
- $\boldsymbol{w}$ … n × 1 次元の平均値 0 のプロセスノイズベクトル（$\boldsymbol{w}\sim \mathrm{N}(0,q)$）

である．(2.2-1)式は線形であるので，状態量が非線形のダイナミクスに従う場合には，基準軌道まわりで線形化する必要がある．

このダイナミクスを下記のように遷移行列を用いて表すと，

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\boldsymbol{w}(\tau)d\tau \qquad (2.2\text{-}2)$$

遷移行列 Φ は，以下の微分方程式を満足する．

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)=F(t)\Phi(t,t_0) \qquad (2.2\text{-}3)$$

$$\Phi(t_0,t_0)=I \qquad (2.2\text{-}4)$$

今，$F(t)$ が t_0 から t の間，一定であると仮定すると，

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0)&=\Phi(t-t_0)\\&=I+F\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2!}F^2\cdot(t-t_0)^2+\cdots\end{aligned} \qquad (2.2\text{-}5)$$

となる．

カルマンフィルタにおける共分散行列と状態量の時間更新を考える．状態量 $\boldsymbol{x}$ の共分散行列を P とすると，その時間更新は遷移行列 Φ を用いて以下のように表される．

$$P(t,t_0)=\Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi(t,t_0)^T+Q(t,t_0) \qquad (2.2\text{-}6)$$

ここでプロセスノイズの共分散行列 Q は，プロセスノイズの電力密度行列 q†を積分して以下の式で求められる．

$$Q(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)q(\tau)\Phi(t,\tau)^T d\tau \qquad (2.2\text{-}7)$$

$F(t)$ と $q(t)$ が t_0 から t の間，一定であると仮定すると(2.2-7)式は，

$$\begin{aligned}Q(t,t_0)&=Q(t-t_0)\\&=\int_{0}^{t-t_0}\Phi(\tau)q\Phi(\tau)^T d\tau\end{aligned} \qquad (2.2\text{-}8)$$

と簡単化できる．以上より，離散化した時刻 t_k から t_{k+1} までの時間更新を考えると誤差共分散行列は(2.2-6)式より以下のようになる．

$$P_{k+1}(-)=\Phi(T)P_k\Phi(T)^T+Q(T) \qquad (2.2\text{-}9)$$

ただし，

$$T=t_{k+1}-t_k \qquad (2.2\text{-}10)$$

であり，(-) はそれが観測データの入る前の推定値であることを表している．同様に，時刻 t_k から t_{k+1} まで時間更新したときの状態量の最適推定値は(2.2-2)式の平均値となり，

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}(-)=\Phi(T)\hat{\boldsymbol{x}}_k \qquad (2.2\text{-}11)$$

である．ここで ^ は，カルマンフィルタの推定値であることを示している．

† $E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}(t+\tau)^T]=q(t)\delta(\tau)$

つぎに，カルマンフィルタにおける共分散行列と状態量の観測更新を考える．観測データが次の観測方程式で表されるとする．

$$z_{k+1} = \boldsymbol{h}_{k+1}{}^T \boldsymbol{x}_{k+1}(-) + v_{k+1} \tag{2.2-12}$$

ここで，

z_{k+1} … 時刻 t_{k+1} における観測データ

$\boldsymbol{h}_{k+1}$ … n × 1 次元の観測行列

v_{k+1} … 観測ノイズ（$v_{k+1} \sim \mathrm{N}(0, r_{k+1})$）

である．カルマンフィルタにおける観測更新は，時刻 t_{k+1} における観測データを使って次のように表される．

$$\boldsymbol{k} = P_{k+1}(-)\boldsymbol{h}_{k+1} / \alpha \tag{2.2-12}$$

$$\alpha = \boldsymbol{h}_{k+1}{}^T P_{k+1}(-)\boldsymbol{h}_{k+1} + r_{k+1} \tag{2.2-14}$$

$$P_{k+1} = P_{k+1}(-) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{h}_{k+1}{}^T P_{k+1}(-) \tag{2.2-15}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}(-) + \boldsymbol{k}(z_{k+1} - \boldsymbol{h}_{k+1}{}^T \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}(-)) \tag{2.2-16}$$

ここで，$\boldsymbol{k}$ はカルマンゲイン，r_{k+1} は観測ノイズの分散である．

複合航法におけるカルマンフィルタは，ストラップダウン INS 航法の出力を基準軌道とし，そのまわりでの INS 誤差，GPS 受信機の時計バイアス誤差，搬送波位相アンビギュイティ誤差，等を推定する．観測量として，シュードレンジ，デルタレンジ，搬送波位相の GPS データを用い，時間更新，観測更新を繰り返しながら誤差を推定する．推定された誤差量は，ストラップダウン INS 航法計算にフィードバックされ(2.1 節の観測更新の項を参照)，INS 誤差の増大を抑え，安定した高精度の航法データを出力するのに用いられる．

２．２－１　カルマンフィルタ時間更新

ここでは具体的に，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法における共分散行列と状態量の時間更新アルゴリズムについて述べる．それぞれの時間更新を行うためには，システムダイナミクス行列から求まる遷移行列 Φ とプロセスノイズ行列 Q を求める必要がある．

(1) 遷移行列とプロセスノイズ行列

システムダイナミクス行列 F を求めるためには，誤差状態量として何を選ぶか決めなければならない．搬送波位相 DGPS/INS 複合航法では，INS 誤差，GPS 時計バイアス誤差，搬送波位相アンビギュイティ誤差を誤差状態量と考え，以下の 26 状態量（9 チャンネル GPS 受信機の場合）を定義する．

$$\boldsymbol{x} = (\delta\boldsymbol{r}^n, \delta\boldsymbol{v}^n, \delta\boldsymbol{e}^n, \delta\boldsymbol{b}_{acc}, \delta\boldsymbol{b}_{gyro}, \delta\boldsymbol{b}_{clk}, \delta\boldsymbol{n})^T \tag{2.2-17}$$

ここで，

$\delta\boldsymbol{r}^n = (\delta L, \delta l, \delta h)^T$ .... INS 位置誤差

$\delta\boldsymbol{v}^n = (\delta v_N, \delta v_E, \delta v_D)^T$ .... INS 速度誤差

$\delta\boldsymbol{e}^n = (\delta e_1, \delta e_2, \delta e_3)^T$ .... INS 方向余弦行列誤差

$\delta\boldsymbol{b}_{acc} = (\delta a_{bx}, \delta a_{by}, \delta a_{bz})^T$ .... INS 加速度バイアス誤差

$\delta\boldsymbol{b}_{gyro} = (\delta\omega_{bx}, \delta\omega_{by}, \delta\omega_{bz})^T$ .... INS ジャイロバイアス誤差

$\delta\boldsymbol{b}_{clk} = (\delta b, \delta\dot{b})^T$ .... GPS 時計バイアス誤差

$\delta\boldsymbol{n} = (\lambda\delta n_1, \lambda\delta n_2, \cdots, \lambda\delta n_9)^T$ .... 搬送波位相アンビギュイティ誤差

λ .... 搬送波の波長

である．

このとき，システムダイナミクス行列 F は以下のように表される．

$$F = \begin{pmatrix} F_{rr} & F_{rv} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{vr} & F_{vv} & F_{ve} & F_{vb} & 0 & 0 & 0 \\ F_{er} & F_{ev} & F_{ee} & 0 & F_{eb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{ba} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{bg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix} \tag{2.2-18}$$

行列各要素の導出は付録に示し，ここでは結果だけを次にまとめる．なお，各要素の計算で使用する航法データは INS 計算および GPS データ処理で扱っている値であり，誤差を含むものであることに注意する．

$$F_{rr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{v_N}{r^2} \\ \dfrac{v_E \sin L}{r\cos^2 L} & 0 & -\dfrac{v_E}{r^2 \cos L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-19}$$

$$F_{rv} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r\cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2-20}$$

$$F_{vr} = \begin{pmatrix} -v_E\left(\frac{v_E}{r\cos^2 L} + 2\omega_e \cos L\right) - r{\omega_e}^2 \cos 2L & 0 & \frac{v_E \tan^2 L - v_N v_D}{r^2} - \frac{{\omega_e}^2 \sin 2L}{2} \\ v_N\left(\frac{v_E}{r\cos^2 L} + 2\omega_e \cos L\right) - 2v_D\omega_e \sin L & 0 & -\frac{v_N v_E \tan L + v_E v_D}{r^2} \\ 2v_E\omega_e \sin L + r{\omega_e}^2 \sin 2L & 0 & \frac{{v_N}^2 + {v_E}^2}{r^2} - {\omega_e}^2 \cos^2 L - 2\frac{\mu}{r^3} \end{pmatrix} \tag{2.2-21}$$

$$F_{vv} = \begin{pmatrix} \frac{v_D}{r} & -2\left(\frac{v_E \tan L}{r} + \omega_e \sin L\right) & \frac{v_N}{r} \\ \frac{v_E \tan L}{r} + 2\omega_e \sin L & \frac{v_D + v_N \tan L}{r} & \frac{v_E}{r} + 2\omega_e \cos L \\ -\frac{2v_N}{r} & -2\left(\frac{v_E}{r} + \omega_e \cos L\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-22}$$

$$r = r_e + h \tag{2.2-23}$$

$$F_{ve} = \begin{pmatrix} 0 & a_D & -a_E \\ -a_D & 0 & a_N \\ a_E & -a_N & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-24}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^n &= (a_N, a_E, a_D)^T \\ &= C_b^n \boldsymbol{a}^b \end{aligned} \tag{2.2-25}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^b &= (a_x, a_y, a_z)^T \\ &= \Delta \boldsymbol{v}^b / \Delta t \end{aligned} \tag{2.2-26}$$

$$F_{vb} = C_b^n \tag{2.2-27}$$

$$F_{er} = \begin{pmatrix} \omega_e \sin L & 0 & \frac{v_E}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N}{r^2} \\ \frac{v_E + v_E \tan^2 L}{r} + \omega_e \cos L & 0 & -\frac{v_E \tan^2 L}{r^2} \end{pmatrix} \tag{2.2-28}$$

$$F_{ev} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan L}{r} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-29}$$

$$F_{ee} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{nz} & -\omega_{ny} \\ -\omega_{nz} & 0 & \omega_{nx} \\ \omega_{ny} & -\omega_{nx} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-30}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = (\omega_{nx}, \omega_{ny}, \omega_{nz})^T \tag{2.2-31}$$

$$F_{eb} = C_b^n \tag{2.2-32}$$

$$F_{ba} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{ba}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{ba}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ba}} \end{pmatrix} \tag{2.2-33}$$

$$F_{bg} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{bg}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{bg}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{bg}} \end{pmatrix} \tag{2.2-34}$$

$$F_{bc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2-35}$$

ここで，L, l, h はそれぞれ緯度，経度，高度，v_N, v_E, v_D はそれぞれ北方向，東方向，下方向の速度，C_b^n は機体軸座標系から航法座標系への変換を表す方向余弦行列，a_x, a_y, a_z は機体軸座標系における加速度計出力，$\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ は航法座標系の慣性空間に対する回転を表す角速度ベクトル，T_{ba} と T_{bg} はそれぞれ加速度バイアスとジャイロバイアスの時定数，r_e と ω_e は地球に関するパラメータで，それぞれ赤道平均半径と自転速度である．

搬送波位相アンビギュイティ誤差 $\delta \boldsymbol{n}$ のダイナミクスは一次マルコフ過程でモデル化した．すなわち，(2.2-18) 式における F_n は以下のように表される．

$$F_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_n} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{T_n} \end{pmatrix} \tag{2.2-36}$$

ここで T_n はアンビギュイティ誤差の時定数で，観測量に

含まれる大気遅延やマルチパスのダイナミクスを考慮して値を決める．

システムダイナミクス行列 F は，時刻 t_k から t_{k+1} までの間，一定と仮定してよいので(2.2-18)式を(2.2-5)式に代入して，遷移行列 Φ を求める．その際，INS 位置誤差，速度誤差，姿勢角誤差に関する項は数式が複雑なため厳密解を求めるのは困難である．しかし，INS 誤差のダイナミクスの時定数がシューラー周期（84 分）であり，時間更新の間隔が 1 秒程度であることを考えると，T の 1 次項まで計算すれば十分である．その結果，遷移行列は，

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix} I+F_{rr}T & F_{rv}T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{vr}T & I+F_{vv}T & F_{ve}T & F_{vb}T & 0 & 0 & 0 \\ F_{er}T & F_{ev}T & I+F_{ee}T & 0 & F_{eb}T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{ba} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{bg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_n \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}37)$$

となる．ただし，

$$\Phi_{ba}=\begin{pmatrix} \exp(-\frac{T}{T_{ba}}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{T}{T_{ba}}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-\frac{T}{T_{ba}}) \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}38)$$

$$\Phi_{bg}=\begin{pmatrix} \exp(-\frac{T}{T_{bg}}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{T}{T_{bg}}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-\frac{T}{T_{bg}}) \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}39)$$

$$\Phi_{bc}=\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}40)$$

$$\Phi_{n}=\begin{pmatrix} \exp(-\frac{T}{T_{n}}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{T}{T_{n}}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(-\frac{T}{T_{n}}) \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}41)$$

である．

プロセスノイズベクトルを以下のように定義する．すなわち，加速度バイアス，ジャイロバイアス，GPS 時計バイアス，搬送波位相アンビギュイティに関する状態量にノイズを付加する．

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{w}_{ba},\boldsymbol{w}_{bg},\boldsymbol{w}_{bc},\boldsymbol{w}_{n})^T \quad (2.2\text{-}42)$$

したがって，プロセスノイズの電力密度行列は以下のようになる．

$$q=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&q_{ba}&0&0&0 \\ 0&0&0&0&q_{bg}&0&0 \\ 0&0&0&0&0&q_{bc}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&q_n \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}43)$$

ただし，

$$q_{ba}=\begin{pmatrix} q_a & 0 & 0 \\ 0 & q_a & 0 \\ 0 & 0 & q_a \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}44)$$

$$q_{bg}=\begin{pmatrix} q_g & 0 & 0 \\ 0 & q_g & 0 \\ 0 & 0 & q_g \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}45)$$

$$q_{bc}=\begin{pmatrix} q_b & 0 \\ 0 & q_{\dot{b}} \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}46)$$

$$q_{n}=\begin{pmatrix} q_{amb} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{amb} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_{amb} \end{pmatrix} \quad (2.2\text{-}47)$$

である．ここで，q_a は加速度バイアスに関するプロセスノイズの電力密度，q_g はジャイロバイアスに関するプロセスノイズの電力密度，q_b と $q_{\dot{b}}$ は，それぞれ GPS 時計バイアスとドリフトに関するプロセスノイズの電力密度，q_{amb} は搬送波位相アンビギュイティに関するプロセスノイズの電力密度である．なお，加速度計，ジャイロ，アンビギュイティに関して各軸，各チャンネルで電力密度の大きさを変える必然性がないので，ここでは同一の値を取るものとした．

行列 q は時刻 t_k から t_{k+1} の間，一定と考えてよいので，(2.2-37)式と(2.2-43)式を(2.2-8)式に代入して，

$$Q(T)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{vv} & 0 & Q_{vb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ee} & 0 & Q_{eb} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{vb}^T & 0 & Q_{ba} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{eb}^T & 0 & Q_{bg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_n \end{pmatrix} \tag{2.2-48}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} Q_{vv} &= \int_0^T F_{vb} q_{ba} F_{vb}^T \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{3} T^3 q_a I \end{aligned} \tag{2.2-49}$$

$$\begin{aligned} Q_{vb} &= \int_0^T F_{vb} q_{ba} \Phi_{ba} \tau d\tau \\ &\approx T^2 \{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{T}{T_{ba}} + \frac{1}{6}(\frac{T}{T_{ba}})^2\} q_a C_b^n \end{aligned} \tag{2.2-50}$$

$$\begin{aligned} Q_{ee} &= \int_0^T F_{eb} q_{bg} F_{eb}^T \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{3} T^3 q_g I \end{aligned} \tag{2.2-51}$$

$$\begin{aligned} Q_{eb} &= \int_0^T F_{eb} q_{bg} \Phi_{bg} \tau d\tau \\ &\approx T^2 \{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{T}{T_{bg}} + \frac{1}{6}(\frac{T}{T_{bg}})^2\} q_g C_b^n \end{aligned} \tag{2.2-52}$$

$$\begin{aligned} Q_{ba} &= \int_0^T \Phi_{ba} q_{ba} \Phi_{ba}^T d\tau \\ &\approx T\{1 - \frac{T}{T_{ba}} + \frac{2}{3}(\frac{T}{T_{ba}})^2\} q_a I \end{aligned} \tag{2.2-53}$$

$$\begin{aligned} Q_{bg} &= \int_0^T \Phi_{bg} q_{bg} \Phi_{bg}^T d\tau \\ &\approx T\{1 - \frac{T}{T_{bg}} + \frac{2}{3}(\frac{T}{T_{bg}})^2\} q_g I \end{aligned} \tag{2.2-54}$$

$$\begin{aligned} Q_{bc} &= \int_0^T \Phi_{bc} q_{bc} \Phi_{bc}^T d\tau \\ &= \begin{pmatrix} q_b T + \frac{1}{3} q_{\dot{b}} T^3 & \frac{1}{2} q_{\dot{b}} T^2 \\ \frac{1}{2} q_{\dot{b}} T^2 & q_{\dot{b}} T \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2-55}$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_0^T \Phi_n q_n \Phi_n^T d\tau \\ &\approx T\{1 - \frac{T}{T_n} + \frac{2}{3}(\frac{T}{T_n})^2\} q_{amb} I \end{aligned} \tag{2.2-56}$$

である．

(2) 時間更新アルゴリズム [8)]

共分散行列の時間更新は，遷移行列とプロセスノイズ共分散行列を使って以下のように表される．

$$P_{k+1}(-) = \Phi(T) P_k \Phi(T)^T + Q(T) \tag{2.2-57}$$

本アルゴリズムでは，UD 分解によるフィルタアルゴリズムを採用するので，共分散行列として，U 行列，D 行列に分解された行列を保持している*．したがって，(2.2-57)式を適応する場合は，

$$P_k = U_k D_k U_k^T \tag{2.2-58}$$

により，P 行列にあらかじめ直しておく．

*メモリ削減のため，各行列の特性を利用して以下の要素だけを保持する．

$$U_k = \begin{pmatrix} \cdot & u_0 & u_1 & \cdots & u_{(N-1)(N-2)/2} \\ & \cdot & u_2 & & \vdots \\ & & \cdot & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{N(N-1)/2-1} \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

（注：対角成分は 1，下三角は 0） (2.2-59)

$D_k = (d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{N-1})$ （注：対角成分以外は 0）
(2.2-60)

$$P_k = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_3 & \cdots & p_{N(N-1)/2} \\ & p_2 & p_4 & & \vdots \\ & & p_5 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & p_{N(N+1)/2-1} \end{pmatrix}$$

（注：下三角は対称） (2.2-61)

$$Q(T) = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_3 & \cdots & q_{N(N-1)/2} \\ & q_2 & q_4 & & \vdots \\ & & q_5 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & q_{N(N+1)/2-1} \end{pmatrix}$$

（注：下三角は対称） (2.2-62)

ここで，N は各行列の行数（列数）である．

(2.2-57)式と(2.2-58)式を使って時間更新をした後，共分散行列をもとの U 行列，D 行列に戻すには，以下の UD 分解を用いる．

$$d_j = p_{jj} - \sum_{i=j+1}^{N} d_i u_{ji} \quad (j = N, \ldots, 1) \tag{2.2-63}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{d_j}(p_{ij} - \sum_{k=j+1}^{N} d_k u_{ik} u_{jk}) \quad (i = j\text{-}1, \ldots, 1) \tag{2.2-64}$$

状態量の時間更新は，遷移行列を用いて以下のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}(-) = \Phi(T)\hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{2.2-65}$$

ただし，本アルゴリズムでは線形化のため，基準軌道に対する誤差を状態量に取っており，その誤差推定量は観測更新時に基準軌道の更正に用いられる．したがって基準軌道更正後は,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{0} \tag{2.2-66}$$

となり，(2.2-65)式に基づく時間更新は必要ない．

状態量の時間更新は必要ないが，基準軌道の時間更新は必要である．INS の位置，速度，姿勢角に関してはストラップダウン INS 計算において時間更新されるので，必要な時間更新は加速度バイアス，ジャイロバイアス，GPS 時計バイアス，搬送波位相アンビギュイティに関するものである．それぞれについて，以下の式で時間更新する．

$$\boldsymbol{b}_{acc}(t_{k+1}) = \exp(-\frac{T}{T_{ba}})\boldsymbol{b}_{acc}(t_k) \tag{2.2-67}$$

$$\boldsymbol{b}_{gyro}(t_{k+1}) = \exp(-\frac{T}{T_{bg}})\boldsymbol{b}_{gyro}(t_k) \tag{2.2-68}$$

$$\boldsymbol{b}_{clk}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{b}_{clk}(t_k) \tag{2.2-69}$$

$$\boldsymbol{n}(t_{k+1}) = \boldsymbol{n}(t_k) \tag{2.2-70}$$

ここで, $\boldsymbol{b}_{acc}$ は加速度バイアス, $\boldsymbol{b}_{gyro}$ はジャイロバイアス, $\boldsymbol{b}_{clk}$ は GPS 時計バイアス，$\boldsymbol{n}$ は搬送波位相アンビギュイティである．なお，搬送波位相アンビギュイティに関しては，もともと整定数という性質があるため(2.2-41)式の遷移行列に関わらず時間で変化しないとした．

２．２－２　一重差観測残差の計算

カルマンフィルタにおいて観測更新を行うとき，(2.2-12)式で定義される観測方程式を定式化しなければならない．搬送波位相 DGPS/INS 複合航法では，観測量としてシュードレンジと搬送波位相を用いる．ここでは具体的に，それぞれの観測量についての観測方程式を求める．

(1) シュードレンジ

シュードレンジ ρ は，GPS 受信機において GPS 衛星から受信機までの電波の伝播時間を測定し，これに光速を掛けたもである．ある GPS 衛星からそれに搭載されている時計で測って時刻 t_2 に発射された信号が，受信機の時計で測って時刻 t_3 に受信されたとすれば，c を光速として，

$$\rho(t_3) = c(t_3 - t_2) + \delta\rho \tag{2.2-71}$$

と書ける．ここで $\delta\rho$ は，受信機で伝播時間を測定するときのエラー（観測ノイズ）である．これを共通の時系である GPS タイム [9] で表すと, (2.2-71)式は送信アンテナの位相中心を信号が出た瞬間の GPS タイム T_2 と，受信アンテナの位相中心に信号が到達した瞬間の GPS タイム T_3 を用いて次のように書ける．

$$\rho(t_3) = c(T_3 - T_2 + dt_3 - dt_2) + \delta\rho \tag{2.2-72}$$

ここで,

dt_2 = 衛星搭載時計のＧＰＳタイムに対する誤差（= t_2 − T_2）

dt_3 = 受信機時計のＧＰＳタイムに対する誤差（= t_3

－T_3）

とする．誤差 dt_2，dt_3 にはそれぞれの時計誤差だけではなく，衛星と受信機におけるハードウェア遅延（信号の伝播時間）も含むものとする．

さて，(2.2-72)式右辺の $c(T_3 - T_2)$ は，電波が送信アンテナの位相中心から受信アンテナの位相中心まで慣性空間を伝播した経路長に等しくなる．そこで送受信アンテナの位相中心の慣性座標系に関する位置ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{R}_A(T_2)$，$\boldsymbol{R}(T_3)$ とすれば，(2.2-72)式は，

$$\rho(t_3) = |\boldsymbol{R}(T_3) - \boldsymbol{R}_A(T_2)| + d_{iono} + d_{trop} + c(dt_3 - dt_2) + \delta\rho \tag{2.2-73}$$

とユーザの位置情報 $\boldsymbol{R}(T_3)$ を含んだ形で書くことができる．ここで d_{iono} および d_{trop} は，それぞれ電波が伝播中に電離層および対流圏によって受ける遅延量である．さらにこれを地球とともに回転する地球固定座標系（GPS では WGS84 を使用する）で表すと，送受信アンテナの位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_A(T_2)$，$\boldsymbol{r}(T_3)$ として，

$$\rho(t_3) = |\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_A(T_2)| + d_{sag} + d_{iono} + d_{trop} + c(dt_3 - dt_2) + \delta\rho \tag{2.2-74}$$

となる．ここで d_{sag} は，電波が衛星から受信機まで伝播する間に地球が回転する分だけ伝播距離が変化する特殊相対論的効果で，Sagnac 効果と呼ばれている．

GPS 単独航法では，(2.2-74)式における未知数を，受信アンテナの位置ベクトル $\boldsymbol{r}(T_3)$ と受信機のクロック誤差 dt_3 の合計４つと考え，それ以外の変数は以下で述べるモデル式であらかじめ計算しておく．そして４つの GPS 衛星とのシュードレンジデータから，連立方程式を最小二乗法などにより解くことで未知数である受信アンテナの位置ベクトル $\boldsymbol{r}(T_3)$ と受信機のクロック誤差 dt_3 を求める．

(2.2-74)式において送信アンテナの位置ベクトル $\boldsymbol{r}_A(T_2)$ と衛星クロック誤差 dt_2 は，GPS 信号から復調した放送暦を使って計算する．放送暦には表 2.2-1 に示すパラメータが変調されている．まず，クロック補正パラメータを使って衛星クロック誤差を計算する．

$$\begin{aligned} dt_2 &= a_{fo} + a_{f1}(T_2 - t_{oc}) + a_{f2}(T_2 - t_{oc})^2 + \Delta t_R \\ &\cong a_{fo} + a_{f1}(t_2 - t_{oc}) + a_{f2}(t_2 - t_{oc})^2 + \Delta t_R \end{aligned} \tag{2.2-75}$$

ここで，T_2 は GPS タイムにおける電波の送信時刻であるが，dt_2 が計算される前には T_2 を求めることができないので，dt_2 が微小であること（t_2　　T_2）を考慮して以下の式から計算される t_2 を代わりに用いている．

$$t_2 = t_3 - \rho(t_3)/c \tag{2.2-76}$$

また，Δt_R は相対論効果による衛星搭載クロックの揺らぎを表し，以下の式で計算する．

$$\begin{aligned} \Delta t_R &= -\frac{2\sqrt{\mu}}{c^2} e\sqrt{a}\sin E_k \\ &= -4.442807633\times10^{-10} e\sqrt{a}\sin E_k \end{aligned} \tag{2.2-77}$$

その結果，

$$T_2 = t_2 - dt_2 \tag{2.2-78}$$

と GPS タイムにおける電波の送信時刻が計算できる．

送信時刻 T_2 における送信アンテナの位置ベクトルは，表 2.2-1 の軌道暦パラメータと以下のアルゴリズムを用いて計算する．

$$a = (\sqrt{a})^2 \tag{2.2-79}$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{2.2-80}$$

$$t_k = T_2 - t_{oe} \tag{2.2-81}$$

$$n = n_0 + \Delta n \tag{2.2-82}$$

$$M_{\mathrm{T}} = M_0 + nt_k \tag{2.2-83}$$

$$M_T = E_k - e\sin E_k \tag{2.2-84}$$

$$\cos f_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k} \tag{2.2-85}$$

$$\sin f_k = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1 - e\cos E_k} \tag{2.2-86}$$

$$\phi_k = f_k + \omega \tag{2.2-87}$$

$$\delta u_k = C_{us}\sin 2\phi_k + C_{uc}\cos 2\phi_k \tag{2.2-88}$$

表 2.2-1　放送暦に含まれる主なパラメータ

分類	パラメータ	内容	単位
クロック補正	a_{f0}	位相誤差補正係数	sec
	a_{f1}	周波数誤差補正係数	sec/sec
	a_{f2}	周波数レート誤差補正係数	sec/sec^2
	t_{oc}	クロック補正基準時刻	sec
軌道暦	Δn	mean motion 補正	semicircles
	M_0	基準時の mean anomaly	semicircles
	e	eccentricity	semicircles
	$a^{1/2}$	semimajor axis の平方根	m$^{1/2}$
	Ω_0	基準時の昇交点経度	semicircles
	i_0	基準時の軌道傾斜角	semicircles
	ω	近地点引数	semicircles
	$\dot{\Omega}$	right ascension の変化率	semicircles/sec
	$\dot{i}$	軌道傾斜角の変化率	semicircles/sec
	C_{uc}, C_{us}	緯度引数の補正量	rad
	C_{rc}, C_{rs}	軌道半径の補正量	m
	C_{ic}, C_{is}	軌道傾斜角の補正量	rad
	T_{oe}	軌道暦基準時刻	sec
電離層補正	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	電離層補正の多項式係数	sec, sec/semicircles, sec/semicircles^2, sec/semicircles^3
	$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$	電離層補正の多項式係数	sec, sec/semicircles, sec/semicircles^2, sec/semicircles^3

$$\delta r_k = C_{rs}\sin 2\phi_k + C_{rc}\cos 2\phi_k \tag{2.2-89}$$

$$\delta i_k = C_{is}\sin 2\phi_k + C_{ic}\cos 2\phi_k \tag{2.2-90}$$

$$u_k = \phi_k + \delta u_k \tag{2.2-91}$$

$$r_k = a(1 - e\cos E_k) + \delta r_k \tag{2.2-92}$$

$$i_k = i_0 + \delta i_k + \dot{i} t_k \tag{2.2-93}$$

$$x'_k = r_k \cos u_k \tag{2.2-94}$$

$$y'_k = r_k \sin u_k \tag{2.2-95}$$

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) t_k - \omega_e t_{oe} \tag{2.2-96}$$

$$x_s = x'_k \cos\Omega_k - y'_k \cos i_k \sin\Omega_k \tag{2.2-97}$$

$$y_s = x'_k \sin\Omega_k + y'_k \cos i_k \cos\Omega_k \tag{2.2-98}$$

$$z_s = y'_k \sin i_k \tag{2.2-99}$$

衛星クロック誤差と送信アンテナの位置ベクトルの計算において，米国国防総省は安全保障上，民間利用者の精度を故意に劣化させるため，クロック補正と軌道暦のパラメータに誤差を含めることとし，これを SA（Selective Availability，選択利用性）と呼んでいる†．この結果，放送暦を使って計算した送信アンテナ位置をあらためて $\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)$ ，衛星クロック誤差を Δt_2 と表記すると(2.2-74)式は，

† 2000 年 5 月に，SA は GPS 信号から除去された．これは DGPS 航法技術の発展により，その存在意義が薄れたためである．その結果，GPS 航法の精度は，最良で 3m(1σ)程度まで向上している．
　本報告では，SA も含めた定式化を採用しているが，SA 項が削除されてもアルゴリズムは影響を受けない．

$$\rho(t_3) = |\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_{sv}(T_2)| + d_{SA} + d_{sag} + d_{iono} + d_{trop} + c(dt_3 - \Delta t_2) + \delta\rho \tag{2.2-100}$$

と書ける．ここで d_{SA} は，$\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)$ と Δt_2 に含まれる SA による誤差をまとめてレンジ誤差の形で表したもので，その大きさは約 30 m（1 σ）といわれている．

Sagnac 効果 d_{sag} は，相対論に基づいて正確に計算することができる．(2.2-101)式は Sagnac 効果を計算するための近似式であるが，0(c^{-2})以下を無視する近似であり，精度的にはここで考える航法に十分なものである [10)].

$$d_{sag} = \frac{\omega_e}{c}\{(x_{sv} - x)y_{sv} - (y_{sv} - y)x_{sv}\} \tag{2.2-101}$$

ここで，$\boldsymbol{r}_{sv} = (x_{sv}, y_{sv}, z_{sv})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ である．

電離層遅延 d_{iono} と対流圏遅延 d_{trop} は，地球大気の状態によって時々刻々変化するので精密にモデル化するのが難しい．GPS 単独航法では電離層遅延を，放送暦に含まれる８つのパラメータを使うベント（Bent）の８パラメータモデルによって計算するのが一般的である．以下にそのアルゴリズムを示す．

$$d_{iono} = c\tau_{iono} \tag{2.2-102}$$

$$\begin{aligned} \tau_{iono} &= F\left[5.0\times10^{-9} + AMP\left(1 - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{24}\right)\right] & |\chi| < 1.57 \\ &= F\left[5.0\times10^{-9}\right] & |\chi| > 1.57 \end{aligned} \tag{2.2-103}$$

ここで，

$$\chi = \frac{t - 50400}{PER}2\pi \quad (rad) \tag{2.2-104}$$

$$F = 1.0 + 16.0(0.53 - E)^3 \tag{2.2-105}$$

$$\begin{aligned} AMP &= \sum_{n=0}^{3}\alpha_n\varphi_m^n & (AMP \geq 0) \\ &= 0 & (AMP < 0) \end{aligned} \tag{2.2-106}$$

$$\begin{aligned} PER &= \sum_{n=0}^{3}\beta_n\varphi_m^n & (PER \geq 72{,}000) \\ &= 72{,}000 & (PER < 72{,}000) \end{aligned} \tag{2.2-107}$$

α_n，β_n は放送暦に含まれる電離層遅延パラメータである．また，

$$\phi_m = \phi_i + 0.064\cos(\lambda_i - 1.617) \quad \text{(semicirles)} \tag{2.2-108}$$

$$\lambda_i = \lambda_u + \frac{\varphi\sin A}{\cos\phi_i} \quad \text{(semicirles)} \tag{2.2-109}$$

$$\begin{aligned} \phi_i &= \phi_u + \varphi\cos A & (|\phi_i| < 0.416) & \\ &= 0.416 & (\phi_i > 0.416) & \quad \text{(semicirles)} \\ &= -0.416 & (\phi_i < -0.416) & \end{aligned} \tag{2.2-110}$$

$$\varphi = \frac{0.0137}{E + 0.11} - 0.022 \quad \text{(semicirles)} \tag{2.2-111}$$

であり，

E …受信機から見た衛星の迎角

A …受信機から見た衛星の方位角，真北から時計方向に正

ϕ_u …受信機の測地学的緯度

λ_u …受信機の測地学的経度

である．また t は，ローカル太陽時であり，

$$t = 4.32\times10^4\lambda_i + t_3 \quad \text{(sec)}$$

（t >86400 なら 86400 を引く，t <0 ならを 86400 加える）

(2.2-112)

このモデルによる電離層遅延の推定精度は 50 %程度といわれている．

対流圏遅延は，マイクロ波が大気中を伝播するとき，空気で屈折し伝播経路長が変化することにより生じる．屈折率は，気温，気圧，水蒸気分圧をパラメータとする関数でモデル化されており，気温と気圧のみに依存するドライ項と水蒸気分圧に依存するウェット項からなる．Saastamoinen [11)]は，マイクロ波の伝搬遅延を天頂方向（仰角 90 °）についてそれぞれ以下のように表した．

$$d_{dry} = \frac{0.2277P}{1 - 0.0026\cos(2L) - 0.00028h} \text{(cm)} \tag{2.2-113}$$

$$d_{wet} = \frac{0.2277e(0.05 + 1225/T)}{1 - 0.0026\cos(2L) - 0.00028h} \text{(cm)} \tag{2.2-114}$$

ここで，L は緯度，h は高度（km），P と e はそれぞれ

mbar 単位で表した気圧と水蒸気分圧，T は温度でケルビン単位である．この値を，任意の仰角の GPS 衛星に適用するためのマッピング関数として以下の式が提唱されている．

$$M = \frac{1}{\sin E + a/(\tan E + b/(\sin E + c))} \qquad (2.2\text{-}115)$$

ここで，E はユーザから見たＧＰＳ衛星の仰角である．パラメータ a, b, c としては，Davis らが 1985 年に CfA-2.2 のマッピング関数と称して以下の式を与えている [12]．

$$\begin{aligned} a &= 0.001185(1 + 0.6071\times10^{-4}(P-1000) - 0.1471\times10^{-3}e \\ &\quad + 0.3072\times10^{-2}(T-293.15)) \\ b &= 0.001144(1 + 0.1164\times10^{-4}(P-1000) - 0.2795\times10^{-3}e \\ &\quad + 0.3109\times10^{-2}(T-293.15)) \\ c &= 0.0090 \end{aligned} \qquad (2.2\text{-}116)$$

以上をまとめて，任意の仰角のＧＰＳ衛星に対する対流圏遅延は，以下の式で表される．

$$d_{trop} = M(d_{dry} + d_{wet}) \qquad (2.2\text{-}117)$$

Saastamoinen のモデルとマッピング関数には，上記のほかにもいろいろと修正モデルが提案されている．
なお，上式で使用する気圧，温度，水蒸気分圧はユーザの高度により変化する．たとえば以下の式で高度による変化をモデル化することができる．

$$P = P_0 \cdot \exp(-(h-h_0)/H_P) \qquad (2.2\text{-}118)$$

$$T = T_0 - \alpha(h-h_0) \qquad (2.2\text{-}119)$$

$$e = e_0 \cdot \exp(-(h-h_0)/H_e) \qquad (2.2\text{-}120)$$

ここで，h_0 は地表高度(km)，P_0 は地表での気圧(mbar)，H_P はスケール高度でその値は 7.0 km，T_0 は地表での温度(K)，α は温度勾配でその値は 6.0 K/km，e_0 は地表での水蒸気分圧(mbar)，H_e はスケール高度でその値は 2.7 km である．

(2.2-100)式において，SA 誤差と観測ノイズはその他の変数のようにモデル式で補正することができない．また，電離層遅延，対流圏遅延もモデル補正後の誤差が残る．このため，たとえ大きな値を持つ SA 誤差が 2000 年 5 月より，GPS 信号から削除されても，このままでは数 m の航法誤差となり，本研究が目標とするサブメートルの精度には到達しない．そこで，本アルゴリズムでは DGPS 地上局におけるシュードレンジと引き算することで一重差の観測量を作り，GPS 信号に含まれる誤差を除去することができるディファレンシャル航法のための観測方程式を用意する．DGPS 地上局におけるシュードレンジは，

$$\rho_b(t_{3\_b}) = |\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| + d_{SA} + d_{sag\_b} + d_{iono} + d_{trop\_b} + c(dt_{3\_b} - \Delta t_2) + \delta\rho_b \qquad (2.2\text{-}121)$$

と表すことができる．ここで t_{3_b} は DGPS 地上局におけるシュードレンジの取得時刻，$\boldsymbol{r}_b$ は DGPS 地上局の位置で既知，d_{sag_b} は DGPS 地上局における sagnac 効果，d_{trop_b} は DGPS 地上局における対流圏遅延，dt_{3_b} は DGPS 地上局の時計バイアス，$\delta\rho_b$ は DGPS 地上局におけるシュードレンジの観測ノイズである．一重差をとるシュードレンジは同時刻に取得されたものであるとし，かつユーザと DGPS 地上局の時計バイアス dt_3 と t_{3_b} が十分小さければ，

$$T_{2\_b} \approx T_2 \qquad (2.2\text{-}122)$$

であるので，時間に依存する SA 誤差と衛星搭載時計バイアスは，ユーザと DGPS 地上局の間で等しいとしてよい．また，ユーザが DGPS 地上局から 100 km 以内であるとすると，電離層遅延もここで考える航法精度からみて，両者が等しいとしてよい．以上より，シュードレンジの一重差は，

$$\begin{aligned} \Delta\rho(t_3) &= \rho(t_3) - \rho_b(t_{3\_b}) \\ &= \left\{ |\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_{sv}(T_2)| + d_{SA} + d_{sag} + d_{iono} + d_{trop} + c(dt_3 - \Delta t_2) + \delta\rho \right\} \\ &\quad - \left\{ |\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| + d_{SA} + d_{sag\_b} + d_{iono} + d_{trop\_b} + c(dt_{3\_b} - \Delta t_2) + \delta\rho_b \right\} \\ &= |\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_{sv}(T_2)| - |\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| \\ &\quad + (d_{sag} - d_{sag\_b}) + (d_{trop} - d_{trop\_b}) + c(dt_3 - dt_{3\_b}) + (\delta\rho - \delta\rho_b) \\ &= |\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_{sv}(T_2)| - |\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| \\ &\quad + (d_{sag} - d_{sag\_b}) + (d_{trop} - d_{trop\_b}) + c\,dt_{3\_\Delta} + \delta\rho_\Delta \end{aligned} \qquad (2.2\text{-}123)$$

となる．ここで dt_{3_Δ} はユーザと DGPS 地上局の時計バイアスの差，$\delta\rho_\Delta$ は一重差の観測ノイズである．一重差を用いるディファレンシャル航法では SA 誤差と電離層遅延が除去される．また，推定される変数はユーザの位置 $\boldsymbol{r}$ と，ユーザと DGPS 地上局の時計バイアスの差 dt_{3_Δ} である．

一重差シュードレンジの観測方程式(2.2-123)式は，右辺

が状態量に関して非線形である．したがって(2.2-12)式の線形な形にするためには, INS の現在出力を基準軌道とする線形化を行う拡張カルマンフィルタの手法を採用する．INS 位置をあらためて,

$$\boldsymbol{r}^n = (L, l, h)^T \tag{2.2-124}$$

とおく．地球固定座標系への変換式は,

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos L\cos l \\ (N+h)\cos L\sin l \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin L \end{pmatrix} \tag{2.2-125}$$

と表される．ここで,

$$N = \frac{r_e}{\sqrt{1-e^2\sin^2 L}} \tag{2.2-126}$$

である．

以上より, (2.2-123)式を誤差状態量に関して偏分をとると観測行列は,

$$\boldsymbol{h}^T = \left(\left[\frac{\{\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)\}^T}{|\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}^n}\right], \boldsymbol{0}^T, \boldsymbol{0}^T, \boldsymbol{0}^T, \boldsymbol{0}^T, \boldsymbol{0}^T, 1, 0, \boldsymbol{0}^T\right) \tag{2.2-127}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}^n} = \begin{pmatrix} -(N+h)\sin L\cos l & -(N+h)\cos L\sin l & \cos L\cos l \\ -(N+h)\sin L\sin l & (N+h)\cos L\cos l & \cos L\sin l \\ \{N(1-e^2)+h\}\cos L & 0 & \sin L \end{pmatrix} \tag{2.2-128}$$

となる．なお，時計バイアスは,

$$b = cdt_{3\_\Delta} \tag{2.2-129}$$

と，ユーザと DGPS 地上局の時計バイアスの差（レンジ換算）としている．

(2) 搬送波位相

受信機で測定される搬送波位相とは，GPS 衛星から電波の発射された時刻 t_2 における GPS 信号の搬送波の位相 $\theta_2(t_2)$ と，それを受信機で受信した時刻 t_3 における受信機ローカルクロックの位相 $\theta_3(t_3)$ の差を取ったものである．すなわち，観測量である搬送波位相 $\phi(t_3)$ は,

$$\phi(t_3) = \theta_3(t_3) - \theta_2(t_2) + n + \delta\phi \tag{2.2-130}$$

と書ける．(2.2-130)式において n は，受信機で最初に搬送波を捕捉したとき，その位相の中に衛星からユーザまでの距離に対応した波数がどれだけあるか分からないために生じる，整数倍波長分のアンビギュイティ（不確定値）である．したがって n は整数で，搬送波を捕捉し続けている間は一定である．また $\delta\phi$ は受信機で搬送波位相を測定するときに生じるエラー（観測ノイズ）である．

送信側と受信側では，搬送波とローカルクロックの位相をそれぞれ(2.2-131)式と(2.2-132)式のように定義して生成する．

$$\theta_2(t_2) = f_L t_2 + \theta_{20} \tag{2.2-131}$$

$$\theta_3(t_3) = f_L t_3 + \theta_{30} \tag{2.2-132}$$

ここで，f_L は送信周波数（L1 信号の場合は，1.57542×10^9 Hz）である．GPS では，位相の初期値 θ_{20} と θ_{30} を 0 になるように定義しているので，これらを(2.2-130)式に代入して，さらに(2.2-100)式と比較すると,

$$\begin{aligned}\phi(t_3) &= f_L(t_3 - t_2) + n + \delta\phi \\ &= \frac{f_L}{c}\{|\boldsymbol{r}(T_3) - \boldsymbol{r}_{sv}(T_2)| + d_{SA} + d_{sag} - d_{iono} + d_{trop} + c(dt_3 - \Delta t_2)\} + n + \delta\phi\end{aligned} \tag{2.2-133}$$

となり，搬送波位相はアンビギュイティを含むものの，やはりユーザと GPS 衛星の距離を表すデータであることが分かる [13)]．したがって，もしアンビギュイティが何らかの方法で決定できれば，シュードレンジと同じように搬送波位相で位置推定ができることになる．なお搬送波位相で電離層遅延 d_{iono} が負になっているのは，電離層の中で群速度と位相速度の変化が正負反対になっているからで，位相速度は見かけ上，光速より大きくなる．

搬送波位相もシュードレンジと同様に一重差の観測量を作り，SA 誤差等を除去するディファレンシャル航法のための観測方程式を用意する．DGPS 地上局における搬送波位相は,

$$\begin{aligned}\phi_b(t_{3\_b}) = \frac{f_L}{c}&\left\{\left|\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})\right| + d_{SA} + d_{sag\_b} - d_{iono} + d_{trop\_b} + c(dt_{3\_b} - \Delta t_2)\right\} \\ &+ n_b + \delta\phi_b\end{aligned} \tag{2.2-134}$$

である．ここで n_b と $\delta\phi_b$ は DGPS 地上局における搬送波位相のアンビギュイティと観測ノイズである．以上より，波長 λ を掛けてレンジの単位に直した搬送波位相の一重差は,

$$
\begin{aligned}
\lambda\Delta\phi(t_3) &= \lambda\{\phi(t_3)-\phi_b(t_{3\_b})\} \\
&= \{|\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|+d_{SA}+d_{sag}-d_{iono}+d_{trop}+c(dt_3-\Delta t_2)+\lambda n+\delta\phi_\lambda\} \\
&\quad -\{|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})|+d_{SA}+d_{sag\_b}-d_{iono}+d_{trop\_b}+c(dt_{3\_b}-\Delta t_2)+\lambda n_b+\delta\phi_{\lambda\_b}\} \\
&= |\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|-|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| \\
&\quad +(d_{sag}-d_{sag\_b})+(d_{trop}-d_{trop\_b})+c(dt_3-dt_{3\_b})+\lambda(n-n_b)+(\delta\phi_\lambda-\delta\phi_{\lambda\_b}) \\
&= |\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|-|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})| \\
&\quad +(d_{sag}-d_{sag\_b})+(d_{trop}-d_{trop\_b})+cdt_{3\_\Delta}+\lambda n_\Delta+\delta\phi_{\lambda\_\Delta}
\end{aligned}
\tag{2.2-135}
$$

となる．ここで n_Δはユーザと DGPS 地上局のアンビギュイティの差，$\delta\phi_{\lambda_\Delta}$は一重差の観測ノイズである．一重差を用いるディファレンシャル航法では，推定されるアンビギュイティはユーザと DGPS 地上局のアンビギュイティの差 n_Δ（整数）である．

一重差搬送波位相の観測方程式も非線形なので，拡張カルマンフィルタを用いる．そのとき，観測行列は，

$$
\boldsymbol{h}^T=\left(\left[\frac{\{\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)\}^T}{|\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}^n}\right],\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{0}^T,\boldsymbol{0}^T,1,0,\boldsymbol{h}_{n\_i}{}^T\right)
\tag{2.2-136}
$$

$$
\boldsymbol{h}_{n\_i}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)^T
\tag{2.2-137}
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{h}_{n_i}$はチャンネル番号（第 i チャンネル）に対応する第 i 行のみに 1 が入るベクトルである．なお，アンビギュイティの状態変数として波長を掛けた λn_Δ を考える．

(3) 観測残差の計算

観測残差は，観測データと現在位置から予測されるレンジとの差である．カルマンフィルタにおける状態量観測更新(2.2-16)式では，カルマンゲイン $\boldsymbol{k}$ に掛かる項となる．前節で求めた観測方程式から，シュードレンジの一重差，搬送波位相の一重差，それぞれの観測残差は以下で計算される．なお，サニアック効果は一重差をとる段階でほぼキャンセルされるので省略した．

$$
\begin{aligned}
\upsilon_{\Delta\rho}(t_3) &= \{\rho(t_3)-\rho_b(t_{3\_b})\} \\
&\quad -\{|\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|-|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})|+(d_{trop}-d_{trop\_b})+cdt_{3\_\Delta}\}
\end{aligned}
\tag{2.2-138}
$$

$$
\begin{aligned}
\upsilon_{\lambda\Delta\phi}(t_3) &= \lambda\{\phi(t_3)-\phi_b(t_{3\_b})\} \\
&\quad -\left\{|\boldsymbol{r}(T_3)-\boldsymbol{r}_{sv}(T_2)|-|\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_{sv}(T_{2\_b})|+(d_{trop}-d_{trop\_b})+cdt_{3\_\Delta}+\lambda n_\Delta\right\}
\end{aligned}
\tag{2.2-139}
$$

2．2－3 カルマンフィルタ観測更新

ここでは具体的に，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法における共分散行列と状態量の観測更新アルゴリズムについて述べる．本システムでは，UD 分解によるフィルタアルゴリズムを採用しているので，(2.2-12)～(2.2-16)式で示されたアルゴリズムは以下のように書き換えられる [14]．

時間更新後の U 行列を $U_{k+1}(-)$，D 行列を $D_{k+1}(-)$とすると，

$$
P_{k+1}(-)=U_{k+1}(-)D_{k+1}(-)U_{K+1}(-)^T
\tag{2.2-140}
$$

である．したがって，(2.2-12)式と(2.2-15)式は，

$$
\begin{aligned}
&\hat{U}_{k+1}\hat{D}_{k+1}\hat{D}_{k+1}{}^T \\
&=U_{k+1}(-)\left[D_{k+1}(-)-\frac{1}{\alpha}\left(D_{k+1}(-)U_{k+1}(-)^T\boldsymbol{h}_{k+1}\right)\left(D_{k+1}(-)U_{k+1}(-)^T\boldsymbol{h}_{k+1}\right)^T\right]U_{k+1}(-)^T
\end{aligned}
\tag{2.2-141}
$$

となる．今，ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{f}$ を導入して，

$$
\boldsymbol{v}=D_{k+1}(-)\boldsymbol{f}
\tag{2.2-142}
$$

$$
\boldsymbol{f}=U_{k+1}(-)^T\boldsymbol{h}_{k+1}
\tag{2.2-143}
$$

とする．このとき，(2.2-141)式の [ ] 内の UD 分解を考える．すなわち，

$$
\overline{UD}\,\overline{U}^T=D_{k+1}(-)-\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T
\tag{2.2-144}
$$

を使うと，求める観測更新後の UD 行列は以下のようになる．

$$
\hat{U}_{k+1}=U_{k+1}(-)\overline{U}
\tag{2.2-145}
$$

$$
\hat{D}_{k+1}=\overline{D}
\tag{2.2-146}
$$

(2.2-145)式と(2.2-146)式は，以下のアルゴリズムで計算できる．

$$\alpha_1 = r + v_1 f_1 \tag{2.2-147}$$

$$\hat{d}_1 = \frac{d_1 r}{\alpha_1} \tag{2.2-148}$$

$$b_1 = v_1 \tag{2.2-149}$$

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} + f_j v_j \qquad (j=2, \cdots, n) \tag{2.2-150}$$

$$\hat{d}_j = \frac{d_j \alpha_{j-1}}{\alpha_j} \tag{2.2-151}$$

$$b_j = v_j \tag{2.2-152}$$

$$p_j = -\frac{f_j}{\alpha_{j-1}} \tag{2.2-153}$$

$$\hat{U}_{ij} = U_{ij} + b_i p_j \qquad (i=1, \cdots, j\text{-}1) \tag{2.2-154}$$

$$b_i = b_i + U_{ij} v_j \tag{2.2-155}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{b}}{\alpha_n} \tag{2.2-156}$$

ここで，d_i と U_{ij} はそれぞれ，$D_{k+1}(-)$行列と $U_{k+1}(-)$行列の要素である．また，$\boldsymbol{k}$ はカルマンゲインとなる．(2.2-156)式で求められるカルマンゲインを(2.2-16)式に代入することで，状態量の観測更新ができる．なお，観測更新後の共分散行列は，

$$P_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \hat{D}_{k+1} \hat{U}_{k+1}{}^T \tag{2.2-157}$$

で計算される．

３．オンボード複合航法アルゴリズムの制御ロジック

第 2 章で導出した搬送波位相 DGPS/INS 複合航法アルゴリズムを，実時間で動作するオンボードシステムとして実現するには，アルゴリズムの制御ロジックを実時間処理に対応するよう設計しなければならない．とくに本システムの場合，IMU，機上 GPS 受信機，地上 GPS 受信機，の３つの外部航法センサが非同期で，しかも異なるレートでセンサデータを出力するため，データの同期をとる機能が制御ロジックに必要とされる．図 3-1 は，本システムで用いる制御ロジックのフローを示したものである．制御ロジックは，初期化処理と搬送波位相 DGPS/INS 複合航法処理の２つに分かれ，他に航法出力要求（定期的に航法結果を出力する場合は，内部タイマによる割り込みが適当である．不定期の場合，たとえば FMS(Flight Management System)からの参照要求の場合は，外部割り込みとなる）を処理する部分がある．データの同期をとる機能は，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法処理の部分に含

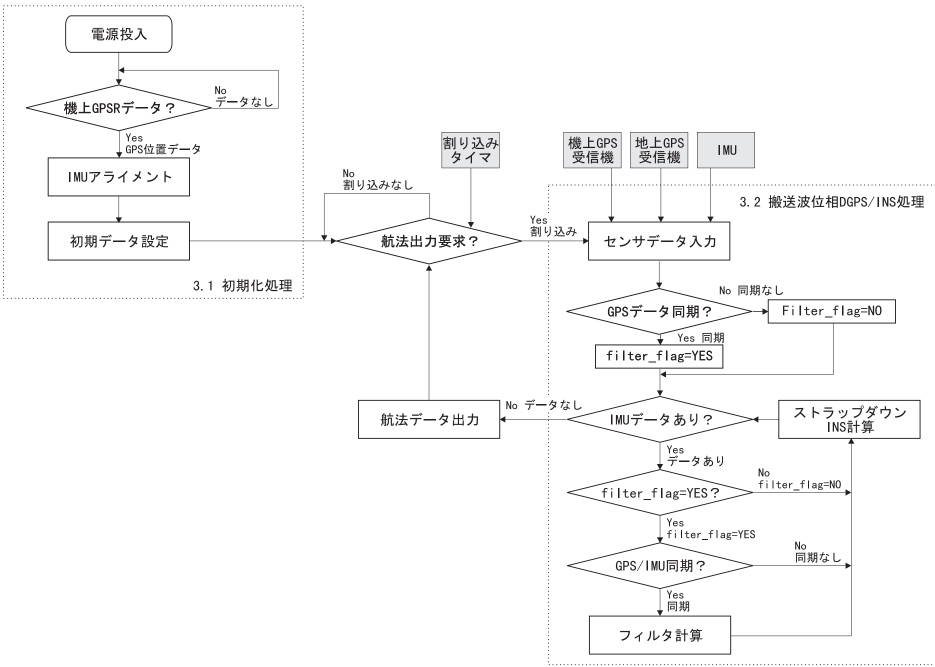

図 3-1　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法制御ロジック

表 3.1-1　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法において初期値設定が必要な項目

分類	パラメータ	内容	初期値
制御ロジック	*init_flag*	初期設定が完了したか	NO
	filter_flag	機上/地上 GPS データが同期したか	NO
		GPS/INS データが同期したか	
	sync_flag	クロック設定をするか	NO
	clk_flag	DGPS 航法をするか	YES
	dgps_flag	搬送波位相を観測量とするか	NO
	cdgps_flag		NO
INS，GPS 状態量	$\boldsymbol{r}^n=(L, l, h)^T$	緯度，経度，高度	GPS
	$\boldsymbol{v}^n=(v_N, v_E, v_D)^T$	NED 速度	GPS
	$\boldsymbol{q}^n=(q_1, q_2, q_3, q_4)^T$	クォータニオン	INS，式(3.1-1～6)
	$\boldsymbol{b}_{acc}=(a_{bx}, a_{by}, a_{bz})^T$	加速度バイアス	0
	$\boldsymbol{b}_{gyro}=(\omega_{bx}, \omega_{by}, \omega_{bz})^T$	角速度バイアス	0
	$\boldsymbol{b}_{clk}=(b, \dot{b})^T$	GPS 時計バイアス	GPS，式(3.1-7～8)
	$\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots, n_9)^T$	搬送波位相アンビギュイティ	GPS，式(3.1-9～10)
フィルタパラメータ	$q_a, q_g, q_b, q_{\dot{b}}, q_{amb}$	システムノイズの電力密度	式(3.1-11～15)
	U, D	UD 行列	式(3.1-16～26)
フィルタ状態量	$\delta\boldsymbol{r}^n=(\delta L, \delta l, \delta h)^T$	INS 位置誤差	0
	$\delta v^n=(\delta v_N, \delta v_E, \delta v_D)^T$	INS 速度誤差	0
	$\delta q^n=(\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4)^T$	INS 方向余弦行列誤差	0
	$\delta b_{acc}=(\delta a_{bx}, \delta a_{by}, \delta a_{bz})^T$	INS 加速度バイアス誤差	0
	$\delta b_{gyro}=(\delta\omega_{bx}, \delta\omega_{by}, \delta\omega_{bz})^T$	INS ジャイロバイアス誤差	0
	$\delta\boldsymbol{b}_{clk}=(\delta b, \delta\dot{b})^T$	GPS 時計バイアス誤差	0
	$\delta\boldsymbol{n}=(\lambda\delta n_1,\cdots, \lambda\delta n_9)^T$	搬送波位相アンビギュイティ誤差	0

まれる．

３．１　初期化処理

搬送波位相 DGPS/INS 複合航法計算を行うために必要な初期値を設定する処理である．初期値の必要な項目を表 3.1-1 にまとめる．表 3.1-1 で示された項目のうち，初期位置，初期姿勢角は，システムが動作する環境によって異なるので，外部から設定する必要がある．従来の INS 航法装置の場合は，CDU(Control Display Unit)から初期位置をパイロットが地図情報を使って入力するのが通常であるが，GPS/INS 複合航法システムでは，機上 GPS 受信機の航法データ（単独航法結果，位置精度は 100 m(2σ)程度だが初期値としては十分である）を使い，IMU アライメント処理に進むことが可能である．IMU アライメントが終了すると，初期姿勢角を得ることができる．

初期位置，初期速度は，GPS 受信機の単独航法結果を入力する．本システムでは，緯度，経度，高度，NED 速度が必要であるが，GPS 出力が必ずしもこの座標系で出力されているわけではない（受信機の仕様によって異なる）ので，出力座標に応じた適当な変換が必要である．

初期クォータニオンは，IMU アライメント後の INS 出力で設定する．このときの INS 出力は通常オイラー角(ϕ, θ, ψ)であるので，(2.1-52)式で方向余弦行列 C_b^n を作成した後，以下のアルゴリズムでクォータニオンに変換する．

$$tr = trace(C_b^n) \tag{3.1-1}$$

$$q_4 = \frac{\sqrt{1+tr}}{2} \tag{3.1-2}$$

$$\chi_i = \sqrt{\frac{2C_b^n(i,i)+1-tr}{4}} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1-3}$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \mathrm{sgn}(\chi_1, C_b^n(3,2) - C_b^n(2,3)) \\ q_2 &= \mathrm{sgn}(\chi_2, q_1(C_b^n(2,1) + C_b^n(1,2))) \\ q_3 &= \mathrm{sgn}(\chi_3, q_1(C_b^n(3,1) + C_b^n(1,3))) \end{aligned}\right\} \cdots (\chi_1 > \chi_2, \chi_3 \text{の場合}) \tag{3.1-4}$$

$$\left.\begin{aligned} q_2 &= \mathrm{sgn}(\chi_2, C_b^n(1,3) - C_b^n(3,1)) \\ q_1 &= \mathrm{sgn}(\chi_1, q_2(C_b^n(1,2) + C_b^n(2,1))) \\ q_3 &= \mathrm{sgn}(\chi_3, q_2(C_b^n(3,2) + C_b^n(2,3))) \end{aligned}\right\} \cdots (\chi_2 > \chi_1, \chi_3 \text{の場合}) \tag{3.1-5}$$

$$\left.\begin{aligned} q_3 &= \mathrm{sgn}(\chi_3, C_b^n(2,1) - C_b^n(1,2)) \\ q_1 &= \mathrm{sgn}(\chi_1, q_3(C_b^n(1,3) + C_b^n(3,1))) \\ q_2 &= \mathrm{sgn}(\chi_2, q_3(C_b^n(2,3) + C_b^n(3,2))) \end{aligned}\right\} \cdots (\chi_3 > \chi_1, \chi_2 \text{の場合}) \tag{3.1-6}$$

GPS 時計バイアスは，GPS/INS 航法の場合は GPS 受信機から出力される値を初期値として設定すればよい．しかし，DGPS/INS 航法に移ったとき，本システムでは一重差観測量を使用するので，(2.2-129) 式で示されるようにユーザと DGPS 地上局の時計バイアスの差を設定し直さなければならない. DGPS 地上局の時計バイアスはユーザ側で得ることができないので，自律的に時計バイアスの初期値を設定するアルゴリズムが必要である．ここでは，フィルタ観測更新において初回の一重差観測残差を使い，以下のように時計バイアスを設定し直す．まず，シュードレンジの一重差観測残差を用いて，

$$\begin{aligned} b &= cdt_{3\_\Delta} \\ &= cdt_{3\_\Delta}(0) + \upsilon_{\Delta\rho} \end{aligned} \tag{3.1-7}$$

ここで，$cdt_{3_\Delta}(0)$は観測更新する前の仮の時計バイアス推定値で，初回の一重差観測残差はこの値をもとに計算する．さらに，搬送波位相の一重差観測残差を用いて，

$$b \equiv b + \upsilon_{\lambda\Delta\phi} \tag{3.1-8}$$

と精度を高めることも可能である．ただし，搬送波位相の一重差観測残差の計算にはアンビギュイティの値が必要である．したがって，その精度以上に時計バイアスの精度は向上しない．初回の観測更新時にはアンビギュイティがまだ正確に推定されていないので，この部分は省略してもよい．

時計バイアスのドリフトに関しては，自律的にその一重差を推定することができない．したがって，初期値を 0 とするか，ユーザの GPS 受信機の値を設定する（DGPS 地上局の時計バイアスドリフトを 0 と仮定している）かして，カルマンフィルタの観測更新で正しい値に収束させる．

搬送波位相のアンビギュイティの初期値は，シュードレンジ一重差と搬送波位相一重差の差から求める．すなわち，(2.2-123)式と(2.2-135)式より，

$$\begin{aligned} \lambda\Delta\phi(t_3) - \Delta\rho(t_3) &= \lambda n_\Delta + (\delta\phi_{\lambda\_\Delta} - \delta\rho_\Delta) \\ &\approx \lambda n_\Delta \end{aligned} \tag{3.1-9}$$

の関係を用いてアンビギュイティの初期値とする．初期値には観測ノイズ，とくにシュードレンジの観測ノイズが含まれているので，その精度は GPS 受信機のシュードレンジ観測精度と同等（たとえば，トリンブル GPS 受信機の場合 0.7 m (1σ) 程度）である．この精度は，カルマンフィルタ状態量の初期値としては十分である．

アンビギュイティの初期値は初期設定時だけでなく，サイクルスリップを起こしたときも必要である．これは，サイクルスリップ時のアンビギュイティ誤差が数百m以上と非常に大きくなることもあり，カルマンフィルタが発散するのを防ぐためである．この場合にも(3.1-9)式を用いてアンビギュイティの初期値を求めることができるが，本システムではすでに複合航法により高精度になっている INS 位置データと時計バイアスを真値と仮定してさらに精度を上げる．すなわち，(3.1-8)式において補正するのは時計バイアスではなくアンビギュイティとして，搬送波位相の一重差観測残差を用いて，

$$\lambda n_\Delta \equiv \lambda n_\Delta + \upsilon_{\lambda\Delta\phi} \tag{3.1-10}$$

とする．ここで，右辺のλn_Δは搬送波位相の一重差観測残差を計算する際に用いたアンビギュイティである．なお，サイクルスリップの検知には搬送波位相の一重差観測残差を用いて，あるスレショルド値（Th_ϕ）を複数回（n_{slip}）越えるかで判断する．

フィルタのパラメータであるプロセスノイズの電力密度と UD 行列は以下の式で設定する．

$$q_a = \frac{2\sigma_a^2}{T_{ba}} \tag{3.1-11}$$

$$q_g = \frac{2\sigma_g^2}{T_{bg}} \tag{3.1-12}$$

$$q_b = 0 \tag{3.1-13}$$

$$q_{\dot{b}} = Ps_{clk\_frandom} \tag{3.1-14}$$

$$q_{amb} = \frac{2\sigma_{amb}^2}{T_n} \tag{3.1-15}$$

$$u_0 = u_1 = \ldots = u_{N(N-1)/2-1} = 0 \tag{3.1-16}$$

$$d_0 = \frac{\sigma_p^2}{r_e} \tag{3.1-17}$$

$$d_1 = \frac{\sigma_p^2}{r_e \cos L} \tag{3.1-18}$$

$$d_2 = \sigma_p^2 \tag{3.1-19}$$

$$d_3 = d_4 = d_5 = \sigma_v^2 \tag{3.1-20}$$

$$d_6 = d_7 = d_8 = \sigma_e^2 \tag{3.1-21}$$

$$d_9 = d_{10} = d_{11} = \sigma_a^2 \tag{3.1-22}$$

$$d_{12} = d_{13} = d_{14} = \sigma_g^2 \tag{3.1-23}$$

$$d_{15} = \sigma_p^2 \tag{3.1-24}$$

$$d_{16} = \sigma_v^2 \tag{3.1-25}$$

$$d_{17} = d_{18} = \cdots = d_{25} = \sigma_{amb}^2 \tag{3.1-26}$$

ここで，フィルタの誤差状態量は(2.2-17)式で定義されているものとする．また，σ_p, σ_v, σ_e, σ_a, σ_g, σ_{amb} はそれぞれ，初期位置誤差，初期速度誤差，初期姿勢角誤差，初期加速度バイアス誤差，初期ジャイロバイアス誤差，初期アンビギュイティ誤差の標準偏差である．$Ps_{clk\_frandom}$ はクロックの周波数ランダムウォークのプロセスノイズ電力密度である．

フィルタの誤差状態量 $\boldsymbol{x}$ は，基準軌道のまわりで拡張カルマンフィルタにより誤差を推定するので，(2.2-66)式にしたがい観測更新後は 0 となる．したがって，初期値も 0 を設定する．

最後に各フラッグの切り替え基準について述べる．*init_flag* はすべての初期設定を終えた時点で初期設定完了として YES に変わり, NO に戻ることはない. *filter_flag* は, 機上と地上 GPS データが同期した時点で YES となり，フィルタ計算が終了した時点で NO に戻る．*sync_flag* は GPS と INS データが同期した時点で YES となり，フィルタ計算が終了した時点で NO に戻る．*clk_flag* は初期値が YES で，時計バイアスの設定をしたときに NO に戻る．フィルタ計算が発散し，観測更新が行われなくなった場合は，時計バイアスをリセットするため YES に戻す．*dgps_flag* は，地上 GPS 受信機からのデータが入力されたときに YES となり，データがない場合は NO となる．*cdgps_flag* は，シュードレンジによる観測更新の結果，観測残差の総和が設定値以下になると YES となる．*cdgps_flag* が YES になってはじめて，観測更新に搬送波位相が用いられる（それまではシュードレンジのみが観測更新に用いられる）．はじめから搬送波位相を用いないのは，搬送波位相によるローカルミニマムに航法結果が収束するのを防ぐためである．

３．２　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法処理

ここでは第２章で説明したフィルタ計算とストラップダウン INS 計算を行う．実時間処理に対応するため，センサデータの同期を取りながらアルゴリズムを処理する．航法の出力要求を受け付けると，前回の航法出力から要求時までの間，バッファに貯めたセンサデータが入力される．センサデータのうち，ユーザ（機上）の GPS 受信機データとテレメトリを介して得られる地上の GPS 受信機データの時刻タグを比較する．ここで時刻タグが合うデータが存在すると, DGPS によるフィルタ観測更新が可能であるとして，*filter_flag* が YES に設定される．時刻タグが合わない場合は，*filter_flag* は NO のままで，今回の航法出力の計算ではフィルタの観測更新が行われないことになる．時刻タグの比較には，時間的に早く入力されているデータ側（今回の場合はユーザ GPS データ）をバッファに保存する．GPS データとしては，観測更新に必要な観測時刻，シュードレンジ，搬送波位相の３種類のデータをバッファに入れる．

つぎに, IMU のデータがあるかどうか判定される. IMU データは一番高いレートで入力されるので，通常，複数個のデータが存在する. DGPS によるフィルタ観測更新が行われない場合（*filter_flag* = NO の場合）は，このデータを順にストラップダウン INS 計算に入力する. DGPS によるフィルタ観測更新をする場合（*filter_flag* = YES の場合）は，ストラップダウン INS 計算が行われるたびに，時間

更新される INS データの時刻タグと GPS データの時刻タグを比較して，同期しているかどうか毎回チェックする．同期している場合は，フィルタ計算（時間更新と観測更新）を先に実施する．GPS 同期の確認と同様に，時刻タグの比較には，時間的に早く入力されている INS データをバッファに保存する．保存すべき INS データは，フィルタ計算に必要な基準軌道（時刻，位置，姿勢角（クォータニオン））と，フィルタのシステム行列（Φ）の計算に必要な速度，速度増分，積分時間である．

フィルタの観測更新により INS 基準軌道を更新する際に注意しなければならないのは，IMU データが通常は先に入力されているため, INS バッファには観測更新時刻以降の基準軌道も保存されているという点である．観測更新は，その観測更新時刻以降すべての基準軌道に影響を及ぼす．ここでは，観測残差を計算する上で位置に対する影響が大きいので，(2.1-97)式～(2.1-99)式のかわりに，速度の観測更新まで考慮した以下の式でその影響を補正する．

$$\hat{L}(t_i) = L(t_i) + \delta\hat{L}(t_k) + \frac{\delta\hat{v}_N(t_k)}{r_e}(t_i - t_k) \quad (t_i = t_k, \ldots, t_N) \tag{3.2-1}$$

$$\hat{l}(t_i) = l(t_i) + \delta\hat{l}(t_k) + \frac{\delta\hat{v}_E(t_k)}{r_e \cos L}(t_i - t_k) \quad (t_i = t_k, \ldots, t_N) \tag{3.2-2}$$

$$\hat{h}(t_i) = h(t_i) + \delta\hat{h}(t_k) - \delta\hat{v}_D(t_k)(t_i - t_k) \quad (t_i = t_k, \ldots, t_N) \tag{3.2-3}$$

ここで，t_k は観測更新の時刻（GPS データの時刻タグ），t_N は観測更新をした時点で INS バッファに入っている最新の基準軌道の時刻である．

４．搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムの実施例

ここでは，第２章および第３章で述べた複合航法アルゴリズムと制御ロジックを汎用パソコン（CPU として Pentium 200 MHz を搭載）上で実現し，実験用航空機に搭載して航法装置として動作させた結果の例を示す．図 4-1 は，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムの位置，速度，姿勢角出力を使って，パイロットにトンネルによる経路表示（TIS, Tunnel In the Sky）を行い，滑走路への曲線進入をさせた例である．TIS による曲線進入は，都市近郊の空港における騒音問題の解決のため，人家の少ない経路を選んで着陸できるよう，パイロットへの誘導表示のあり方と飛行経路の決め方を研究するもので，図 4-1 に示すように，機上で指示した４つの曲線進入経路（進入経路はＡ～Ｇまで７種類あらかじめ用意していた．本実験ではそのうち，進入経路Ｃ，Ｄ，Ｆ，Ｇを実施した）で滑走路に着陸することができている．図 4-2 は, 高高度, 長基線（DGPS 地上局とユーザの相対距離が大きい）時の搬送波位相 DGPS/INS 複合航法の航法結果をプロットしたもので, 実験用航空機の限界高度 6,400 m まで上昇した後, DGPS 地上局のテレメトリ限界距離 47 km まで進出している．全飛行フェーズで搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムは発散することなく，正常動作を行っていた．表 4-1 に本実施例で使用したパラメータの一覧を示す．

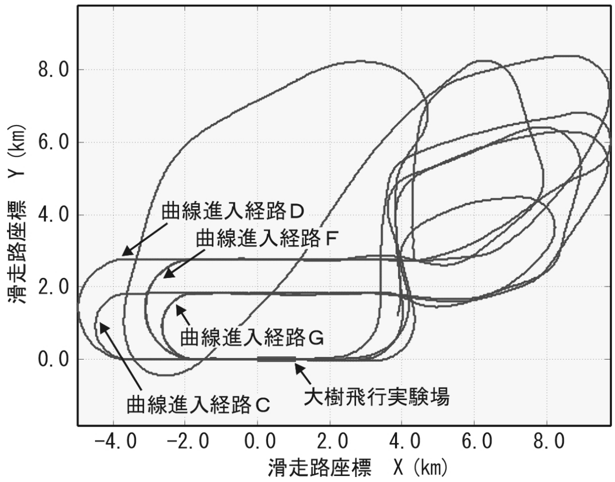

図 4-1　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法による曲線進入

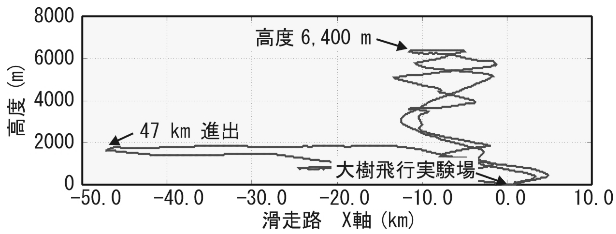

図 4-2　搬送波位相 DGPS/INS による長基線、高高度飛行

本報告の目的は，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムのアルゴリズムを明確にすることであるので，ここではシステムの動作例を示すにとどめ，その性能評価の詳細については別の報告 [15)] にゆずる．

最後に，システム動作時の計算機負荷について示す．計算機は上述のように Pentium 200 MHz プロセッサを搭載したパソコンを用いた．図 3-1 におけるストラップダウン INS 計算に 2 msec の計算時間を必要とし, 64Hz で IMU 入力があった場合，計算負荷は約 13 %となる．フィルタ

表 4-1　実施例で使用したパラメータの値

パラメータ	内容	実施例での値
G_{sx}, G_{sy}, G_{sz}	ジャイロのスケールファクタ推定値	すべて 0
G_{xy}, G_{xz}, G_{yx}, G_{yz}, G_{zx}, G_{zy}	ジャイロのミスアライメント推定値	すべて 0
A_{sx}, A_{sy}, A_{sz}	加速度計のスケールファクタ推定値	すべて 0
A_{xy}, A_{xz}, A_{yx}, A_{yz}, A_{zx}, A_{zy}	加速度計のミスアライメント推定値	すべて 0
Δt	IMU の積分時間（サンプリング時間）	20 msec（ノミナル）
T	カルマンフィルタにおける離散化の時間間隔	1 sec（ノミナル）
T_{ba}	加速度計バイアスの時定数	600 sec
T_{bg}	ジャイロバイアスの時定数	600 sec
T_n	アンビギュイティ誤差の時定数	3600 sec
σ_p	初期位置誤差の標準偏差	100 m
σ_v	初期速度誤差の標準偏差	0.5 m/sec
σ_e	初期姿勢角誤差の標準偏差	0.01 deg
σ_a	初期加速度バイアス誤差の標準偏差	5×10^{-4} m/sec^2
σ_g	初期ジャイロバイアス誤差の標準偏差	0.05 deg
σ_{amb}	初期アンビギュイティ誤差の標準偏差	0.5 m
$Ps_{clk\_frandom}$	クロック周波数ランダムウォークのプロセスノイズ電力密度	1.1×10^{-3} m/sec^2
Th_ϕ	搬送波位相観測残差のスレショルド値	3 m
Th_ρ	シュードレンジ観測残差のスレショルド値	3 m
n_{slip}	サイクルスリップの検定回数	3 回

計算は（9 チャンネル受信機の場合）50 msec の計算時間を必要とし，GPS データが 1 Hz で入力された場合，その計算負荷は 5 %である．したがって，アルゴリズムを実行するだけならば，計算負荷は合計 18 %と比較的小さな値である．また必要なメモリ量は，プログラムとデータ領域で約 120 KB となる．

5．おわりに

本報告では，搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムのアルゴリズムとその制御ロジックについて解説した．このアルゴリズムの特長は，従来の DGPS/INS 複合航法ソフトウェアにおいて，システムモデルと観測モデルを拡張するだけで高精度の航法が実現できる点にある．したがって，既存の複合航法ソフトウェアからの移行が容易である．制御ロジックの特長は，非同期の異なる周期で入力されるセンサデータを実時間で扱うことができる点にある．これにより，各センサに同期信号を入れる必要がなく，ハードウェアに対する負担が小さい．

本システムは高速飛行実証機の着陸航法システムとして採用が決定しているが，それ以外にも航空機の精密進入着陸時の航法装置として活用することができる．精度の高い航法装置をもつことにより，高度な誘導，管制が可能となり，将来の飛行安全向上，運航効率改善の実現が期待できる．

参考文献

1. J. E. Bortz, Sr., : A New Concept in Strapdown Inertial Navigation, NASA TR R-329, 1970.
2. C. G. Park and K. J. Kim : Generalized Coning Compensation Algorithm for Strapdown System, AIAA paper 96-3736, San Diego, 1996.
3. 畑　剛，泉　達司，川口　淳一郎：航空・宇宙における制御，コロナ社，1999.
4. R. A. Mayo : Relative Quaternion State Transition Relation, J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 2, No. 1, 1979, pp. 44-48.

5. 山口　功，他：クォータニオンとオイラー角によるキネマティックス表現の比較について，航空宇宙技術研究所資料，TM636，1991.
6. 理科年表，丸善，1993.
7. A. Gelb : *Applied Optimal Estimation*, The M.I.T. press, 1974.
8. C. L. Thornton and G. J. Bierman : Gram-Schmidt Algorithms for Covariance Propagation, Int. J. Control, Vol. 25, No. 2, 1977, pp. 243-260.
9. B. W. Parkinson, J. J. Spilker, Jr., et. al., : Global Positioning System : Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 163, 1995.
10. 藤本　真克：GPS による時刻同期，計測自動制御学会誌「計測と制御」, Vol. 27, No. 7, 1988, pp. 47-52.
11. J. Saastamoinen : Atmospheric Correction for the Tropospheric and Stratoshpere in Radio Ranging of Satellites, in the Use of Artificial Satellites for Geodesy, Geophysics, Monograph Ser., Vol. 15, 1972, pp. 247-251.
12. Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT : Documentation for the GAMIT GPS Analysis Software, Release 9.40, November 1995.
13. B. W. Remondi : Global Positioning system Carrier Phase : Description and Use, Bulletin Geodesique 59, pp. 361-377.
14. G. J. Bierman : Measurement Updating using the U-D Factorization, Automatica, Vol. 12, pp. 375-382.
15. 張替　正敏, 辻井　利昭, 小野　孝次, 稲垣　敏治：搬送波位相 DGPS/INS 複合航法による精密進入着陸航法システムの開発，航空宇宙技術研究所報告，TR1399，2000.

付録１．本システムで使われる座標系

本システムで使用される座標系を図付-1 に示す.

付録２．システムダイナミクス行列の導出

カルマンフィルタで推定される航法誤差を，2.2-1(1)節の変数を用いて以下のように定義する.

$$\delta \boldsymbol{r}^n = \boldsymbol{r}^n - \tilde{\boldsymbol{r}}^n \quad \text{(a-1)}$$

$$\delta \boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{v}^n - \tilde{\boldsymbol{v}}^n \quad \text{(a-2)}$$

$$\tilde{C}_b^n = (I - [\delta \boldsymbol{e}^n \times])C_b^n \quad \text{(a-3)}$$

$$\delta \boldsymbol{b}_{acc} = \boldsymbol{b}_{acc} - \tilde{\boldsymbol{b}}_{acc} \quad \text{(a-4)}$$

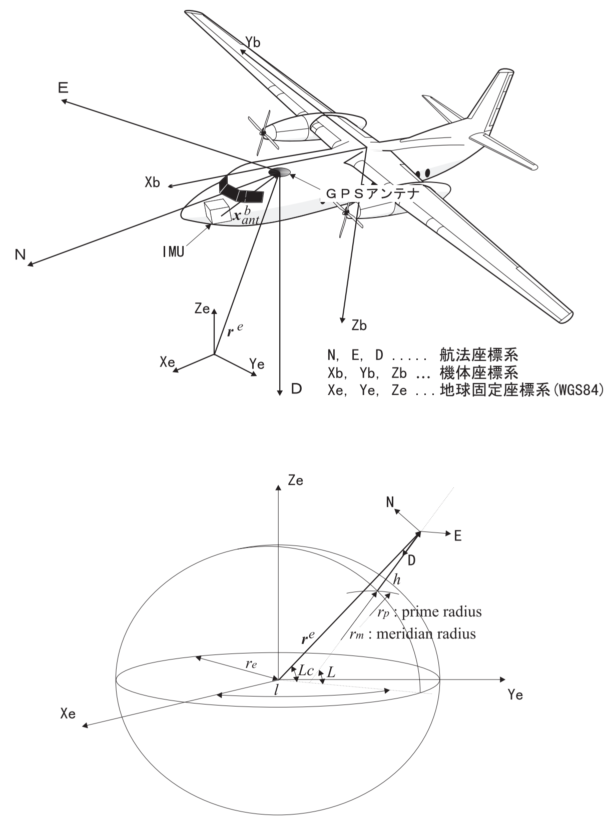

図　付-1　　搬送波位相 DGPS/INS 複合航法システムで使用される座標系

$$\delta \boldsymbol{b}_{gyro} = \boldsymbol{b}_{gyro} - \tilde{\boldsymbol{b}}_{gyro} \quad \text{(a-5)}$$

$$\delta \boldsymbol{b}_{clk} = \boldsymbol{b}_{clk} - \tilde{\boldsymbol{b}}_{clk} \quad \text{(a-6)}$$

$$\delta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{(a-7)}$$

ここで，~ は誤差を含む状態量，すなわちストラップダウン INS 計算と GPS データ処理で扱われる変数の値である．~ なしは，真値であり現実には知ることができない値である.

(1)　INS 位置誤差

INS 位置の時間更新は(2.1-91)式～(2.1-93)式で表される．したがって，位置誤差のダイナミクスを表す微分方程式は，(a-1)式の一次までの偏分を考え,

$$\delta\dot{L} = \frac{1}{r}\delta v_N - \frac{\tilde{v}_N}{r^2}\delta h \qquad \text{(a-8)}$$

$$\delta\dot{l} = \frac{1}{r\cos\tilde{L}}\delta v_E + \frac{\tilde{v}_E \sin\tilde{L}}{r\cos^2\tilde{L}}\delta L - \frac{\tilde{v}_E}{r^2\cos\tilde{L}}\delta h \qquad \text{(a-9)}$$

$$\delta\dot{h} = -\delta v_D \qquad \text{(a-10)}$$

となる．ここで，

$$r = r_e + \tilde{h} \qquad \text{(a-11)}$$

である．システムダイナミクス行列は数値的に厳密でなくてもよいので，(2.1-91)式～(2.1-93)式における r_m, r_p は r_e で置き換え，簡単化している．

(2)　INS 速度誤差

INS 速度の時間更新を表す微分方程式を(2.1-86)式に基づき，ここでは以下の式で考える．

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{a}^n - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}_0^n - C_i^n\Omega_{ie}^i\Omega_{ie}^i\boldsymbol{r}^i \qquad \text{(a-12)}$$

システムダイナミクス行列は数値的に厳密でなくてもよいので，重力は地球を球と仮定したときの値 $\boldsymbol{g}_0^n$ と遠心力を合成したものと簡単化しておく．

同様に(a-2)式の一次までの偏分を考え，速度誤差のダイナミクスを表す微分方程式は，

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{v}}^n &= \delta\boldsymbol{a}^n - (\delta\Omega_{en}^n + 2\delta\Omega_{ie}^n)\tilde{\boldsymbol{v}}^n - (\tilde{\Omega}_{en}^n + 2\tilde{\Omega}_{ie}^n)\delta\boldsymbol{v}^n \\ &\quad + \delta\boldsymbol{g}_0^n - \delta(C_i^n\Omega_{ie}^i\Omega_{ie}^i\boldsymbol{r}^i)\end{aligned} \qquad \text{(a-13)}$$

となる．それぞれの項を計算する．

①　$\delta\boldsymbol{a}^n$

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{a}^n &= \delta(C_b^n\boldsymbol{a}^b) \\ &= \delta C_b^n\tilde{\boldsymbol{a}}^b + \tilde{C}_b^n\delta\boldsymbol{a}^b \\ &= [\delta\boldsymbol{e}^n\times]\tilde{C}_b^n\tilde{\boldsymbol{a}}^b + \tilde{C}_b^n\delta\boldsymbol{a}^b \\ &= -[\tilde{\boldsymbol{a}}^n\times]\delta\boldsymbol{e}^n + \tilde{C}_b^n\delta\boldsymbol{a}^b\end{aligned} \qquad \text{(a-14)}$$

ここで，右辺第二項の $\delta\boldsymbol{a}^b$ は機体軸における加速度の誤差であるが，本システムでは加速度計のバイアス誤差と考えてよい．したがって，(a-14)式は，

$$\delta\boldsymbol{a}^n = -[\tilde{\boldsymbol{a}}^n\times]\delta\boldsymbol{e}^n + \tilde{C}_b^n\delta\boldsymbol{b}_{acc} \qquad \text{(a-15)}$$

となる．

②　$(\delta\Omega_{en}^n + 2\delta\Omega_{ie}^n)\tilde{\boldsymbol{v}}^n$

$$(\delta\Omega_{en}^n + 2\delta\Omega_{ie}^n)\tilde{\boldsymbol{v}}^n = -[\tilde{\boldsymbol{v}}^n\times](\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \qquad \text{(a-16)}$$

(2.1-87)式より，

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\delta v_E - \dfrac{\tilde{v}_E}{r^2}\delta h - 2\omega_e\sin\tilde{L}\cdot\delta L \\ -\dfrac{1}{r}\delta v_N + \dfrac{\tilde{v}_N}{r^2}\delta h \\ -\dfrac{\tan\tilde{L}}{r}\delta v_E + \dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r^2}\delta h - \left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2\tilde{L}} + 2\omega_e\cos\tilde{L}\right)\delta L \end{pmatrix} \qquad \text{(a-17)}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}&(\delta\Omega_{en}^n + 2\delta\Omega_{ie}^n)\tilde{\boldsymbol{v}}^n \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -\tilde{v}_D & \tilde{v}_E \\ \tilde{v}_D & 0 & -\tilde{v}_N \\ -\tilde{v}_E & \tilde{v}_N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\delta v_E - \dfrac{\tilde{v}_E}{r^2}\delta h - 2\omega_e\sin\tilde{L}\cdot\delta L \\ -\dfrac{1}{r}\delta v_N + \dfrac{\tilde{v}_N}{r^2}\delta h \\ -\dfrac{\tan\tilde{L}}{r}\delta v_E + \dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r^2}\delta h - \left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2\tilde{L}} + 2\omega_e\cos\tilde{L}\right)\delta L \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{v}_D}{r} & -\dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\tilde{v}_D}{r} + \dfrac{\tilde{v}_N\tan\tilde{L}}{r} & 0 \\ -\dfrac{\tilde{v}_N}{r} & -\dfrac{\tilde{v}_E}{r} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -\tilde{v}_E\left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2\tilde{L}} + 2\omega_e\cos\tilde{L}\right) & 0 & \dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_E^{\,2}\tan\tilde{L} - \tilde{v}_N\tilde{v}_D\right) \\ \tilde{v}_N\left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2\tilde{L}} + 2\omega_e\cos\tilde{L}\right) - 2\tilde{v}_D\omega_e\sin\tilde{L} & 0 & -\dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_N\tilde{v}_E\tan\tilde{L} + \tilde{v}_E\tilde{v}_D\right) \\ 2\tilde{v}_E\omega_e\sin\tilde{L} & 0 & \dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_N^{\,2} + \tilde{v}_E^{\,2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix}\end{aligned} \qquad \text{(a-18)}$$

となる．

③　$(\tilde{\Omega}_{en}^n + 2\tilde{\Omega}_{ie}^n)\delta\boldsymbol{v}^n$

(2.1-87)式より，

$$(\tilde{\Omega}_{en}^{n}+2\tilde{\Omega}_{ie}^{n})\delta\boldsymbol{v}^{n}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r}+2\omega_e\sin\tilde{L} & -\dfrac{\tilde{v}_N}{r} \\ -\dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r}-2\omega_e\sin\tilde{L} & 0 & -\dfrac{\tilde{v}_E}{r}-2\omega_e\cos\tilde{L} \\ \dfrac{\tilde{v}_N}{r} & \dfrac{\tilde{v}_E}{r}+2\omega_e\cos\tilde{L} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D\end{pmatrix} \tag{a-19}$$

となる．

④ $\delta\boldsymbol{g}_0^n$

地球は球と仮定しているので，

$$\boldsymbol{g}_0^n=(0,0,\frac{\mu}{r^2})^T \tag{a-20}$$

である．したがって，

$$\delta\boldsymbol{g}_0^n=(0,0,-\frac{2\mu}{r^3}\delta h)^T \tag{a-21}$$

である．

⑤ $\delta(C_i^n\Omega_{ie}^i\Omega_{ie}^i\boldsymbol{r}^i)$

$$C_i^n\Omega_{ie}^i\Omega_{ie}^i\boldsymbol{r}^i=(r\omega_e{}^2\cos\tilde{L}\sin\tilde{L},0,r\omega_e{}^2\cos^2\tilde{L})^T \tag{a-22}$$

である．したがって，

$$\delta(C_i^n\Omega_{ie}^i\Omega_{ie}^i\boldsymbol{r}^i)=\begin{pmatrix} r\omega_e{}^2\cos 2\tilde{L} & 0 & \dfrac{1}{2}\omega_e{}^2\sin 2\tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \\ -r\omega_e{}^2\sin 2\tilde{L} & 0 & \omega_e{}^2\cos^2\tilde{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta L \\ \delta l \\ \delta h\end{pmatrix} \tag{a-23}$$

となる．

①〜⑤までの式を使って，(a-13)式を書き直すと，

$$\begin{pmatrix}\delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{v}_D}{r} & -2\left(\dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r}+\omega_e\sin\tilde{L}\right) & \dfrac{\tilde{v}_N}{r} \\ \dfrac{\tilde{v}_E\tan\tilde{L}}{r}+2\omega_e\sin\tilde{L} & \dfrac{\tilde{v}_D}{r}+\dfrac{\tilde{v}_N\tan\tilde{L}}{r} & \dfrac{\tilde{v}_E}{r}+2\omega_e\cos\tilde{L} \\ -\dfrac{2\tilde{v}_N}{r} & -2\left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r}+\omega_e\cos\tilde{L}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} -\tilde{v}_E\left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2\tilde{L}}+2\omega_e\cos\tilde{L}\right)-r\omega_e{}^2\cos 2\tilde{L} & 0 & \dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_E{}^2\tan L-\tilde{v}_N\tilde{v}_D\right)-\dfrac{\omega_e{}^2}{2}\sin 2\tilde{L} \\ \tilde{v}_N\left(\dfrac{\tilde{v}_E}{r\cos^2 L}+2\omega_e\cos\tilde{L}\right)-2\tilde{v}_D\omega_e\sin\tilde{L} & 0 & -\dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_N\tilde{v}_E\tan\tilde{L}+\tilde{v}_E\tilde{v}_D\right) \\ 2\tilde{v}_E\omega_e\sin\tilde{L}+r\omega_e{}^2\sin 2\tilde{L} & 0 & \dfrac{1}{r^2}\left(\tilde{v}_N{}^2+\tilde{v}_E{}^2\right)-\omega_e{}^2\cos^2\tilde{L}-\dfrac{2\mu}{r^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta L \\ \delta l \\ \delta h\end{pmatrix}$$
$$-[\tilde{\boldsymbol{a}}^n\times]\begin{pmatrix}\delta e_1 \\ \delta e_2 \\ \delta e_3\end{pmatrix}+\tilde{C}_b^n\begin{pmatrix}\delta a_{bx} \\ \delta a_{by} \\ \delta a_{bz}\end{pmatrix} \tag{a-24}$$

となる．

(3) INS 姿勢角誤差

(a-3)式の他に２つの誤差を導入する．

$$\tilde{C}_b^i=(I-[\delta\boldsymbol{e}\times])C_b^i \tag{a-25}$$

$$\tilde{C}_i^n=(I-[\delta\boldsymbol{v}^n\times])C_i^n \tag{a-26}$$

(a-25)式は姿勢角のみに関する誤差, (a-26)式は位置の誤差となる．INS 姿勢角誤差は，この２つの誤差を用いて，

$$C_b^n-\tilde{C}_b^n=C_i^nC_b^i-\tilde{C}_i^n\tilde{C}_b^i \tag{a-27}$$

$$\begin{aligned}[\delta\boldsymbol{e}^n\times]C_b^n&=(I+[\delta\boldsymbol{v}^n\times])C_i^n(I+[\delta\boldsymbol{e}^n\times])C_b^i-C_i^nC_b^i \\ &=[\delta\boldsymbol{v}^n\times]C_b^n+C_i^n[\delta\boldsymbol{e}^n\times]C_b^i\end{aligned} \tag{a-28}$$

$$[\delta\boldsymbol{e}^n\times]=[\delta\boldsymbol{v}^n\times]+C_i^n[\delta\boldsymbol{e}^n\times]C_n^i \tag{a-29}$$

と表され，これをベクトル形に直すと，

$$\delta\boldsymbol{e}^n=\delta\boldsymbol{v}^n+C_i^n\delta\boldsymbol{e} \tag{a-30}$$

となる．両辺の微分を取ると，

$$\delta\dot{\boldsymbol{e}}^n=-[\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times]\delta\boldsymbol{e}_n+[\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times]\delta\boldsymbol{v}^n+\delta\dot{\boldsymbol{v}}^n+C_i^n\delta\dot{\boldsymbol{e}} \tag{a-31}$$

である．
(a-26)式より，

$$
\begin{aligned}
\delta C_i^n &= C_i^n - \tilde{C}_i^n \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sin\tilde{L}\cdot\delta l & \delta L \\ \sin\tilde{L}\cdot\delta l & 0 & \cos\tilde{L}\cdot\delta l \\ -\delta L & -\cos\tilde{L}\cdot\delta l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin L\cdot\cos\lambda & -\sin L\cdot\sin\lambda & \cos L \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos L\cdot\cos\lambda & -\cos L\cdot\sin\lambda & -\sin L \end{pmatrix} \\
&= [\delta\boldsymbol{v}^n\times]C_i^n
\end{aligned} \tag{a-32}
$$

$$
\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} -\cos\tilde{L}\cdot\delta l \\ \delta L \\ \sin\tilde{L}\cdot\delta l \end{pmatrix} \tag{a-33}
$$

両辺を微分すると，

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{v}}^n &= \begin{pmatrix} 0 & \sin\tilde{L}\cdot\dot{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\tilde{L}\cdot\dot{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos\tilde{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\tilde{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\dot{L} \\ \delta\dot{l} \\ \delta\dot{h} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\tan\tilde{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{v}_E}{r}\tan\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_N}{r}\sin\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_E}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{v}_N}{r^2} \\ \frac{\tilde{v}_E}{r}\tan^2\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_N}{r}\cos\tilde{L} & -\frac{\tilde{v}_E}{r^2}\tan\tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{a-34}
$$

となる．
つぎに$\delta\boldsymbol{e}$であるが，(a-25)式の両辺を微分して，

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{C}}_b^i &= -[\delta\dot{\boldsymbol{e}}\times]C_b^i + (I - [\delta\boldsymbol{e}\times])\dot{C}_b^i \\
&= -[\delta\dot{\boldsymbol{e}}\times]C_b^i + (I - [\delta\boldsymbol{e}\times])C_b^i[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times]
\end{aligned} \tag{a-35}
$$

$$
\tilde{C}_b^i[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times] = -[\delta\ddot{\boldsymbol{e}}\times]\tilde{C}_b^i - [\delta\boldsymbol{e}\times]\tilde{C}_b^i[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times] + \tilde{C}_b^i[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times] + [\delta\boldsymbol{e}\times]\tilde{C}_b^i[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\times] + \tilde{C}_b^i[\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times] \tag{a-36}
$$

$$
\therefore [\delta\dot{\boldsymbol{e}}\times] = \tilde{C}_b^i[\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\times]\tilde{C}_i^b \tag{a-37}
$$

これをベクトル形に直すと

$$
\delta\ddot{\boldsymbol{e}} = \tilde{C}_b^i\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}} \tag{a-38}
$$

ここで，角速度ベクトル誤差はジャイロバイアスと考えてよいので，

$$
\delta\ddot{\boldsymbol{e}} = \tilde{C}_b^i\delta\boldsymbol{b}_{gyro} \tag{a-39}
$$

となる．
以上より，INS 姿勢角のダイナミクスは，

$$
\begin{aligned}
\delta\ddot{\boldsymbol{e}}^n &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\tan\tilde{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{pmatrix} \\
&+ \left([\tilde{\omega}_{in}^n\times] \begin{pmatrix} 0 & -\cos\tilde{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\tilde{L} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{v}_E}{r}\tan\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_N}{r}\sin\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_E}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{v}_N}{r^2} \\ \frac{\tilde{v}_E}{r}\tan^2\tilde{L} & \frac{\tilde{v}_N}{r}\cos\tilde{L} & -\frac{\tilde{v}_E}{r^2}\tan\tilde{L} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \delta L \\ \delta l \\ \delta h \end{pmatrix} \\
&- [\tilde{\omega}_{in}^n\times] \begin{pmatrix} \delta e_1 \\ \delta e_2 \\ \delta e_3 \end{pmatrix} + \tilde{C}_b^n \begin{pmatrix} \delta\omega_{bx} \\ \delta\omega_{by} \\ \delta\omega_{bz} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{a-40}
$$

となる．

付録３．　軌道の基準点を変更する場合の変換式

本文では，軌道伝播させる軌道の基準点を GPS アンテナの位相中心におき，そこを航法座標系の原点として定式化した．しかし，ミッションによっては軌道の基準点を GPS アンテナの位相中心以外に設定したい場合がある．以下は，基準点を IMU の設置位置とした場合に，GPS アンテナ位置からの変換式をまとめる．
今, 機体軸座標系で表して IMU から GPS アンテナまでの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_{ant}^b$ とすると，地球固定座標系での IMU の位置 $\boldsymbol{r}_{IMU}^e$ は，GPS アンテナの位置 $\boldsymbol{r}^e$ から,

$$
\boldsymbol{r}_{IMU}^e = \boldsymbol{r}^e - C_b^e\boldsymbol{x}_{ant}^b \tag{a-41}
$$

となる．緯度，経度，高度で表したときは,

$$
L_{IMU} = L - \frac{C_b^n\boldsymbol{x}_{ant}^b(1)}{r_m + h} \tag{a-42}
$$

$$
l_{IMU} = l - \frac{C_b^n\boldsymbol{x}_{ant}^b(2)}{(r_p + h)\cos L} \tag{a-43}
$$

$$h_{IMU} = h + C_b^n \boldsymbol{x}_{ant}^b(3) \tag{a-44}$$

となる．ここで $C_b^n \boldsymbol{x}_{ant}^b(i)$ は， $C_b^n \boldsymbol{x}_{ant}^b$ 行列の第 i 行目の要素を表す．

対地速度は(a-41)式を微分して，

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{IMU}^e = \dot{\boldsymbol{r}}^e - \dot{C}_b^e \boldsymbol{x}_{ant}^b \tag{a-45}$$

となる．航法座標系に変換すると，

$$\boldsymbol{v}_{IMU}^n = \boldsymbol{v}^n - C_e^n \dot{C}_b^e \boldsymbol{x}_{ant}^b \tag{a-46}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \dot{C}_b^e &= -C_b^e [\boldsymbol{\omega}_{be}^b \times] \\ &= -C_b^e [(\boldsymbol{\omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times] \\ &\cong C_b^e [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times] \end{aligned} \tag{a-47}$$

なので，(a-46)式は，

$$\boldsymbol{v}_{IMU}^n = \boldsymbol{v}^n - C_b^n [\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times] \boldsymbol{x}_{ant}^b \tag{a-48}$$

となる．

航空宇宙技術研究所報告1416号

平成12年12月発行

発行所　科学技術庁航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7－44－1
電話(0422)40－3075　〒182－8522

印刷所　株式会社廣済堂
東京都港区芝2－23－13