

# 衝突する噴流の解析(その1)\*

高澤 金吾\*<sup>1</sup>

## Analysis of Impinging Jets (1)\*

Kingo TAKASAWA\*<sup>1</sup>

### ABSTRACT

In this paper we examined a complex potential solution for impinging jets, from a hydrodynamic perspective. The physical characteristics of the flow field were illustrated using a stream line diagram, velocity contour diagram and static pressure contour diagram.

The same problem was then solved numerically. A series of interpolation and differentiation procedures based on the Lagrange interpolation formula were applied systematically to solve the problem. Two grid systems were tested, a coarse and a fine system. The numerical results were compared with the analytical results to evaluate accuracy. Convergence of solution and computing time were also evaluated.

The free stream line was successfully described using parameters.

**Keywords:** Impinging jet, Interpolation, numerical differentiation

### 概 要

二次元噴流の衝突について流体の粘性を考慮した解析に着手する前に複素ポテンシャルによる解を流体力学的な意味で調べた。この解は粘性解析でレイノルズ数を増加した場合の流れ場の性質を部分的に示すと考えられ、粘性解析の結果の妥当性を判断するのに役立つと思われる。流れ場の物理的性質を流線図、等速度線図および等静圧線図を使って記述した。

解析解では適用できる境界条件に限られる。数値解ではより柔軟に境界条件を適用できるけれども、自由表面の形状を適切に設定できるか否かが問題になる。そこで同一の問題を数値的に解いた。問題を解く際にラグランジュの補間公式に基づく補間と微分の手順を系統的に適用した。荒い格子と細かい格子を試した。数値解の精度を評価するために解析解と比較した。収束と計算時間についても検討した。

パラメタを使って境界線を設定し、形状を調整することによって、境界線に沿う流速の計算で誤差0.15%以下を達成しほぼ自由表面に近い形が得られた。

### 記号

$i$  : 虚数記号

$p$  : 静圧

$p_a$  : 周囲圧

$Q$  : 無次元流速  $Q = q/U$

$q$  : 流速

$t$  : ジェット・シートの厚み 図 2.1 参照

$U$  : 一様流速、表面流速

$u$  : 流速の  $x$  成分

$v$  : 流速の  $y$  成分

$w$  : 複素ポテンシャル関数

$w = \quad + i \quad (2.1) \text{式参照}$

$X$  : 無次元座標  $X = x/t$

$x$  :  $x$  座標

$Y$  : 無次元座標  $Y = y/t$

$y$  :  $y$  座標

$z$  : 複素数  $z = x + iy$

$\theta$  : 偏角

$\pi$  : 円周率

$\rho$  : 密度

$v$  : 複素速度 (2.3)式参照

\* 平成 12 年 11 月 14 日受付 (Received 14 November 2000)

\*<sup>1</sup> 航空推進総合研究グループ

$\phi$  : 速度ポテンシャル  
 $\Psi$  : 無次元流れ関数 =  $\int U t$   
 $\psi$  : 流れ関数

## 1. まえがき

環境基準に適合するように窒素酸化物の発生を厳重に抑制することがガス・タービン燃焼器設計の重要な課題となっている。このためには局所的にもせよ過度の高温部分を作らないこと、高温状態の持続時間を極力短縮することが有効である。微粒化された燃料液滴の寸度、広がり、所在を設計の観点から適切に管理することが望まれる。

燃料の微粒化を極く短時間に行い、微細な液滴を燃焼器内の望ましい場所に適切に分布させる方法として、燃料ノズルの微細な噴出孔から噴射される燃料噴流を衝突させる方法が有望視される。

Sterling と Sleicher<sup>1)</sup> は単独の噴流の不安定について詳細な解析とこれを実証するための精度の高い実験を行った。表面張力に支配される波が細長い円柱状の液体の表面に生じ、次第に振幅を増し、振幅が円柱の半径を越えた時に円柱状の液体が切断される。3種の液体について噴流の速度を変え、ちぎれてバラバラの液滴になる前の連続体としての噴流長さについて解析値と実験値を比較し、極めて良い結果を得ている。

Weber<sup>2)</sup> はノズルから噴出する流れの崩壊、周囲の気体との干渉および粘性の影響を含む先駆的な解析を行った。

内燃機関の燃焼器で燃料を微粒化する課題では、噴流自身の持つ不安定に頼って微粒化するのを待つとすると、噴流の長さがいかにも長すぎて実用にならない。噴流の微粒化を促進するとき装置に複雑さがなく故障の可能性が少なく確実な作動が期待できるという点から噴流を衝突させる方法は有望と考えられる。

2本の噴流を衝突させると、衝突点から放射状に拡散する薄板(sheet)状の液体の流れを生じ、その周辺部から液滴となって飛散する。研究の歴史は Savart が衝突によって薄い水膜ができることを示した 1833 年にまでさかのぼるという。

この問題について、G.I. Taylor<sup>3),4),5),6)</sup> が 4 編の論文において、sheet の生成、sheet に発生する波、sheet の崩壊、スリットから噴出する薄い平板状の水で測定される波などに関する多面的な解析と実験を報告している。

Dombrowski 達<sup>7)</sup> は、実験で得られた写真によって噴流断面の速度分布が衝突後の分裂の仕方に強く関与していることを示し、液滴の大きさについても報告している。

Huang<sup>8)</sup> は同等な 2 本の噴流を正面衝突させて、sheet から液滴が生成される過程を 3 つの段階に区分し、sheet の半径と Weber 数の関係を実験および理論の両面から記述した。その後も微粒化を行う目的で噴流を衝突させる実

験研究<sup>9),10)</sup> が盛んに行われている。

Milne-Thomson の教科書<sup>11)</sup> には Impinging Jet という項を設け、非粘性非圧縮性流体の自由表面を持つ流れとして 2 枚の薄板状噴流(2次元噴流)が衝突する場合を記述している。本稿では、噴流の衝突を数値解法で取り扱うための予備段階として、2次元噴流の一例について解析解を検討し適切なものであることを確認した後に、同じ問題を数値的に解いて解析解と比較し精度を評価した。あわせて収束、計算時間及び自由表面の形状設定についても検討した。

## 2. 解析解

幅が狭く長さの長いスリット状の開口部から平板状の液体が大気または真空中へ噴出する状況を考える。ジェット・シートまたは 2 次元噴流と呼ばれ図 2.1 のようなものである。この図では便宜上奥行きが有限であるかのように描いたけれども、二次元噴流の奥行きはいうまでもなく無限である。

あい等しいジェットシートが正面衝突する流れ場について Milne-Thomson<sup>11)</sup> が非粘性非圧縮性流れを想定し複素関数を適用する解析を行っている。解析結果は流れ場を表わす複素ポテンシャル  $w(v)$  の表示式

$$w(v) = iUt/2 + (Ut/\pi)\{\log(1+v/U) - \log(1-v/iU) + \log(1-v/U) - \log(1+v/iU)\} \quad (2.1)$$

および流れ場を表示する複素面( $z$ 面)を複素速度 と関係付ける式

$$z = (t/\pi)\{-\log(U+v) + i \log(U+iv) + \log(U-v) - i \log(U-iv)\} \quad (2.2)$$

に要約される。ここで  $v$  は複素速度

$$v = u - iv = q \exp(-i\theta) \quad (2.3)$$

である。

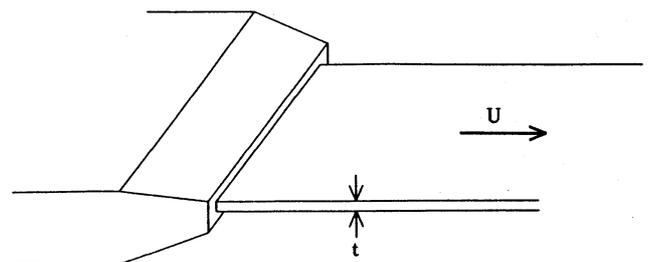


図 2.1 ジェット・シート

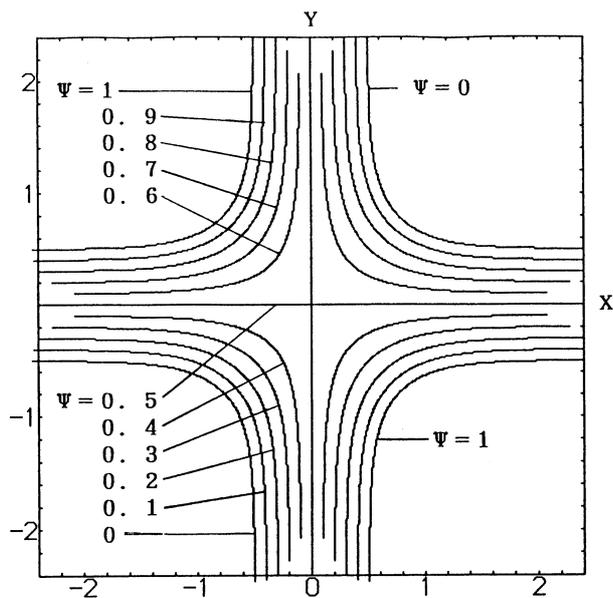


図 2.2 流線図

w( )およびzについて記述する (2.1)および (2.2)の 2式から算出される流れ場を図 2.2 に示す。左右からの噴流が正面衝突したのち上下に方向を変えて流れ去る。

付録 A で 2式を導出する過程を再吟味した。流れ場を設定するにあたって位置を表す複素面と速度を表す複素面の関係を明確にし、記号の規約を現代風に改め、秩序だった記述を試みて 2式が厳密であることおよび導出された複素ポテンシャルが非粘性流体力学の常識に反しないことを確かめることが重要との考えからである。

さらに、複素ポテンシャルは速度面の円  $U \exp(i\theta)$  の内部で連続かつ有限確定値をとることおよび実部 と虚部に分けると Cauchy-Riemann の関係を満たし正則関数であることを付録 A で確認した。また、連続の条件と渦無し条件が満足されていることを確認した。

(2.1)式と (2.2)式から誘導される諸式を用いて計算を行うと、複素速度 の方向を表す と大きさを表す  $Q = q/U$  を変数として自由流線および一般の流線、内部の等速度線ならびに静圧分布を求めることができる。静圧分布を求める際にベルヌイの式を利用する。結果を図 2.2 から図 2.4 までの 3葉をもって示し、それぞれの図から伺われる流れ場の性質を記述した。個々の流れを代表する速度の大きさ U、流れの厚み t の如何にかかわらず結果を同一の図で表すことができるように無次元化された表示を採用した。無次元量として  $X = x/t, Y = y/t, Q = q/U, \theta = \theta / Ut$  を用いた。流体部分の外縁にあたる自由流線の上では静圧が周囲の圧力に一致し、流速は  $Q = q/U = 1$  になる。流体の内部で静圧が上昇すると流速は低下する。よって  $0 < Q < 1$  である。

表 2.1  $\Psi = 1/2$  の流線

	Q	X	Y
$\theta = 0$	$0 < Q < 1$	$0 < X < \infty$	$0 > Y > 0$
$\theta = -\pi/2$	$0 < Q < 1$	$0 > X > 0$	$0 < Y < -\infty$
$\theta = -\pi$	$0 < Q < 1$	$0 < X < +\infty$	$0 > Y > 0$
$\theta = -3\pi/2$	$0 < Q < 1$	$0 > X > 0$	$0 < Y < +\infty$
$\theta = -2\pi$	$0 < Q < 1$	$0 < X < \infty$	$0 > Y > 0$

2.1 流線図

流れ場の様子を説明するためにまず流線図について述べる。(A.5)式の虚部を書き出すと無次元 流れ関数 が得られることを(A.9b)式に示してある。 の値を指定しこの式を書き直すと

$$\tan \{ \pi ( \Psi - 1/2 ) \} Q^4 + 2 \sin 2 \theta \cdot Q^2 - \tan \{ \pi ( \Psi - 1/2 ) \} = 0 \quad (2.4)$$

が得られるから の値を一定に保ち を 0 から -2 へ変化させてQを求める。

図 A.1 を見ると  $0 < \theta < \pi$  であるから は 0 から 1 の間の値をとる。 の値に応じて許容される の値がづぎのように定まる。

(1)  $\Psi = 1/2$  と指定すると (2.4)式は  $2 \sin 2 \theta \cdot Q^2 = 0$  となる。

a.  $\sin 2 \theta = 0$  から  $\theta = 0, -\pi/2, -\pi$  および  $-3\pi/2$  と定まる。

Qは0 Q 1をみたく任意の値をとる。Qを0から1へ増加させるとき (A.10a)式を用いてXを、(A.10b)を用いてYを計算する。XおよびYは表 2.1 のように変化し  $\Psi = 1/2$  の流線はX軸またはY軸と重なる。

b. がその他の値をとると  $Q = 0$  でなければならない。このとき、  $\Psi = 1/2$  の流線は原点に一致する。

(2)  $\Psi = 1/2$  と指定すると (2.4)式は  $Q^2$  についての 2次式で

$$Q^4 + \frac{2 \sin 2 \theta}{\tan \{ \pi ( \Psi - 1/2 ) \}} Q^2 - 1 = 0$$

と書き直せる。  $Q^2 = 0$  を満たす解は

$$Q^2 = \frac{-\sin 2 \theta}{\tan \{ \pi ( \Psi - 1/2 ) \}} + \sqrt{\frac{\sin^2 2 \theta}{\tan^2 \{ \pi ( \Psi - 1/2 ) \}} + 1} \quad (2.5)$$

a.  $0 < \Psi < 1/2$  を指定すると  $1 < Q^2 < \infty$  となるには  $\sin 2 \theta = 0$  でなければならない  $-\pi/2 < \theta < 0$  または  $-3\pi/2 < \theta < -\pi$

b.  $1/2 < Q < 1$  を指定すると  $Q^2$  となるには  $\sin^2 \theta = Q^2$  でなければならず  $\theta = \pm \arcsin Q$  または  $\theta = \pi - \arcsin Q$  を想起すると上記の関係は図 A.2 に示したの配置と適合している。

の値に応じて許容される  $Q$  を (2.5) 式に適用して負でない  $Q$  を求める。このようにして得られた  $Q$  と  $Q$  の組み合わせについて (A.10a,b) 両式を計算すると指定した  $Q$  の値に対応する流線の上の点の  $X, Y$  座標を求めることができる。

図 2.2 では無次元化された流れ関数の値  $\psi$  を 0 から 1 まで 0.1 刻みで変えて得られる 11 本の流線を  $X - Y$  面において示した。  $0 < \psi < 1/2$  ならば  $-1/2 < X < 0$  の部分が図の第 3 象限に右下がりの曲線として描かれ、  $-3/2 < \psi < -1/2$  の部分が第 1 象限に左上がりの曲線として描かれる。  $1/2 < \psi < 1$  ならば  $-1 < X < -1/2$  の部分が第 4 象限に右上がりの曲線として描かれ、  $-2 < \psi < -3/2$  の部分が第 2 象限に左下がりの曲線として描かれる。これらの曲線は図 A.1 と適合している。

原点に近いほど流線の間隔が広がり、速度の大きさが減る。原点からの距離が遠方の自由流線の厚み  $t$  の 2 倍程度離れると、流線がほぼ等間隔に保たれ平行流に近い流れになっている。流れ場の外縁部の流線と自由流線との間隔は常にほぼ一定に保たれている。

2.2 等速度線図

図 2.3 に  $x$  軸の正負の無限遠方から原点に向かって進む噴流が原点付近で衝突して方向を変え、 $y$  軸に沿って正負の無限遠方へ流出する流れ場について、速度が等しい部分

を繋いだ線を示した。

$Q$  を指定し  $Q$  を 0 から  $-2$  まで変えて (A.10a) 式と (A.10b) 式を計算すると、指定した  $Q$  の値に対応する等速度線の上の点の  $X, Y$  座標を求めることができる。  $Q = 0$  と指定するとつねに  $X = 0, Y = 0$  が得られ、渦み点が原点に一致することが分かる。  $Q$  を 0.1 から 1 まで 0.1 刻みで変えて合計 10 本の等速度線を描いた。  $x$  軸の正負両側からの流れは原点に渦み点を作り、原点の周囲に速度の遅いほぼ円形の領域がみられる。原点から離れるにつれて、等速度線は次第に角の丸められた菱形類似のかたちをとる。  $Q = 1$  の等速度線は自由流線と一致し流れの最外縁に位置する。  $X$  軸から反時計回りに測って、  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  の方向に位置するあたりで自由流線が顕著に曲がり、流体外縁部の等速度線の間隔が狭まっている。  $Q = 0.9$  すなわち一様流の 90% の速度の部分ですら、原点からの距離が遠方の自由流線の幅  $t$  の 1.4 倍以下の領域に収まっている。

2.3 等静圧線図

図 2.4 に流れの静圧が等しい点を繋いだ線を示した。図の原点の渦み点圧力と自由流線上の周囲圧力との間を 10 等分し合計 10 本の曲線を描いた。すなわち

$$\frac{p - p_a}{\rho U^2 / 2} = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

の静圧に対応する線である。原点の周囲には静圧の高いほぼ円形の領域がみられ、外縁部へ近づくると 4 枚の花びらを持つ花のように変形している。  $X$  軸または  $Y$  軸上の静圧勾配は原点付近でなだらかで、その先では勾配が増し、さらに原点から離れると、再びなだらかになる。つまり、頂上

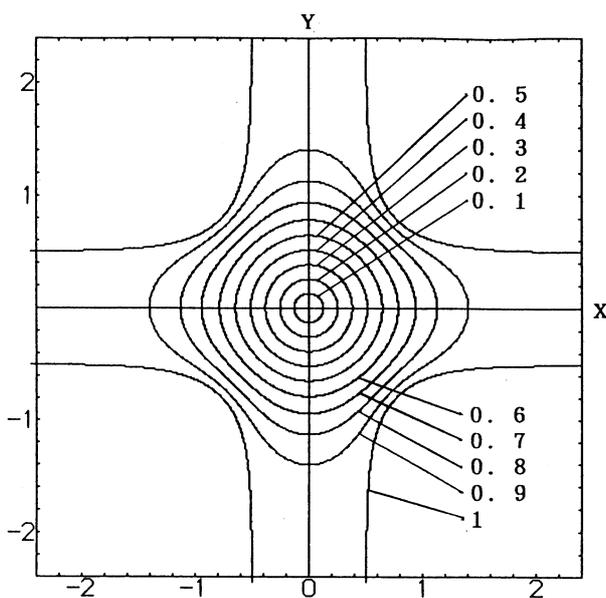


図 2.3 等速度線図  
図中の数字は無次元速度  $Q$

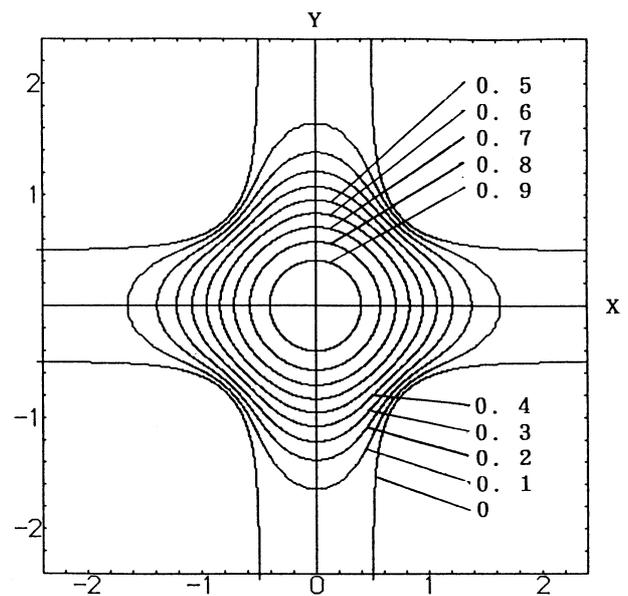


図 2.4 等静圧線図  
図中の数字は無次元静圧  $\frac{p - p_a}{\rho U^2 / 2}$

付近がなだらかで、途中で斜面があり、長く裾野を引く山のような形である。これに対して、X軸から反時計回りに測って、 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  の方向に位置する辺りでは原点付近はなだらかであるが、外縁部へ近づくにつれて勾配が増す釣鐘の形をしている。描いた等静圧線のうち自由流線を除く最も外側のものでも原点からの距離が遠方の自由流線の幅の1.6倍以下の領域に収まっている。等速度線図の場合と同じく、噴流の衝突の影響は噴流の上流へ向かってさほど溯るものではないことが分かる。

#### 2.4 自由流線の形状

既に3葉の図で自由流線を描いた。ここでは自由流線をより簡潔に表す式を導く。

$0 < \theta < \pi/2$  の範囲の  $\theta$  については、 $\cos \theta > 0$ 、 $\sin \theta < 0$  であるから  $Q$  を小さい方から1に近づける極限では (A.10a), (A.10b) 両式の arctangent が  $\pi/2$  になる。よって

$$X = (1/2 \pi) \log \{(1 - \cos \theta)/(1 + \cos \theta)\} - 1/2 \quad (2.6a)$$

$$Y = (1/2 \pi) \log \{(1 + \sin \theta)/(1 - \sin \theta)\} - 1/2 \quad (2.6b)$$

つぎつぎと  $\theta$  を与えて  $X$  と  $Y$  を計算し、自由流線の形状を決めることができる。他の範囲の  $\theta$  については、対称性があるので計算を省略した。

また、(2.6a) 式を  $\cos \theta$  について解くと

$$\cos \theta = -\tanh \{\pi (X + 1/2)\} \quad (2.7a)$$

(2.6b) 式を  $\sin \theta$  について解くと

$$\sin \theta = \tanh \{\pi (Y + 1/2)\} \quad (2.7b)$$

であるから、 $X$  を与えて (2.7a) 式により  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  を計算し (2.6b) 式を使って  $Y$  を求め、あるいは  $Y$  を与えて (2.7b) 式により  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  を計算し (2.6a) 式を使って  $X$  を求め自由流線の形状を決めることもできる。自由流線の  $(X, Y)$  座標を表 2.2 に示す。点  $(a, b)$  が自由流線の上であれば、 $a$  と  $b$  を入れ替えた点  $(b, a)$  も自由流線の上であり、自由流線は直線  $y = x$  に関して対称である。

のちほど3節で必要になるので  $dY/dX$  を計算しておく。

$$dY/dX = (dY/d\theta)/(dX/d\theta) = \tan \theta \quad (2.8)$$

#### 2.5 流れ場の要約

以上3枚の図から分かったことを要約する。静圧は自由流線の外縁で周囲圧力に等しく  $z$  面の原点で濺み点圧力になるように流体内部に向かって高くなっている。流体粒子は流体内部からの圧力を受けて外向きに曲がるように流れ、自由流線と内部の等速度線及び流線が形成される。

円筒状の3次元噴流が衝突する場合には、流れが衝突点から平板状に広がり、衝突点からの距離が増すにつれて厚みが速やかに減少<sup>9)</sup>し液体の膜が形成されることが知られ

表 2.2 自由流線の形状

X	Y	$\theta$	dY/dX
-1.4	-0.537709	-0.118191	-0.118745
-1.38	-0.540161	-0.125836	-0.126505
-1.36	-0.542773	-0.133973	-0.13478
-1.35	-0.544142	-0.138235	-0.139122
-1.34	-0.545556	-0.142632	-0.143607
-1.32	-0.548521	-0.151847	-0.153025
-1.3	-0.551681	-0.161652	-0.163075
-1.28	-0.555049	-0.172085	-0.173804
-1.26	-0.558638	-0.183184	-0.185261
-1.25	-0.560521	-0.188996	-0.191279
-1.24	-0.562464	-0.19499	-0.197499
-1.22	-0.566544	-0.207547	-0.210579
-1.2	-0.570894	-0.2209	-0.224564
-1.18	-0.575533	-0.235097	-0.239526
-1.16	-0.580482	-0.250189	-0.255543
-1.15	-0.583079	-0.258087	-0.263974
-1.14	-0.585762	-0.266228	-0.272701
-1.12	-0.591398	-0.283269	-0.291097
-1.1	-0.597415	-0.30137	-0.310838
-1.08	-0.603841	-0.32059	-0.332044
-1.06	-0.610707	-0.340991	-0.354852
-1.05	-0.614316	-0.351654	-0.366904
-1.04	-0.618047	-0.362636	-0.379415
-1.02	-0.625897	-0.38559	-0.40591
-1	-0.634298	-0.409921	-0.434537
-0.98	-0.643294	-0.435694	-0.465531
-0.96	-0.652936	-0.462979	-0.499164
-0.95	-0.658017	-0.477208	-0.517067
-0.94	-0.66328	-0.49184	-0.535754
-0.92	-0.674389	-0.522345	-0.575679
-0.9	-0.686333	-0.554556	-0.619391
-0.88	-0.699193	-0.588534	-0.667435
-0.86	-0.713063	-0.624335	-0.720474
-0.85	-0.72041	-0.642934	-0.749115
-0.84	-0.728051	-0.662007	-0.779326
-0.82	-0.744282	-0.701593	-0.845015
-0.8	-0.761906	-0.743124	-0.918834
-0.78	-0.781101	-0.786621	-1.00245
-0.76	-0.802083	-0.83209	-1.09803
-0.75	-0.813326	-0.855562	-1.15118

ている。これにひきかえ2次元噴流では衝突後も流れの厚みが保たれる。

噴流が衝突する直前までの流れ場を記述するという点では簡潔で分かりやすく、非粘性かつ非圧縮性の流体が運動する状況を表現するという意味で流体力学的に疑いを差し挟む余地がない。さらに複素ポテンシャル  $w(z)$  が記述され、複素面 ( $z$  面) が複素速度  $dw/dz$  と数式により関係づけられているので厳密な計算を容易に行なうことができる。したがって、噴流の衝突について数値解法の精度を調べる目的には適している。

2.6 数値解法へのはしわたし

図 2.2 は x 軸に関して左右対称であり、y 軸に関して上下対称である。この流れ場を数値的に解くには、例えば第 3 象限を解けば十分である。図 2.5 は流れの速度変化が緩慢な部分を省略し、図 2.2 の第 3 象限の  $-1.4 \leq X \leq 0$  ,  $-1.4 \leq Y \leq 0$  の部分を拡大して描いたものである。

図 2.5 で左下側の線 QRS が自由流線である。自由流線

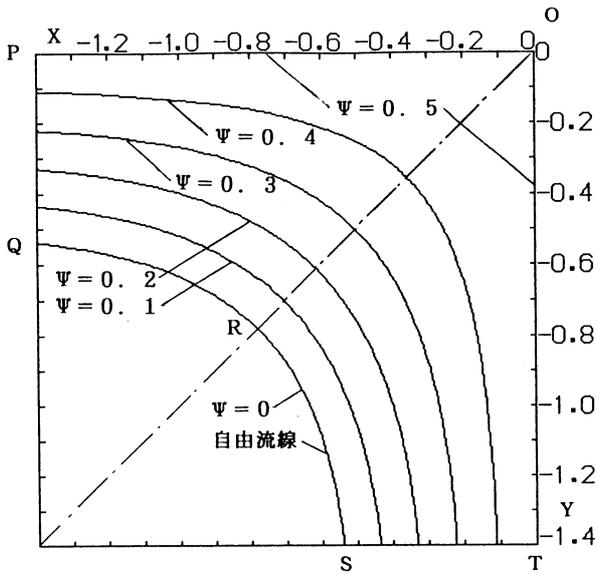


図 2.5 拡大した流線図

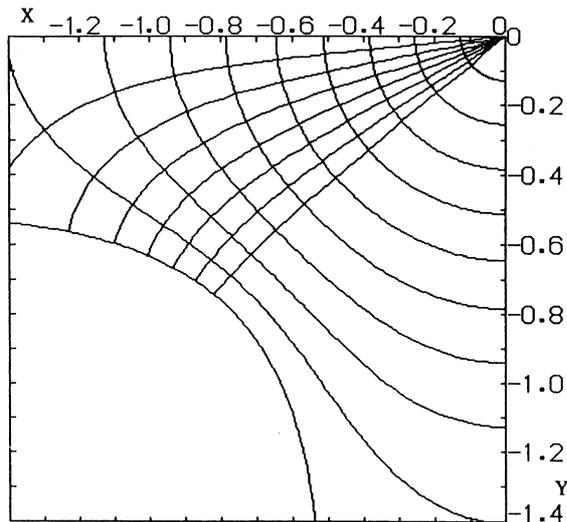


図 2.6 - Q 図  
放射状の曲線は上から  
= -0.1, 0.2, ..., 0.7  
同心の曲線は原点側から外へ向かって  
Q = 0.1, 0.2, ..., 1

に加えて  $\theta = 0.1$  から  $0.5$  まで  $0.1$  刻みに選んだ流線を書き込んである。流れは  $X = -1.4$  の断面 P Q で左から流入し  $90$  度方向を変えて  $Y = -1.4$  の断面 S T で下へ流出する。O P Q R S T O とたどって囲まれる領域の流れ関数を数値的に解くことを考える。この領域で流れ関数は直線  $y = x$  に関して対称であるから O P Q R O とたどって囲まれる左側の領域を解くことができれば、結果を直線  $Y = X$  に関して対称移動して右下領域 O R S T O での流れ関数も決定できる。

数値解法では X および Y を等しい間隔 H で区切った格子を使う。境界値を定めるために、必要な格子点で解析解をあらかじめ求め表 2.3 に記す。所望の格子点で解析解を求める方法を付録 B に述べる。

図 2.6 に または Q をそれぞれ一定に保つときに得られる曲線を示す。原点から放射状に引かれた 7 本の曲線は  $\theta$  を  $-0.1$  から  $-0.7$  まで  $0.1$  刻みに選んで、Q を  $0$  から  $1$  まで連続的に変えるときに得られる。他方、同心の 10 本の曲線は Q を  $0.1$  から  $1$  まで  $0.1$  刻みに選んで、 $\theta$  を  $0$  から  $\pi/2$  まで連続的に変えて得られる。

表 2.3 格子点の解析解

X	Y	$\Psi$	$\theta$	Q
-1.4	-0.52	0.0175305	-0.117259	0.9936153
	-0.5	0.0371978	-0.115825	0.986616
	-0.48	0.0567319	-0.114005	0.979852
	-0.46	0.0761399	-0.111822	0.973332
	-0.45	0.0857972	-0.110598	0.970167
	-0.44	0.0954246	-0.109291	0.967066
	-0.42	0.114593	-0.106435	0.961059
	-0.4	0.133651	-0.103269	0.955318
	-0.38	0.152605	-0.099817	0.949844
	-0.36	0.171458	-0.09609	0.944644
	-0.35	0.180849	-0.09413	0.942147
	-0.34	0.190217	-0.092107	0.93972
	-0.32	0.208889	-0.0878865	0.935072
	-0.3	0.227478	-0.083444	0.930702
	-0.28	0.245989	-0.0787922	0.926614
	-0.26	0.264429	-0.0739496	0.922806
	-0.25	0.273624	-0.0714605	0.921008
	-0.24	0.282802	-0.0689295	0.91928
	-0.22	0.301115	-0.063746	0.916037
	-0.2	0.319372	-0.0584156	0.913075
	-0.18	0.337577	-0.0529512	0.910396
	-0.16	0.355738	-0.047368	0.907997
	-0.15	0.364802	-0.044535	0.906905
	-0.14	0.373858	-0.0416769	0.905884
	-0.12	0.391944	-0.035894	0.904051
	-0.1	0.409998	-0.030032	0.902501
	-0.08	0.428029	-0.02410455	0.9012315
	-0.06	0.446039	-0.0181241	0.900246
	-0.05	0.455038	-0.0151185	0.899858
	-0.04	0.464034	-0.0121046	0.899541
	-0.02	0.48202	-0.00605886	0.899118

### 3. 数値解

第2節で扱ったのと同じ問題の数値解を解析解と比較し、数値解の精度を高める目的で3つの観点

a. 境界線の直近内側の格子点で  $Q$  の値を求める補間...

3.1 (5)

b. 格子線と境界線の交点で  $\partial Q / \partial Y$  を求める微分...

3.1 項 (8)

c. 格子間隔の稠密化

から検討を行い、それぞれの効果と計算量を調べた。

#### 3.1 数値解法の手順

##### (1) 基礎方程式

流れ関数  $Q$  をもちいると、流速の  $x, y$  成分はつぎのように書き表せる。

$$u = \partial Q / \partial y, \quad v = -\partial Q / \partial x \quad (3.1)$$

連続の条件

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad (3.2)$$

は恒等的に満たされている。このとき、渦無し条件はラプラス方程式

$$\partial^2 Q / \partial x^2 + \partial^2 Q / \partial y^2 = 0 \quad (3.3a)$$

で書き表され、これが基礎方程式である。無次元表示すると

$$\partial^2 Q / \partial X^2 + \partial^2 Q / \partial Y^2 = 0 \quad (3.3b)$$

##### (2) 問題を扱う範囲

第2節では問題を  $-2.4 \leq X \leq 2.4$  かつ  $-2.4 \leq Y \leq 2.4$

2.4 の領域で扱った。ここでは、図 2.2 に示されている流れの対称性を考慮に入れ、流れの変化が顕著な一部分 ( $-1.4 \leq X \leq 0$  かつ  $-1.4 \leq Y \leq 0$ ) だけを扱う。流れ場は直線  $y = -x$  に関して対称であるから、実際に計算するのは図 2.5 および図 3.1 に示した領域である。

##### (3) 境界条件

i)  $Y = 0$  かつ  $X = 0$  で  $Q = 0.5$  (3.4a)

ii)  $X = 0$  かつ  $Y = 0$  で  $Q = 0.5$  (3.4b)

iii)  $X = -1.4$  で格子点の  $Q$  は表 2.3 に示した値とする。

iv)  $Y = y/b = -1.4$  で格子点の  $Q$  は直線  $y = x$  に関する対称性を考慮して決める。

v) 解析解として得られている自由流線を境界線とし、この曲線の上で境界条件

$$Q = 0 \quad (3.5)$$

を定める。以下、「境界線」という言葉を「自由流線」の代わりに使う。解析解として得られ図 2.5 に示されている自由流線の  $Q = R$  部分の形状を表わす数値を表 2.2 に記載してある。同図の  $S = R$  部分は直線  $Y = X$  に関して  $Q = R$  部分を対称に移動すれば得られる。

自由流線の上で  $Q = 1$  であるから、境界線の上で得られる無次元速度  $Q$  の数値解の精度を評価できる。

##### (4) ヤコビ法<sup>12)</sup>

$X - Y$  面で等間隔に設けた格子点でラプラス方程式を差分近似しヤコビ法で解く。格子間隔は  $X$  方向も  $Y$  方向も等しく  $H$  とする。

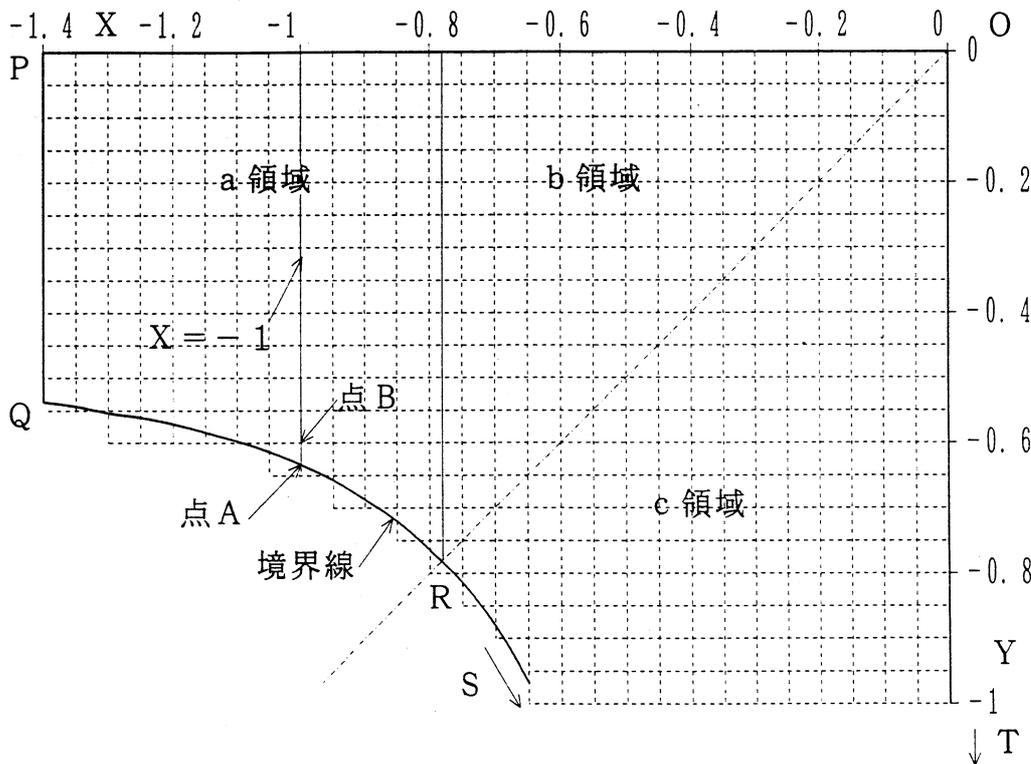


図 3.1 格子点と境界線

$$\psi_{i,j}^{(v+1)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{i+1,j}^{(v)} + \psi_{i-1,j}^{(v)} \\ + \psi_{i,j+1}^{(v)} + \psi_{i,j-1}^{(v)} \end{array} \right\} / 4 \quad (3.6)$$

を適切な初期値から始めて収束するまで計算する。

(5)境界線の直近内側の格子点での  $\psi$  の値

上記(3) v)で述べた境界線は通常、格子点と重ならない。また、境界線の直近内側の格子点での  $\psi$  の値は(3.6)式では更新されない。そこでより内側のいくつかの格子点で計算された  $\psi$  の値および境界線上の  $\psi = 0$  を使って、境界線の直近内側(流体のある部分)の格子点での  $\psi$  の値を補間した。すなわち、付録Cの図C.1に示した点Bで  $\psi$  の値を求める際に点C, D, E, ...で計算された  $\psi$  の値および境界線上の点Aで  $\psi = 0$  であることを使って補間を行う。

(6)初期値の設定

初期値の設定は流体が存在する部分を3つの領域に分けて行った。図3.1に示したように

- a 領域: R を通る Y 軸に平行な直線より左側
- b 領域: R を通る Y 軸に平行な直線より右側で直線 Y = X より上側
- c 領域: 直線 Y = X より下側である。

a 領域では、Y 軸に平行な格子線に沿って、Y = 0 で  $\psi = 0.5$ 、境界線と格子線の交点で  $\psi = 0$  となり、境界線からの距離に比例するように  $\psi$  の値を定めた。

b 領域での  $\psi$  の初期値の定め方を述べるに先立って、格子線の番号を決めなければならない。Y 軸に平行な格子線の番号を Y 軸を 0 番として右から左へ数えて k 番とする。b 領域の左端の格子線は  $k_m$  番である。X 軸に平行な格子線番号を X 軸を 0 番として上から下へ数えて j 番とする。

(3) v)項で述べた境界線を越えない直近の格子点は  $j_0$  番である。格子点(k, j)での  $\psi$  の初期値は

$$\psi_{k,j} = (1.05 - k \cdot j / k_m^2) / 2 \quad (3.7)$$

とした。1.05 は目の子で決めたいけれども格子間隔 H = 1/50 の場合にはよい値であることが結果として分かった。H = 1/20 の場合には、1.2 がよい。

c 領域では直線 Y = X に関する対称性を考慮し、a および b 領域の格子点で求められた  $\psi$  の値を移し替えるだけである。

(7)計算の実行

以上の手順により計算領域を覆い尽くす  $\psi$  の値が全て与えられたことになり、(3.6)式を解くことができる。

(8)境界線に沿う流速

が収束すると X = 一定の線の上にある格子点で得られた  $\psi$  を使って格子線と境界線の交点での速度の x 方向成分 u を推算する。(7)項を完了すると、付録Dの図D.1に示したB, C, D, ...点で  $\psi$  の値が知られる。A 点では  $\psi = 0$  である。他方、 $u/U = \partial \psi / \partial Y$  であるから得られた  $\psi$  の値を数値微分することによって u/U を求めることができる。

$\partial \psi / \partial Y$  を求める式を付録Dに示した。何個の点を使うかによって結果が異なり、使う点の数が増すにつれて式は繁雑になる。u/U が分ると境界線に沿う速度の大きさ Q は

$$Q = u \{1 + (dY/dX)^2\}^{1/2} / U \quad (3.8)$$

により得られる。dY/dX は表 2.2 に記載してある。

3.2 数値解の一例と解析解の比較

まず、問題の所在を示すために数値解の一例を解析解と比較し図3.2に示した。この図の縦軸はY座標で、横軸は点(-1, Y)で計算した  $\psi$  の値である。数値解は3.1項にのべた方針にそって、3.1(1)項から3.7(7)項までを実行して得たものである。3.1(4)項の格子間隔は 1/20 とした。3.1(5)項にのべた境界線の直近内側の格子点での  $\psi$  の値は

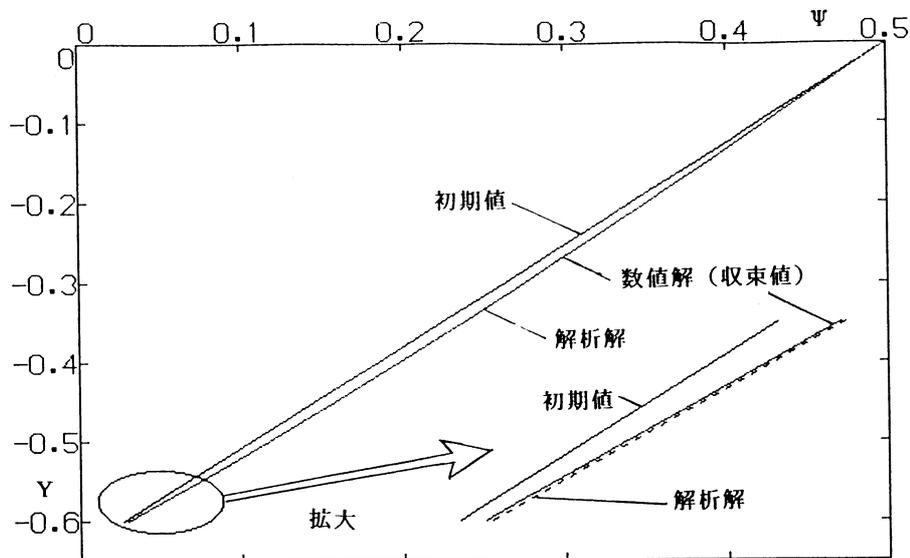


図 3.2 X = -1 での  $\psi$  : 解析解と数値解の一例

2点を使うできるだけ簡単な方法で定めた。

700回の繰り返し計算により数値解が有効数字6桁まで収束した。この数値解は図3.1の直線 $X = -1$ の上にある格子点で得られた精度の低い解である。他方、解析解は付録Bに述べた方法で計算した正確なものである。この図から分るとおり数値解の精度を図示するのに、数値解そのものでは表示しにくい。以下の検討では誤差(数値解 - 解析解)を使う。

直線で表される初期値に対して、収束解はわずかに下に凸の曲線になっている。図の上で収束解は解析解(点線と重なって区別がつかない。差異が識別できるようにだ円で囲んだ部分を5倍に拡大して右に示した。Y座標の絶対値が増す、つまり図の下へゆくほど差異は増す。Y = -0.6で解析解が0.0310158であるのに対して数値解は0.0301674へ収束する。の誤差は0.0008程度である。表3.1で例えばX座標が-1の箇所の解析解と補間に使う点の数2の数値解がこれに該当する。

次に、このを使って3.1(8)項に沿い境界線の上の流速を計算した。 $\partial\psi/\partial Y$ は2点を使うできるだけ簡単な方法で計算した。ただし、3個以上の点を使って $\partial\psi/\partial Y$ を計算しても精度の低いを用いる限りよい結果は得られず、むしろ簡単なものを使うほうが僅かながら精度の高い結果を得る。

図3.3に境界線の上でXの値を指定したときに定まる位置で流速を計算した結果を示す。横軸にXの値をとり、縦軸に無次元流速Qをとった。解析解は $Q = 1$ である。Xの値によっては数値解のQに4%の誤差が生じていることが分る。よって、Qを満足すべき精度で求めるには、の数値解を十分に高い精度で求めておく必要がある。を高い精度で計算できれば、引き続いて $\partial\psi/\partial Y$ を高い精度で計算することが課題となる。

### 3.3 の精度と精度向上に要する計算量

図C.1に示した境界線の直近内側の格子点(印)での値を補間によって求める。このときに印の点のの値を使う。

格子点C, D, E...は上下左右を格子点で囲まれているからヤコビ法で反復計算を行うたびにの値が更新され、やがて収束解が得られる。しかし、B点は下側(境界線の側)に格子点がないために(3.6)式を適用できずの値が更新されない。また、A点は直線DBと境界線の交点で、流体の端にあるから $= 0$ と設定されている。そこで、A, C, D, E...点のの値を使ってB点のの値を補間することによりB点のの値を更新する。ここでは考え方を述べるにとどめ、補間式の導き方は付録Cに記した。

図3.1に示した間隔 $H = 1/20$ の格子を使って問題を解く。X = -1.35からX = -0.8まで $1/20$ 刻みにBに該当

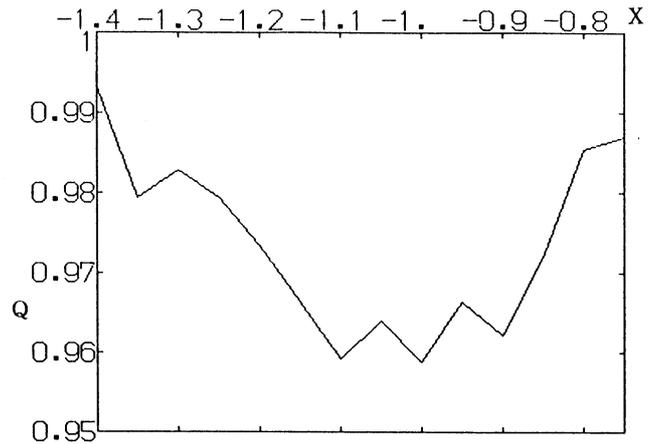


図3.3 自由流線に沿う流速：数値解の一例

する境界線の直近内側の格子点での値を求める。このとき補間に用いる点A, C, D, E, ...の数を2点から1点ずつ増し、の値がどのように変わるかを表3.1に示した。補間に用いる点の数とはかかわりなくいずれの場合も700回の繰り返し計算での数値解が有効数字6桁まで収束した。

さらに誤差の絶対値 = |数値解 - 解析解|を図3.4aに示した。横軸にXの値をとり、縦軸に誤差をとった。点の数が2の結果を点線で結び、点の数が7の結果を実線で結んである。点の数が2(印)から4(印)まで増す間は誤差が順調に減少し1.5桁程度精度が向上する。全般的には7点を使うと最も高い精度が得られる。しかし点の数が5(印)から7(x印)の間の誤差の減少は僅かである。Xの値によっては点の数が少ないときに誤差が少ないという逆転も見られる。点の数をさらに増やしてもさほどの精度向上は期待できない格子間隔 $H = 1/20$ では $10^{-5}$ 程度の誤差が生じることは避けられない。

の精度はXの値によってもかなり変わる。例えばX = -1.3, -1.05, -0.95では精度が向上する傾向が見られる。図3.1を子細に眺めると、これらのXで点A(境界線上の点)と点B(直近の格子点)との間の距離が短いことが分かる。

の精度を高めるもう1つの方法は格子間隔を縮めるために多数の格子点を使う方法である。H = 1/50の場合を調べた。3000回の繰り返し計算で数値解が有効数字6桁まで収束した。誤差の絶対値 = |数値解 - 解析解|を図3.4bに示した。この場合も点の数が2(印)から4(印)まで増す間は誤差が順調に減少し2桁程度精度が向上する。全般的には7点を使うと最も高い精度が得られる。しかし、このときにも点の数が5(印)から7(x印)の間の誤差の減少は僅かである。H = 1/20の場合と比べると誤差が1桁程度減少し、 $10^{-6}$ 程度まで減少した。

表3.2に収束までに必要な計算量を比較した。ヤコビ

表 3.1 境界線直近内側の  $\Psi$  とその精度

X 座標	解析解	補間に使う点の数					
		2	3	4	5	6	7
		上段は境界線直近内側の $\Psi$ の数値解					
		下段は数値解の誤差 (数値解 - 解析解)					
-1.35	0.0433322	0.0428171 -.0005151	0.0432813 -.0000509	0.0433281 -.0000041	0.04333 -.0000022	0.0433301 -.0000021	0.0433299 -.0000023
-1.3	0.00165919	0.00163062 -.00002857	0.0016553 -.00000389	0.00165804 -.00000115	0.0016582 -.00000099	0.00165822 -.00000097	0.00165821 -.00000098
-1.25	0.0103027	0.0101212 -.0001815	0.010282 -.0000207	0.0103003 -.0000024	0.0103018 -.0000009	0.010302 -.0000007	0.010302 -.0000007
-1.2	0.0202556	0.0198468 -.0004088	0.0202013 -.0000543	0.0202452 -.0000104	0.02025 -.0000056	0.0202509 -.0000047	0.0202511 -.0000045
-1.15	0.0316274	0.0309112 -.0007162	0.0315237 -.0001037	0.0316049 -.0000225	0.0316154 -.0000120	0.0316177 -.0000097	0.0316182 -.0000092
-1.1	0.0445002	0.0434318 -.0010684	0.0443385 -.0001617	0.0444629 -.0000373	0.0444802 -.0000200	0.0444842 -.0000160	0.0444853 -.0000149
-1.05	0.0133618	0.0129573 -.0004045	0.0132957 -.0000661	0.0133459 -.0000159	0.0133537 -.0000081	0.0133556 -.0000062	0.0133562 -.0000056
-1	0.0310158	0.0301674 -.0008484	0.0308873 -.0001285	0.0309862 -.0000296	0.0310013 -.0000145	0.031005 -.0000108	0.0310061 -.0000097
-0.95	0.00709738	0.0068851 -.00021228	0.00706702 -.00003036	0.00709171 -.00000567	0.00709542 -.00000196	0.00709632 -.0000106	0.00709656 -.0000082
-0.9	0.0304867	0.0297404 -.0007463	0.0304048 -.0000819	0.0304809 -.0000058	0.0304894 +.0000027	0.0304908 +.0000041	0.030491 +.0000043
-0.85	0.0162459	0.0158941 -.0003518	0.0162283 -.0000176	0.0162576 +.0000117	0.0162578 +.0000119	0.016257 +.0000111	0.0162564 +.0000105
-0.8	0.00875645	0.00865479 -.00010166	0.00877525 +.0000188	0.00877379 +.00001734	0.00876916 +.00001271	0.00876719 +.00001074	0.00876636 +.00000991

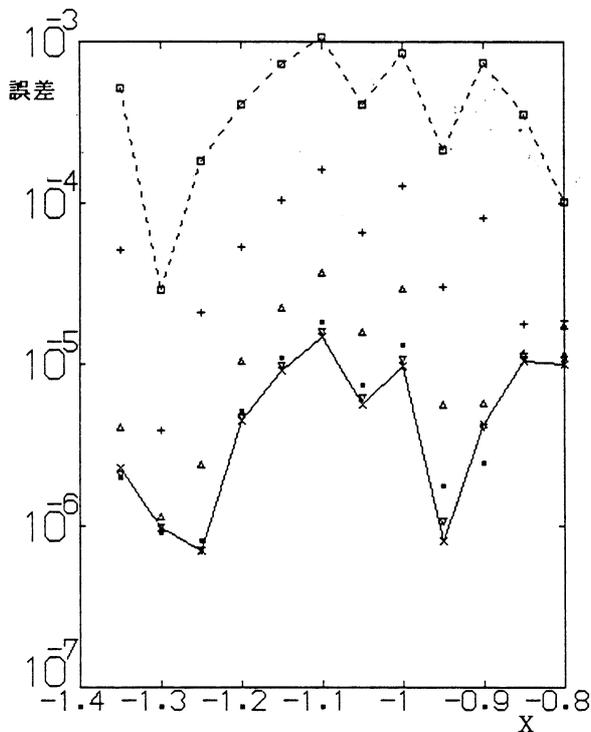


図 3.4a の誤差 (格子間隔 1/20)  
 補間に使う 2点 + 3点 4点  
 点数 5点 6点 x 7点

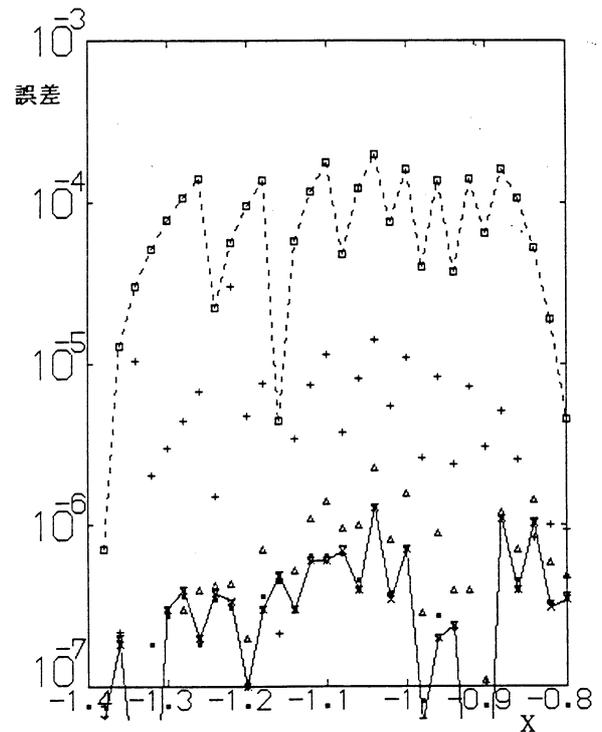


図 3.4b の誤差 (格子間隔 1/50)  
 補間に使う 2点 + 3点 4点  
 点数 5点 6点 x 7点

表 3.2  $\Psi$  の収束に要する計算時間の比較

補間に使う点の数	格子間隔	
	$H = 1/20$	$H = 1/50$
2	1. 00	25. 2
3	1. 01	25. 6
4	1. 02	25. 5
5	1. 03	25. 7
6	1. 05	26. 1
7	1. 07	26. 8

法を用いるとき格子間隔  $H$  を  $1/20$  から  $1/50$  に稠密化すると計算量は約 25 倍に増加する。この内訳は 1 回の繰り返しを行うのに必要な計算量が格子点の数に応じて約 6 倍に増加し、収束に必要な繰り返し回数が 700 回から 3000 回に増加するためである。約 25 倍の計算量を投入すると計算精度が 1 桁向上する。

格子間隔を一定に保つ場合には、B 点の  $Q$  の精度は  $Q$  の値を求めるときに使う点の数に支配される。使う点の数が増すにつれて補間式が複雑になり計算量が若干増加するけれども、精度向上に大いに寄与する。点の数を 2 から 7 に増すと計算量が 7% 増し、精度は 2 桁近く向上する。

3.4 境界線の上の流速

$u/U = \partial\Psi/\partial Y$  であるから  $Y$  を数値微分することによって境界線の上で速度の  $X$  方向成分を求めることができる。

図 D.1 (付録 D 参照) に記した A 点では  $\partial\Psi/\partial Y = 0$  であり、点 B, C, D, E, ... などでは  $Q$  の値が計算されている。これらの値を使って数値微分を行い、点 A で  $\partial^2\Psi/\partial Y^2$  を計算する方法を付録 D に述べた。

(3.8) 式により境界線に沿う速度の大きさ  $Q$  を求めた。境界線の勾配  $dY/dX$  は表 2.2 に記載の値を使った。数値微分に用いる点 A, B, C, ... の数を 2 点から 1 点ずつ増し  $Q$  の値がどのように変わるかを調べた。点 A で  $\partial\Psi/\partial Y$  を計算するために用いる点の数 (図 D.1 参照) を、B 点の  $Q$  の値を補間するために用いる点の数 (図 C.1 参照) と等しく選ぶとき  $Q$  の精度がよくなることが分かった。また、数値微分に用いる点として B 点を除外し、点 A, C, D, ... を使う考え方も成り立つ。この方法も試したが  $Q$  の精度にほとんど影響しなかった。

補間と微分に同数の点を使うこととし、図 3.5a に  $H = 1/20$  の場合について点の数を 2 から 6 まで変える時に  $Q$  の精度が向上する様子を示した。点の数が 2 (印) から 4 (印) まで増す間は誤差が順調に減少し 1.5 桁程度精度が向上する。全般的には 7 点を使うと最も高い精度が得られる。しかし点の数が 5 (印) から 7 (×印) の間の誤差の減少は僅かである。X の値によっては、点の数が少ないときに誤差が少ないという逆転も見られる。点の数をさらに増やしてもさほどの精度向上は期待できない。これらの知見は前項でのべた  $Q$  の精度に関する知見と全く同じである。これは  $Q$  の精度が  $Q$  の精度に著しく依存しているから当然

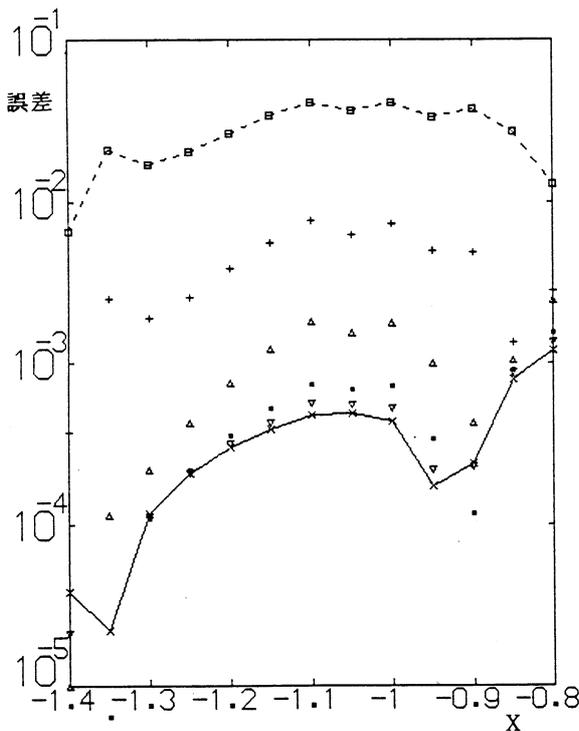


図 3.5a Q の誤差 (格子間隔 1/20)  
 微分を使う 2点 + 3点 4点  
 点数 5点 6点 × 7点

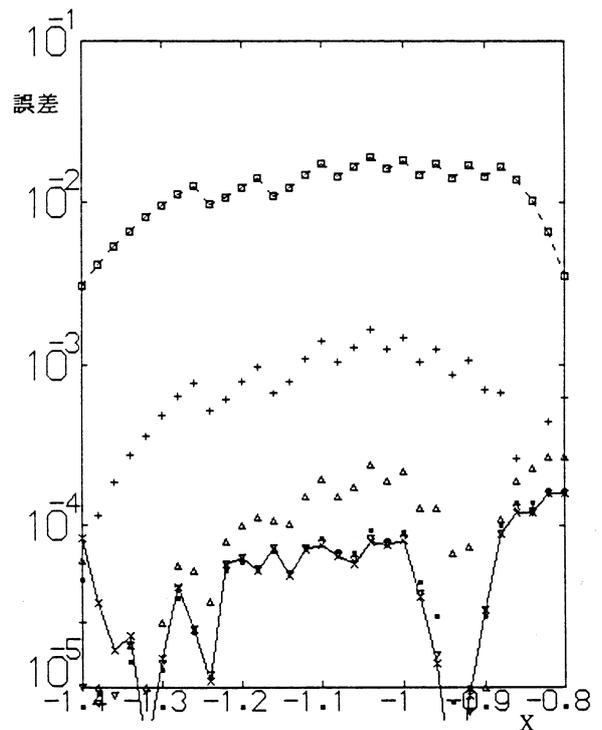


図 3.5b Q の誤差 (格子間隔 1/50)  
 微分を使う 2点 + 3点 4点  
 点数 5点 6点 × 7点

であろう。

図 3.4a で の誤差が  $10^{-5}$  程度 (×印を結ぶ実線) であったのに対して、図 3.5a で Q の誤差は  $10^{-5} \sim 10^{-3}$  の範囲 (×印を結ぶ実線) に渡る。Q の精度が の精度より 1 ~ 2 桁低下する原因は主に を数値微分することにあると考えられる。図 3.5a を図 3.4a と詳しく見比べると、Q の誤差と の誤差の現れ方が個々の X 座標ごとに違うことが分かる。

図 3.5a では X の値が増して  $-0.8$  へ近づくとつれて Q の精度が低下する傾向がみられる。しかし、これは一般的なことではないようである。

図 3.5b は  $H = 1/50$  の場合で、Q の誤差は  $10^{-4}$  を若干上回る程度まで減少した。  $H = 1/20$  の場合の図 3.5a と比べると誤差が 1 桁弱減少した。点の数を増すにつれて誤差が減る傾向は格子間隔が小さい方が顕著である。X の値が増して  $-0.8$  へ近づいても Q の精度が低下するとは言えない。

数値微分を行う部分は反復計算ではなく 1 回きりの計算だから、格子間隔を細かくとつても複雑なアルゴリズムを使つても計算量の増加はほとんど問題にならない。

### 3.5 パラメタを使って設定された境界線

これまでは解析解で得られた自由流線をそのまま利用して境界線を設定した。解析解が得られない問題では自由流線を求めることも問題の一部である。本項ではパラメタを使って境界線を設定し、既に解析解が知られている自由流線にできるだけ近づけることを試みる。つづいて設定された境界線に沿う流速を計算する。

#### (1) 境界線の設定

境界線を設定するためにパラメタ  $a_3, a_4, \dots, a_{n-1}$ ,  $a_n$  を含む  $n$  次式  $Y_A = f(x)$  を求める。この  $n$  次式は 3 つの条件、

- 点  $(X_0, Y_0)$  を通る
- 点  $(X_0, Y_0)$  で勾配が  $Y_0'$  である
- 直線  $Y = X$  との交点  $(X_R, X_R)$  で勾配が  $dY_A/dX = -1$  である

を満たすようにきめる。

a と b から  $Y_A = f(x)$  の具体的な表現は

$$Y_A - Y_0 = a_n (X - X_0)^n + a_{n-1} (X - X_0)^{n-1} + \dots + a_3 (X - X_0)^3 + a_2 (X - X_0)^2 + Y_0' (X - X_0) \quad (3.9)$$

c から (3.9) 式が点  $(X_R, X_R)$  を通るときに

$$X_R - Y_0 = a_n (X_R - X_0)^n + a_{n-1} (X_R - X_0)^{n-1} + \dots + a_3 (X_R - X_0)^3 + a_2 (X_R - X_0)^2 + Y_0' (X_R - X_0) \quad (3.10)$$

勾配が  $dY_A/dX = -1$  であるために

$$-1 = na_n (X_R - X_0)^{n-1} + (n-1)a_{n-1} (X_R - X_0)^{n-2} + \dots + 3a_3 (X_R - X_0)^2 + 2a_2 (X_R - X_0) + Y_0' \quad (3.11)$$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_3$  を与えると (3.10) 式と (3.11) 式を同時に満足する  $a_2, X_R$  を求めることができる。

$$X_R = \frac{2Y_0 + (1 - Y_0') X_0}{3 - Y_0'} + \frac{\left[ \begin{array}{l} (2-n)a_n (X_R - X_0)^n \\ + (3-n)a_{n-1} (X_R - X_0)^{n-1} + \dots \\ + (2-3)a_3 (X_R - X_0)^3 \end{array} \right]}{3 - Y_0'} \quad (3.12)$$

$X_R$  を (3.11) 式に代入すると

$$a_2 = - \frac{1 + Y_0'}{2(X_R - X_0)} - \frac{\left[ \begin{array}{l} na_n (X_R - X_0)^{n-2} \\ + (n-1)a_{n-1} (X_R - X_0)^{n-3} + \dots \\ + 3a_3 (X_R - X_0) \end{array} \right]}{2} \quad (3.13)$$

$X_R$  を求めるには、(3.12) 式の右辺第 2 項を 0 として得られる  $X_R$  の第 0 近似解を右辺第 2 項に代入して第 1 近似解を得る。以後第  $n$  近似解を右辺第 2 項に代入する操作を繰り返して収束解を得る。 $a_2$  を求めるには収束した  $X_R$  を (3.13) 式に代入する。X に対応する  $Y_A$  を求め境界線を記述するには (3.9) 式を計算する。境界線の勾配は

$$dY_A/dX = na_n (x - X_0)^{n-1} + (n-1)a_{n-1} (x - X_0)^{n-2} + \dots + 3a_3 (x - X_0)^2 + a_2 (x - X_0) + Y_0' \quad (3.14)$$

である。

パラメタ  $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  のうち 1 個だけを 0 でない適切な値に選び他は 0 として設定される境界線が自由流線にどの程度近づくかについて調べ結果を表 3.3 に示した。

表 3.3 の は境界線の Y 座標から自由流線の Y 座標 (表 2.2 参照) を差し引いた値すなわち図 3.6 に示す  $\Delta Y = Y_A - Y$  である。につけた下添字は X 座標の値である。 $a_5$  を  $-0.7605$  とし、他を 0 とするとき  $|\Delta Y|$  は  $0.001185$  以下となり境界線が自由流線に最も近づく。

#### (2) 補正項

境界線を自由流線にさらに近づけるために補正項を導入する。 $\Delta Y = Y - Y_A$  の近似値を補正項とする。通常  $\Delta Y$  は図 3.7 のような曲線である。3 点  $(X_0, 0), (X_1, -\Delta Y_1)$  および  $(X_2, -\Delta Y_2)$  を通りこれらの点で勾配が 0 になるように補正項を設定した。 $X_0 < X < X_1$  においては

表 3.3 境界線と自由流線の偏差  $\delta$

ケース	I	II	III	IV	V	VI
$a_2$	0.06002	-0.18096	-0.25762	-0.29606	-0.31871	-0.25762
$a_3$	-0.8395	0	0	0	0	0
$a_4$	0	-0.6960	0	0	0	0
$a_5$	0	0	-0.7605	0	0	-0.7605
$a_6$	0	0	0	-0.9255	0	0
$a_7$	0	0	0	0	-1.1955	0
補正項	なし	なし	なし	なし	なし	あり
$\delta_{-1.4}$	0	0	0	0	0	0
$\delta_{-1.35}$	0.00054	0.00004	-0.00015	-0.00024	-0.00030	-0.00003
$\delta_{-1.3}$	0.00186	0.00022	-0.00049	-0.00086	-0.00109	-0.00008
$\delta_{-1.25}$	0.00352	0.00058	-0.00085	-0.00167	-0.00217	-0.0001
$\delta_{-1.2}$	0.00512	0.00108	-0.00111	-0.00247	-0.00333	-0.00007
$\delta_{-1.15}$	0.00632	0.00165	-0.00116	-0.00305	-0.00431	0
$\delta_{-1.1}$	0.00682	0.00216	-0.00095	-0.00324	-0.00486	0.00003
$\delta_{-1.05}$	0.00640	0.00243	-0.00051	-0.00292	-0.00477	0.00005
$\delta_{-1}$	0.00497	0.00232	0.00008	-0.00207	-0.00386	0.00007
$\delta_{-0.95}$	0.00253	0.00169	0.00067	-0.00076	-0.00213	0.00009
$\delta_{-0.9}$	-0.00068	0.00051	0.00108	0.00078	-0.00234	0.00007
$\delta_{-0.85}$	-0.00413	-0.00104	0.00119	0.00221	-0.00278	0
$\delta_{-0.8}$	-0.00678	-0.0024	0.00107	0.00319	-0.00475	0.0001

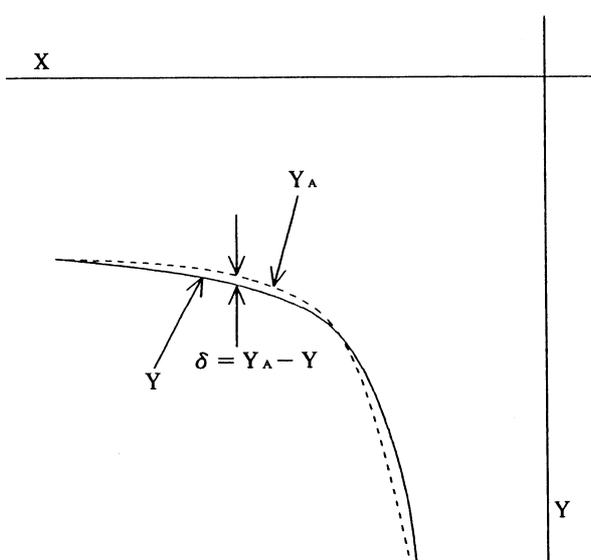


図 3.6 境界線 - - - - と自由流線 ———

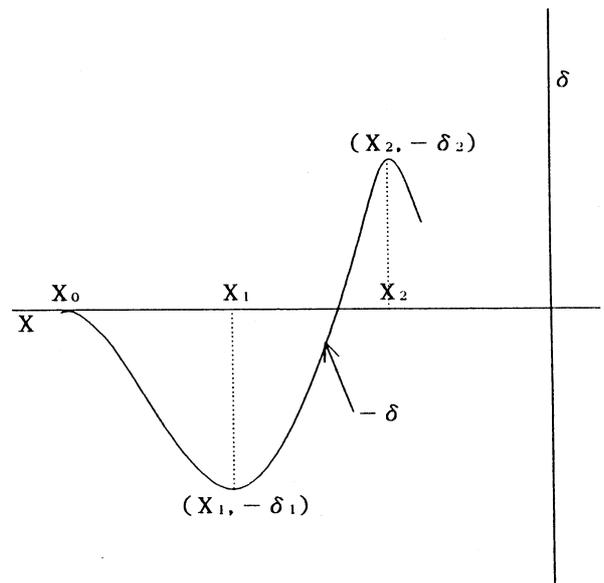


図 3.7 補正項 - の概念図

$$-\delta = a \{X^3/3 - (X_0 + X_1)X^2/2 + X_0X_1X\} + b \quad (3.15)$$

$a$  と  $b$  はつぎのように決まる。

$$a = -\frac{6\delta_1}{(X_0 - X_1)^3}$$

$$b = -\frac{\delta_1(X_0 - 3X_1)X_0^2}{(X_0 - X_1)^3}$$

$$-d\delta/dX = a(X - X_0)(X - X_1) \quad (3.16)$$

$X_1 < X < X_2$  においては

$$-\delta = c \{X^3/3 - (X_1 + X)X^2/2 + X_1X_2X\} + d \quad (3.17)$$

$c$  と  $d$  はつぎのように決まる。

$$c = \frac{6(\delta_1 - \delta_2)}{(X_1 - X_2)^3}$$

$$d = -\frac{\delta_1(3X_1 - X_2)X_2^2 + \delta_2(X_1 - 3X_2)X_1^2}{(X_1 - X_2)^3}$$

$$-d\delta/dX = c(X - X_1)(X - X_2) \quad (3.18)$$

補正項を加えると | | は1桁小さく 0.00010 以下となり境界線が自由流線にさらに近づく。

(3)境界線に沿う流速

パラメータと補正項を使って境界線を記述し境界線に沿う無次元流速Qを求め解析解Q = 1 との誤差を図 3.8 に示した。印で示した  $a_3 = -0.8395$  では4%を超える誤差が生じている。これに対して、印で示した  $a_5 = -0.7605$  では誤差が1%以下に収まった。さらに修正項を付加した×印では誤差0.15%以下に減少した。これは図 3.5a の×印にも匹敵する精度である。境界線を適切に設定できればその上で無次元流速Qをほぼ1にすることができ、自由流線を近似すると考えられる。

3.6 数値解のまとめ

解析解の知られている噴流衝突の問題を数値的に解いて、解の精度と必要な計算量について調べた。補間と微分に使うアルゴリズムをラグランジュの補間公式から導いて、使う点の数と精度向上への寄与について系統的に調べた。格子間隔の選択についても調べた。

数値解の精度を高める目的で3つの観点から行った検討の結果を表 3.4 に整理した。格子間隔を細かくとってを求める反復計算に多大の計算量を投入する場合には、それに見合った精度の高い補間および微分のアルゴリズムを適切に組み合わせて使うことが重要である。

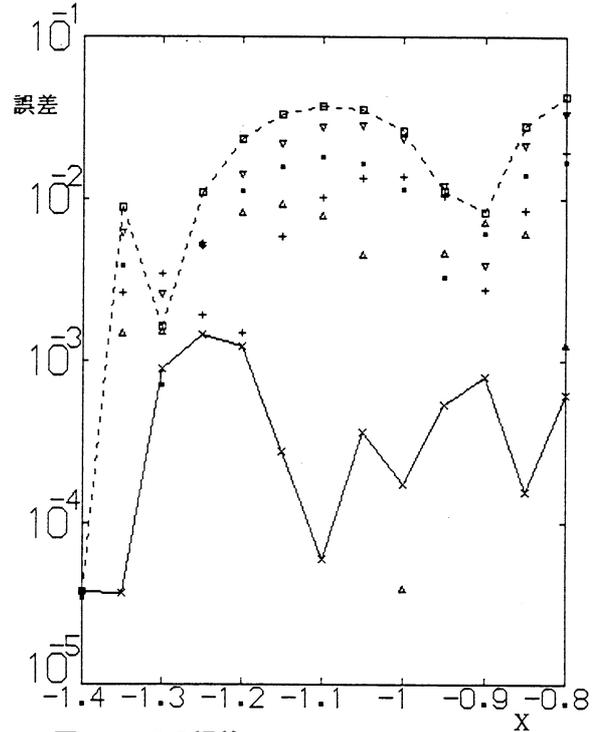


図 3.8 Qの誤差 (パラメータと補正項で設定し境界線)

ケース I	$a_3 = -0.8395$	補正項なし
ケース II	$a_4 = -0.696$	補正項なし
ケース III	$a_5 = -0.7605$	補正項なし
ケース IV	$a_6 = -0.9255$	補正項なし
ケース V	$a_7 = -1.1955$	補正項なし
ケース VI	$a_5 = -0.7605$	補正項あり

表 3.4 数値解の精度と必要な計算量

検討項目	検討結果と知見
a. 境界線の直近内側の格子点での $\Psi$ の値を求める補間 … 3. 1 (5)	☆点の数を2から4まで増す間は誤差が順調に減少する。 ☆点の数を5以上に増してもさほどの精度向上はみられない。 ☆点の数の適切な上限は微分との兼ね合いで定めるべきである。 ☆点の数を増しても計算量はさほど増えない。
b. 格子線と境界線の交点での $\partial\Psi/\partial Y$ を求める微分 … 3. 1 (8)	☆格子間隔が小さい時には微分に使う点の数を増やすべきである。 ☆点数を増しても計算量はほとんど増えない。
c. 格子間隔の稠密化	☆精度向上の限界が格子間隔で決まる。 ☆細かい格子を使うと計算量は急に増加する。
d. 3つの検討項目相互の関わり	☆補間と微分は強く関わっている。 ☆微分を行う時に使う点の数を補間で使う点の数と等しくすべきである。 ☆格子間隔を細かくとって、 $\Psi$ を求める反復計算に多大の計算量を投入する場合には、それに見合った精度の高い補間および微分のアルゴリズムを適切に組み合わせて使うことが重要である。

境界線をパラメタ表示し自由流線にできるだけ近づけることを試みた。得られた境界線の上で無次元流速を求め解析解と比較し誤差を検討した。適切なパラメタを選びさらに補正項を付加することにより無次元流速の誤差を0.15%以下にできた。

#### 4. あとがき

噴流衝突を数値解析によって取り扱う予備段階として精度と計算時間について検討した。精度の検討は数値解を解析解と比較することによって行った。この結果以下の知見を得た。

- (1) ヤコビ法において精度を向上させるために稠密な格子間隔を用いると計算時間が急激に増加する。
- (2) 同一の格子間隔を用いても、補間と微分の手順を系統的に高度化することによって2桁程度の精度向上を達成できる。
- (3) 補間と微分の手順を高度化しても計算時間の増加は僅かである。
- (4) 格子間隔を細かくとって多大な計算量を投入するときには、それに見合った高精度を期待できる補間と微分のアルゴリズムを適切に組み合わせて使うことが重要である。
- (5) 二次元噴流が衝突する流れ場の自由流線に沿う流速に関して誤差 0.017%以下を達成した。
- (6) 流体の表面に相当する境界線をパラメタ表示および補正項の追加によって設定し自由流線に近づけた。得られた境界線の上で計算した無次元流速は誤差 0.15%以下にできた。
- (7) ラグランジュの補間公式を拡張した逆補間手法を開発し、任意の格子点で比較の基準になる精密な解析解を3回程度の反復で算出した。

#### 引用文献

- 1) A.M. Sterling and C.A. Sleicher, The Instability of Capillary Jets, J. Fluid Mech., vol. 68, pp. 477-495, 1975.
- 2) C.Weber, Disintegration of Liquid Jets. Z. Agnew. Math. Mech. vol. 11, 1931.
- 3) G.I. Taylor, The dynamics of thin sheets of fluid I. Water bells, Proc. Roy. Soc. A 253 1959, p .289 - p. 295.
- 4) G.I. Taylor, The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheets, Proc. Roy. Soc. A 253 1959, p . 296 - p. 312.
- 5) G.I. Taylor, The dynamics of thin sheets of fluid III. Disintegration of Fluid Sheets, Proc. Roy. Soc. A 253 1959, p. 313 - p. 321.
- 6) G.I. Taylor, Formation of thin flat sheets of water Proc. Roy. Soc. A 259 1960, p. 1 - p. 17.
- 7) N. Dombrowski and P.C. Hooper, A study of the sprays formed by impinging jets in laminar and turbulent flow. Jour. Fluid Mech.Vol. 18, 3 Mar. 1964, p. 392 - p. 400.
- 8) J.C.P. Huang, The break-up of axisymmetric liquid sheet Jour. Fluid Mech.Vol. 43, 2 Aug. 1970, p. 305 - p. 320.
- 9) Y. Shen, C. Mitts and D. Poulikakos, Holographic Investigation of the Effect of Elevated Ambient Temperature on the Atomization Characteristics of Impinging Jet Sprays. Atomization and Sprays Vol. 7, No. 2, 1997.
- 10) M. Arai and M. Saito, Atomization Characteristics of Jet-to-Jet and Spray-to-Spray Impingement Systems Atomization and Sprays Vol. 9, No. 4, 1999.
- 11) L.M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics 5th ed. p. 298 - p. 307, MacMillan, 1968.
- 12) 数値流体力学編集委員会, 非圧縮性流体解析 p. 63, p. 76, 東京大学出版会
- 13) 守屋喜次郎, 空気力学序論, p. 52, p. 57, 培風館
- 14) 山内二郎ほか 電子計算機のための数値計算法 I p. 67, 培風館

付録 A

二次元噴流 図 2.1 参照 が正面衝突する場合の流れ場<sup>11)</sup> について考察する。あえて改めて考察するのは、流れ場を設定するにあたって位置を表す複素面と速度を表す複素面の関係を明確にし、記号の規約を現代風に改め、この流れ場について秩序だった記述を試み、導き出された流れ関数が最初に想定した流れ場に適合していることを確認し、複素ポテンシャルが正則関数であることおよび連続の条件と渦なしの条件が成立していることを確かめるためである。

A.1 複素平面の実軸、虚軸および偏角の設定

解析を進めるに先立って、あいまいさを避けるために以下の3項目を明記しておく。

- I. 実軸は水平にとり、右へ向かって正値が増加するものとする。
- II. 虚軸は垂直にとり、上へ向かって正値が増加するものとする。
- III. 偏角は反対時計回りに測るときに正値が増加するものとする。

A.2 位置を表す複素面 (z 面) の二次元噴流

位置を表す複素面を図 A.1 に示す。実軸に一致させて x 軸、虚軸に一致させて y 軸を設定する。z = x + iy である。互いに等しい一対の噴流の一方が x 軸の左側無限遠方から速度 U、他方が右側無限遠方から速度 -U で原点に向かって流れ、原点付近で衝突する。衝突後 y 軸に沿って上下に流れ、上下の無限遠方での速度が U と -U になる。噴流の厚みは左右および上下の無限遠方で t になると想定する。

x 軸の負の無限遠方に点 A<sub>1</sub>、y 軸の負の無限遠方に点

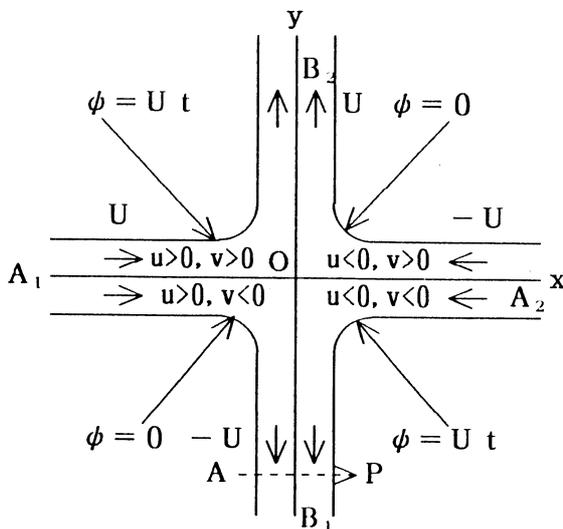


図 A.1 位置を表す複素面(z 面)

B<sub>1</sub>、x 軸の正の無限遠方に点 A<sub>2</sub>、y 軸の正の無限遠方に点 B<sub>2</sub> を配置する。噴流の表面 A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>、B<sub>1</sub>A<sub>2</sub>、A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>、B<sub>2</sub>A<sub>1</sub> はそれぞれ自由流線と呼ばれる。自由流線の表面の静圧は流れの外の周囲圧力と等しい。非粘性流を考えているから総圧損失がなく、自由流線の上の流速の大きさはいたるところで無限遠方の流れの速度の大きさ U に等しい。

現代風の流れ関数の規約<sup>12),13)</sup>

$$u = \partial \phi / \partial y, v = -\partial \phi / \partial x \tag{A.1}$$

を満足するように、自由流線の上で流れ関数の値を定める。経路のうち B<sub>1</sub> 付近で A から P に向かって流れを横切る部分に注目すると、進行方向 A → P に向かって左手から右手へ流れが通過している。この場合流れ関数の規約に従うと φ は A から P へ向かって Ut だけ増加する。なぜなら経路に沿い -U = -∂φ / ∂x を積分すると、

$$\Delta \phi = \int_{-t/2}^{t/2} U dx = Ut \text{ だからである。同様に考えると } B_2$$

でも φ が増加し、A<sub>1</sub> と A<sub>2</sub> では φ が減少する。よって、A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> で流れ関数の値を φ = 0 と設定すると、B<sub>1</sub>A<sub>2</sub> で Ut、A<sub>2</sub> B<sub>2</sub> で 0、B<sub>2</sub>A<sub>1</sub> で Ut と定まる。

A.3 速度を表す複素面 (w 面) での二次元噴流

複素速度<sup>11),13)</sup>

$$w = u - iv = q \exp(-i\theta) \tag{A.2}$$

を表現する複素面をつぎのように定め、第 4 項でシュワルツの式を適用するのに備える。φ = -v と θ = -θ を導入すると

$$w = u + i v = q \exp(i\theta) \tag{A.2a}$$

速度 w を表す複素面 (u - v 面または w 面) を図 A.2 に示

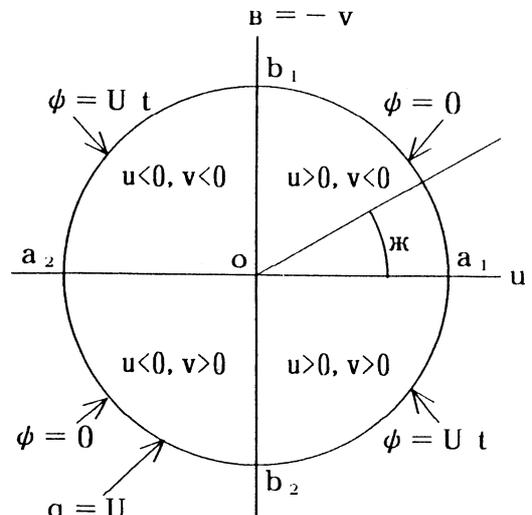


図 A.2 速度を表す複素面(w 面)

す。実軸に一致させてu軸、虚軸に一致させて 軸を設定する。角度 は実軸の正の部分から反時計まわりに測る。速度を表す複素面の第1象限すなわち  $0 < < /2$  では  $u > 0$  かつ  $v < 0$  である。第2、第3、第4象限では順次  $u < 0$  かつ  $v < 0$ 、 $u < 0$  かつ  $v > 0$ 、 $u > 0$  かつ  $v > 0$  である。

速度を表す複素面( 面)の第1象限では  $u > 0$  かつ  $v < 0$  であるから位置を表す複素面(z面)の第3象限に対応する。同様に速度成分の符号に注目すると 面の第2象限はz面の第4象限に、 面の第3象限はz面の第1象限に、 面の第4象限はz面の第2象限に対応する。

流速の大きさqがUに等しいときに流速ベクトルの先端は  $q = U$  の円周上に描かれる。この円周は第2項で述べたz面で記述する噴流の自由表面に相当し、円の内部は流れのある領域に相当する。この円の中心をo、円周とu軸の交点を  $a_1$  とする。 $a_1$  の速度成分は  $(U, 0)$  である。点  $a_1$  から出発し  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$  と増加する円周上の経路に沿って、点  $b_1(0, -U), a_2(-U, 0)$  および  $b_2(0, U)$  を定める。速度面の4つの点  $a_1, b_1, a_2, b_2$  は位置を表す複素面で先に定めた4つの点  $A_1, B_1, A_2, B_2$  とそれぞれ対応する。速度面で  $q = U$  の円周上を  $a_1$  から出発し  $b_1, a_2, b_2, a_1$  とたどる経路はz面では噴流の表面を構成する自由流線に沿って  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_1$  とたどる経路になる。 面の原点oでは速度が0で、激み点であるz面の原点Oに対応する。のちほど第4項で dz を積分するときこの関係を利用する。

第2項で定めた流れ関数 の値を  $q = U$  の円周上にひきうつして図示しておく。円の表面を構成する弧  $a_1 b_1$  上で  $\phi = 0$ 、弧  $b_1 a_2$  上で  $\phi = Ut$ 、弧  $a_2 b_2$  上で  $\phi = 0$ 、弧  $b_2 a_1$  上で  $\phi = Ut$  である。

A.4 シュワルツの式と複素ポテンシャルの提示

原典<sup>11)</sup>でシュワルツの式について『z面の原点を中心とする半径Rの円の内部で正則な関数  $f(z)$  があるとし、かつ  $f(z)$  の実部の値 ( ) が前述の円周上で与えられているとすれば、(A2)式によって虚部の定数を除く関数  $f(z)$  を求めることができる。』と述べ証明の筋道を示している。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) \frac{R \exp(i\theta) + z}{R \exp(i\theta) - z} d\theta \quad (A.3)$$

この式を 面に適用する。 $w(\zeta) = \phi + i\psi$  であるから  $-i w(\zeta) = \psi - i\phi$  である。実部  $\phi$  が円周上で与えられており、 $-i w(\zeta)$  が 面の半径Uの円  $U \exp(i\theta)$  の内部で正則関数であると想定する。

$$-i w(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) \frac{U \exp(i\theta) + v}{U \exp(i\theta) - v} d\theta \quad (A.4)$$

第2項で述べた の値と第3項で述べた流れ関数の値とを関連させて書くと

A1	B1	0	$< \pi/2$	( ) = 0
B1	A2	$\pi/2$	$< \pi$	( ) = Ut
A2	B2	$\pi$	$< 3\pi/2$	( ) = 0
B2	A1	$3\pi/2$	$< 2\pi$	( ) = Ut

( ) の値は定数であるから、(A3)式の ( ) を積分の外へ出すと不定積分は

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \int \frac{U \exp(i\theta) + v}{U \exp(i\theta) - v} d\theta \\ &= \int \left\{ -1 + \frac{2U \exp(i\theta)}{U \exp(i\theta) - v} \right\} d\theta \\ &= -\theta - 2i \log\{U \exp(i\theta) - v\} \\ &= -\theta - 2i \log\{U \exp(i\theta)\} - 2i \log\{1 - v/U \exp(i\theta)\} \\ &= -\theta - 2i \log U - 2i \log\{\exp(i\theta)\} - 2i \log\{1 - v/U \exp(i\theta)\} \\ &= -\theta - 2i \log U + 2\theta - 2i \log\{1 - v/U \exp(i\theta)\} \\ &= -\theta - 2i \log\{1 - v/U \exp(i\theta)\} - 2i \log U \end{aligned}$$

$$F(\zeta) \Big|_{\pi/2}^{\pi} + F(\zeta) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi}$$

$$= \pi - 2i \log(1 + v/U) + 2i \log(1 - v/iU) - 2i \log(1 - v/U) + 2i \log(1 + v/iU)$$

よって  $-i w(v) = Ut / (2\pi) \times \{ \pi - 2i \log(1 + v/U) + 2i \log(1 - v/iU) - 2i \log(1 - v/U) + 2i \log(1 + v/iU) \}$

$$w(v) = i Ut / 2 + (Ut/\pi) \{ \log(1 + v/U) - \log(1 - v/iU) + \log(1 - v/U) - \log(1 + v/iU) \} \quad (A.5)$$

A.5 位置の記述

zを の関数として記述すると、Qと を与えたときに  $X = x/t, Y = y/t$  を求めることができる。

wの実部と虚部がそれぞれ速度ポテンシャルおよび流れ関数であり、zの実部と虚部がxとyであるときには、次のようにして(A.6)を導ける<sup>13)</sup>。

$$\begin{aligned} \partial w / \partial x &= \partial \phi / \partial x + i \partial \psi / \partial x = u - iv = dw/dz \cdot \partial z / \partial x \\ \partial z / \partial x &= 1 \quad \text{だから} \\ \therefore v &= u - iv = dw/dz \quad (A.6) \\ dz &= (1/v) dw = (1/v) (dw/dv) dv \quad (A.7) \end{aligned}$$

(1/v) (dw/dv) に(A.4)式を代入して微分計算を行い、部分分数に展開する。(A.5)式右辺の{ }の中の4つの項をそれぞれ で微分し  $1/v$  を掛けると

$$\begin{aligned} \text{第1項から } & 1/v \cdot d \{ \log(1 + v/U) \} / dv \\ &= 1/v \cdot 1/(U + v) = \{ 1/v - 1/(U + v) \} / U \end{aligned}$$

第2項から  $-1/v \cdot d \{ \log(1 - v/iU) \} / dv$

$$= -i/v \cdot 1/(U+iv) = -i \{ 1/v - i/(U+iv) \} / U$$

第3項から  $1/v \cdot d \{ \log(1 - v/U) \} / dv$

$$= -1/v \cdot 1/(U - v) = - \{ 1/v + 1/(U - v) \} / U$$

第4項から  $-1/v \cdot d \{ 1 + v/iU \} / dv$

$$= i/v \cdot 1/(U - iv) = i \{ 1/v + i/(U - iv) \} / U$$

上記4項をもちいて(A.7)式を書き直すと

$$\begin{aligned} dz &= (1/v) dw = (1/v) (dw/dv) dv \\ &= (Ut/\pi) [ \{ 1/v - 1/(U + v) \} / U - i \{ 1/v - i/(U + iv) \} / U \\ &\quad - \{ 1/v + 1/(U - v) \} / U + i \{ 1/v + i/(U - iv) \} / U ] dv \\ &= (t/\pi) \{ -1/(U + v) - 1/(U + iv) \\ &\quad - 1/(U - v) - 1/(U - iv) \} dv \end{aligned} \quad (A.7a)$$

(A.7a)を  $t$  について積分する。このとき第1項で述べた『速度面の原点  $z = 0$  はよどみ点であるから  $z$  面の原点  $z = 0$  に対応する。』ことを利用する。

$$\begin{aligned} z &= (t/\pi) \{ -\log(U + v) + i \log(U + iv) \\ &\quad + \log(U - v) - i \log(U - iv) \} \end{aligned} \quad (A.8)$$

#### A.6 得られた結果の確認

複素ポテンシャル関数を記述する(A.5)式と複素速度から複素面の位置  $z$  を求める(A.8)式が導かれた。 $\theta$  を  $0$  から  $2\pi$  まで増加させると  $z$  は  $0$  から  $-2\pi$  まで減少する。速度の大きさ  $q$  を  $U$  に近い値に選んで  $\theta$  を  $0$  から  $-2\pi$  まで減少させ、 $X = x/t$ ,  $Y = y/t$  および  $z/t = X + iY$  の変化を調べる。これらの変化の様子が図A.1に対応するものであることを計算により確かめる。

(A.5)式の両辺を  $Ut$  で割り

$$v/U = (q/U) \exp(-i\theta) = Q(\cos\theta - i\sin\theta)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} w/Ut &= i/2 \\ &+ (1/\pi) \{ \log(1 + Q \cos\theta - iQ \sin\theta) \\ &\quad - \log(1 + Q \sin\theta + iQ \cos\theta) \\ &\quad + \log(1 - Q \cos\theta + iQ \sin\theta) \\ &\quad - \log(1 - Q \sin\theta - iQ \cos\theta) \} \end{aligned} \quad (A.5a)$$

(A.5a)式を実部  $\Phi(\theta, Q) = \phi/Ut$  と虚部  $\Psi(\theta, Q) = \psi/Ut$  に整理する。(A.5a)式の  $\{ \}$  中の4つの項をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} \text{第1項} &\log(1 + Q \cos\theta - iQ \sin\theta) \\ &= (1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \cos\theta) + i \arctan \left( \frac{-Q \sin\theta}{1 + Q \cos\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第2項} &-\log(1 + Q \sin\theta + iQ \cos\theta) \\ &= -(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \sin\theta) - i \arctan \left( \frac{Q \cos\theta}{1 + Q \sin\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第3項} &\log(1 - Q \cos\theta + iQ \sin\theta) \\ &= (1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \cos\theta) + i \arctan \left( \frac{Q \sin\theta}{1 - Q \cos\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第4項} &-\log(1 - Q \sin\theta - iQ \cos\theta) \\ &= -(1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \sin\theta) - i \arctan \left( \frac{-Q \cos\theta}{1 - Q \sin\theta} \right) \end{aligned}$$

第1項右辺の実部と第3項右辺の実部から

$$(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \cos\theta) + (1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \cos\theta) = (1/2) \log(1 + Q^4 - 2Q^2 \cos 2\theta)$$

第2項右辺の実部と第4項右辺の実部から

$$-(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \sin\theta) - (1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \sin\theta) = -(1/2) \log(1 + Q^4 + 2Q^2 \cos 2\theta)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, Q) &= (1/2\pi) \log \left( \frac{1 + Q^4 - 2Q^2 \cos 2\theta}{1 + Q^4 + 2Q^2 \cos 2\theta} \right) \end{aligned} \quad (A.9a)$$

第1項右辺の虚部と第3項右辺の虚部から

$$\begin{aligned} &i \arctan \left( \frac{-Q \sin\theta}{1 + Q \cos\theta} \right) + i \arctan \left( \frac{Q \sin\theta}{1 - Q \cos\theta} \right) \\ &= i \arctan \left( \frac{Q^2 \sin 2\theta}{1 - Q^2 \cos 2\theta} \right) \end{aligned}$$

第2項右辺の虚部と第4項右辺の虚部から

$$\begin{aligned} &-i \arctan \left( \frac{Q \cos\theta}{1 + Q \sin\theta} \right) - i \arctan \left( \frac{-Q \cos\theta}{1 - Q \sin\theta} \right) \\ &= -i \arctan \left( \frac{-Q^2 \sin 2\theta}{1 + Q^2 \cos 2\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, Q) &= 1/2 + (1/\pi) \arctan \left( \frac{2Q^2 \sin 2\theta}{1 - Q^4} \right) \end{aligned} \quad (A.9b)$$

が絶対値の小さい負値(  $Q$  が小さい正值)であるとき、 $Q$  を小さい方から  $1$  へ近づけると上式の右辺第2項の  $\arctan$  は  $-\pi/2$  に近づく。よって、 $(q, \theta)$  は  $0$  に近づき、図A.1と図A.2で想定した流れ関数と整合している。(A.8)式の両辺を  $t$  で割り、

$$v/U = (q/U) \exp(-i\theta) = Q \cos\theta - iQ \sin\theta$$

を代入すると

$$\begin{aligned} z/t &= X + iY \\ &= (1/\pi) \{ -\log(1 + Q \cos\theta - iQ \sin\theta) \\ &\quad + i \log(1 + Q \sin\theta + iQ \cos\theta) \\ &\quad + \log(1 - Q \cos\theta + iQ \sin\theta) \\ &\quad - i \log(1 - Q \sin\theta - iQ \cos\theta) \} \end{aligned} \quad (A.8a)$$

(A.8a)式を実部  $X(\theta, Q)$  と虚部  $Y(\theta, Q)$  に整理する。

(A.8a)式右辺の { } 中の4つの項をそれぞれ計算すると

第1項  $-\log(1 + Q \cos \theta - i Q \sin \theta)$   
 $= -(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \cos \theta) - i \arctan \left( \frac{-Q \sin \theta}{1 + Q \cos \theta} \right)$

第2項  $i \log(1 + Q \sin \theta + i Q \cos \theta)$   
 $= i(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \sin \theta) - \arctan \left( \frac{Q \cos \theta}{1 + Q \sin \theta} \right)$

第3項  $\log(1 - Q \cos \theta + i Q \sin \theta)$   
 $= (1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \cos \theta) + i \arctan \left( \frac{Q \sin \theta}{1 - Q \cos \theta} \right)$

第4項  $-i \log(1 - Q \sin \theta - i Q \cos \theta)$   
 $= -i(1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \sin \theta) + \arctan \left( \frac{-Q \cos \theta}{1 - Q \sin \theta} \right)$

第1項右辺の実部と第3項右辺の実部から

$$-(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \cos \theta) + (1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \cos \theta) = (1/2) \log \left( \frac{1 + Q^2 - 2Q \cos \theta}{1 + Q^2 + 2Q \cos \theta} \right)$$

第2項右辺の実部と第4項右辺の実部から

$$-\arctan \left( \frac{Q \cos \theta}{1 + Q \sin \theta} \right) + \arctan \left( \frac{-Q \cos \theta}{1 - Q \sin \theta} \right) = -\arctan \left( \frac{2Q \cos \theta}{1 - Q^2} \right)$$

$$X = (1/\pi) \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + Q^2 - 2Q \cos \theta}{1 + Q^2 + 2Q \cos \theta} \right) - \arctan \left( \frac{2Q \cos \theta}{1 - Q^2} \right) \right\} \quad (A.10a)$$

第1項右辺の虚部と第3項右辺の虚部から

$$-i \arctan \left( \frac{-Q \sin \theta}{1 + Q \cos \theta} \right) + i \arctan \left( \frac{Q \sin \theta}{1 - Q \cos \theta} \right) = -i \arctan \left( \frac{-2Q \sin \theta}{1 - Q^2} \right)$$

第2項右辺の虚部と第4項右辺の虚部から

$$i(1/2) \log(1 + Q^2 + 2Q \sin \theta) - i(1/2) \log(1 + Q^2 - 2Q \sin \theta) = i(1/2) \log \left( \frac{1 + Q^2 + 2Q \sin \theta}{1 + Q^2 - 2Q \sin \theta} \right)$$

$$Y = (1/\pi) \left\{ -\arctan \left( \frac{-2Q \sin \theta}{1 - Q^2} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + Q^2 + 2Q \sin \theta}{1 + Q^2 - 2Q \sin \theta} \right) \right\} \quad (A.10b)$$

Q = 0.999 について行った計算結果を表 A.1 に示す。0 > > -π/2 で X は負の絶対値が大きい値から -0.5 に近づき、Y は -0.5 から負の絶対値が大きい値へ移る。このとき、は 0 に近い値をとっている。よって、この部分は図 A.1 の点 A1 と B1 を結ぶ自由流線を近似的に表し、自由流線の上で が 0 になり図 A.1 と整合していることが推測される。

-π/2 > > -π、-π > > -3π/2 および -3π/2 > > -2π についても、図 A.1 と整合していることが推測される。

A.7 w( ) が正則関数であることの確認

(1) 連続性および有限確定性の確認

(A.5) 式を書き替えると

表 A.1 設定事項の確認

	θ	X = x / t	Y = y / t	Ψ = φ / U t
	-π / 180	-2.00838	-0.487328	0.0182307
A 1	-30 π / 180	-0.918832	-0.674213	0.000735472
↓	-45 π / 180	-0.780099	-0.780099	0.000636937
B 1	-60 π / 180	-0.674213	-0.918832	0.000735432
	-89 π / 180	-0.487328	-2.00838	0.0182307
	-91 π / 180	0.487328	-2.00838	0.981769
B 1	-120 π / 180	0.674213	-0.918832	0.999265
↓	-135 π / 180	0.780099	-0.780099	0.999363
A 2	-150 π / 180	0.918832	-0.674213	0.999265
	-179 π / 180	2.00838	-0.487328	0.981769
	-181 π / 180	2.00838	0.487328	0.0182307
A 2	-210 π / 180	0.918832	0.674213	0.000735432
↓	-225 π / 180	0.780099	0.780099	0.000636937
B 2	-240 π / 180	0.674213	0.918832	0.000735432
	-269 π / 180	0.487328	2.00838	0.0182307
	-271 π / 180	-0.487328	2.00838	0.981769
B 2	-300 π / 180	-0.674213	0.918832	0.999265
↓	-315 π / 180	-0.780099	0.780099	0.999363
A 1	-330 π / 180	-0.918832	0.674213	0.999265
	-359 π / 180	-2.00838	0.487328	0.981769

$$w(v) = i Ut/2 + (Ut/\pi) \log \left( \frac{1 - v^2/U^2}{1 + v^2/U^2} \right)$$

円 =  $U \exp(i\theta)$  の周上では

$w(v) = i Ut/2 + (Ut/\pi) \log(-i \tan \theta)$  となり、 $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  を除いて連続かつ有限確定である。

円 =  $U \exp(i\theta)$  の内部では  $U^2 > v^2$  だから  $w(\ )$  は連続で有限確定である。

(2) Cauchy-Riemann 関係式の確認

まず  $z$  と  $\bar{z}$  を求めるため(A.5)式の( )の中の4つの項をそれぞれ実部と虚部に分ける。

$$\begin{aligned} \text{第1項} \quad & \log(1 + v/U) = \log(1 + u/U - i v/U) \\ & = \log\{(U + u)^2 + v^2\}^{1/2} - \log U + i \arctan \left( \frac{-v}{U + u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第2項} \quad & -\log(1 - v/iU) = -\log(1 + v/U + i u/U) \\ & = -\log\{(U + v)^2 + u^2\}^{1/2} + \log U - i \arctan \left( \frac{u}{U + v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第3項} \quad & \log(1 - v/U) = \log(1 - u/U + i v/U) \\ & = \log\{(U - u)^2 + v^2\}^{1/2} - \log U + i \arctan \left( \frac{v}{U - u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第4項} \quad & -\log(1 + v/iU) = -\log(1 - v/U - i u/U) \\ & = -\log\{(U - v)^2 + u^2\}^{1/2} + \log U - i \arctan \left( \frac{-u}{U - v} \right) \end{aligned}$$

実部を加え合わせ  $Ut/\pi$  をかけると

$$\begin{aligned} & = (Ut/\pi) \\ & \quad \times [\log\{(U + u)^2 + v^2\}^{1/2} - \log\{(U + v)^2 + u^2\}^{1/2} \\ & \quad + \log\{(U - u)^2 + v^2\}^{1/2} - \log\{(U - v)^2 + u^2\}^{1/2}] \end{aligned} \quad (\text{A.11a})$$

虚部を加え合わせ  $Ut/\pi$  をかけて  $i Ut/2$  を加えると、

$$\begin{aligned} i \quad & = i Ut/2 + i (Ut/\pi) \\ & \quad \times \left\{ \arctan \left( \frac{-v}{U + u} \right) - \arctan \left( \frac{u}{U + v} \right) \right. \\ & \quad \left. + \arctan \left( \frac{v}{U - u} \right) - \arctan \left( \frac{-u}{U - v} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11b})$$

次に Cauchy-Riemann の関係式が成立することを確かめる。結果は(A15a,b)式である。

$\phi$  と  $\psi$  をそれぞれ  $u, v$  で微分すると

$$\partial\phi/\partial u = -\partial\psi/\partial v = P \quad (\text{A.12a})$$

$$\partial\phi/\partial v = \partial\psi/\partial u = Q \quad (\text{A.12b})$$

つぎに、 $\partial u/\partial x, \partial v/\partial x, \partial u/\partial y$  および  $\partial v/\partial y$  を求める。

(A.8)の  $z$  を  $u - iv$  と書き直すと

$$\begin{aligned} z = (t/\pi) \{ & -\log(U + u - iv) + i \log(U + v + iu) \\ & + \log(U - u + iv) - i \log(U - v - iu) \} \end{aligned}$$

$z$  を  $x$  で偏微分すると

$$1 = -(\partial u/\partial x - i \partial v/\partial x)(A + iB) \quad (\text{A.13a})$$

$z$  を  $y$  で偏微分すると

$$i = -(\partial u/\partial x - i \partial v/\partial x)(A + iB) \quad (\text{A.13b})$$

(A.13a)を  $\partial u/\partial x$  と  $\partial v/\partial x$  について解くと

$$\partial u/\partial x = -A/(A^2 + B^2) \quad (\text{A.14a})$$

$$\partial v/\partial x = -B/(A^2 + B^2) \quad (\text{A.14b})$$

(A.13b)を  $\partial u/\partial y$  と  $\partial v/\partial y$  について解くと

$$\partial u/\partial y = -B/(A^2 + B^2) \quad (\text{A.14c})$$

$$\partial v/\partial y = A/(A^2 + B^2) \quad (\text{A.14d})$$

(A.12a,b)(A14a,b,c,d)を次式に代入すると

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial x & = \partial\phi/\partial u \cdot \partial u/\partial x + \partial\phi/\partial v \cdot \partial v/\partial x \\ & = -PA/(A^2 + B^2) - QB/(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial y & = \partial\phi/\partial u \cdot \partial u/\partial y + \partial\phi/\partial v \cdot \partial v/\partial y \\ & = -PB/(A^2 + B^2) + QA/(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\psi/\partial x & = \partial\psi/\partial u \cdot \partial u/\partial x + \partial\psi/\partial v \cdot \partial v/\partial x \\ & = -QA/(A^2 + B^2) + PB/(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\psi/\partial y & = \partial\psi/\partial u \cdot \partial u/\partial y + \partial\psi/\partial v \cdot \partial v/\partial y \\ & = -QB/(A^2 + B^2) - PA/(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

よって

$$\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \quad (\text{A.15a})$$

$$\partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \quad (\text{A.15b})$$

## A.8 連続の条件と渦無しの条件

連続の条件は

$$\begin{aligned} \partial u/\partial x + \partial v/\partial y \\ = -A/(A^2 + B^2) + A/(A^2 + B^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

渦無しの条件は

$$\begin{aligned} \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \\ = -B/(A^2 + B^2) + B/(A^2 + B^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

でそれぞれ成立していることを確認できる。

渦無しの条件の成立によって、これまでに既に  $w$  の実部として用いてきた  $\phi$  が速度ポテンシャルであることが確認された。

## 付録 B 2変数関数の逆補間

(A.10a)式と(A.10b)式において格子点の座標  $(X, Y)$  を指定したときに、これに対応する  $z$  と  $Q$  を求める逆補間の方法について述べる。この方法は一般に、2変数関数  $X = X(z, Q)$  と  $Y = Y(z, Q)$  の組み合わせに対して、極値の近傍を除けば容易に適用できると考えられる。

$z$  と  $Q$  の値を仮定して両式を使い  $X$  と  $Y$  を計算し、格子点の座標として指定されている  $(X, Y)$  に近づくように、つぎつぎに  $z$  と  $Q$  を探して試行錯誤による探索手順を繰り返せば、やがては求めるべき  $z$  と  $Q$  が得られる。しかし、目標  $(X, Y)$  に近づくように  $z$  と  $Q$  を探索するのは必ずしも容易ではない。

そこで2個の関数値  $X = X(\theta, Q)$  と  $Y = Y(\theta, Q)$  があらかじめ指定された  $(X, Y)$  に近づくように  $\theta$  と  $Q$  を探索する秩序だった方法を工夫する。仮に  $X = X(\theta, Q)$ ,  $Y = Y(\theta, Q)$  を連立させて解くことができれば、解  $(\theta, Q)$  が求めるものである。実際には直接解くことができないので、 $X(\theta, Q)$  と  $Y(\theta, Q)$  の代わりに局所的に近似された関数  $X_L(\theta, Q)$  と  $Y_L(\theta, Q)$  を導入して、 $X = X_L(\theta, Q)$ ,  $Y = Y_L(\theta, Q)$  を連立させて解く。関数  $X_L(\theta, Q)$  と  $Y_L(\theta, Q)$  はラグランジュ(Lagrange)の補間公式<sup>14)</sup>を拡張して作る。

B.1 グランジュの補間公式

$(n + 1)$ 個の変数の値  $x_0, x_1, \dots, x_n$  に対する値  $y_0, y_1, \dots, y_n$  を用いて途中の  $x$  に対する値  $y = f(x)$  を補間する  $(n + 1)$  点補間を考える。そのためには座標  $(x_i, y_i)$  をもつ  $(n + 1)$  個の点を通る  $n$  次の多項式  $l_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  を求め、この  $n$  次式の値によって中間の  $f(x)$  を求めようとするのがラグランジュの補間公式  $l_n(x)$

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i \quad (B.1)$$

である。 $(n + 1)$  個の変数の値  $x_0, x_1, \dots, x_n$  を等間隔にとる必要はない。

$l_n(x)$  が  $n$  次式であることは明らかである。 $l_n(x_i) = y_i$  である。よって、 $l_n(x)$  は座標  $(x_i, y_i)$  をもつ  $(n + 1)$  個の点を通る  $n$  次式である。

B.2 2変数の関数に適用できる補間公式

ここで、ラグランジュの補間公式を2変数の関数  $X = X(\theta, Q)$  に適用できるように拡張する。

$$X_{Lmn}(\theta, Q) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\left\{ \begin{array}{l} (\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1) \dots (\theta - \theta_{i-1})(\theta - \theta_{i+1}) \dots (\theta - \theta_m) \\ \times \{(Q - Q_0)(Q - Q_1) \dots (Q - Q_{j-1})(Q - Q_{j+1}) \dots (Q - Q_n)\} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (\theta_i - \theta_0)(\theta_i - \theta_1) \dots (\theta_i - \theta_{i-1})(\theta_i - \theta_{i+1}) \dots (\theta_i - \theta_m) \\ \times \{(Q_j - Q_0)(Q_j - Q_1) \dots (Q_j - Q_{j-1})(Q_j - Q_{j+1}) \dots (Q_j - Q_n)\} \end{array} \right\}} \right] X_{ij} \quad (B.2)$$

$X_{Lmn}(\theta, Q)$  は  $(m + 1) \times (n + 1)$  個の点  $(\theta_i, Q_j)$  で関数  $X = X(\theta, Q)$  と一致する値  $X_{ij}$  をとる。

B.3 局所的に近似された関数を使う近似解

とくに  $m = 1$  かつ  $n = 1$  の場合には下添字 1, 1 を省略すると

$$X_L(\theta, Q) = \frac{(\theta - \theta_1)(Q - Q_1)}{(\theta_0 - \theta_1)(Q_0 - Q_1)} X_{00} + \frac{(\theta - \theta_0)(Q - Q_1)}{(\theta_1 - \theta_0)(Q_0 - Q_1)} X_{10} + \frac{(\theta - \theta_1)(Q - Q_0)}{(\theta_0 - \theta_1)(Q_1 - Q_0)} X_{01} + \frac{(\theta - \theta_0)(Q - Q_0)}{(\theta_1 - \theta_0)(Q_1 - Q_0)} X_{11} \quad (B.3a)$$

同様に

$$Y_L(\theta, Q) = \frac{(\theta - \theta_1)(Q - Q_1)}{(\theta_0 - \theta_1)(Q_0 - Q_1)} Y_{00} + \frac{(\theta - \theta_0)(Q - Q_1)}{(\theta_1 - \theta_0)(Q_0 - Q_1)} Y_{10} + \frac{(\theta - \theta_1)(Q - Q_0)}{(\theta_0 - \theta_1)(Q_1 - Q_0)} Y_{01} + \frac{(\theta - \theta_0)(Q - Q_0)}{(\theta_1 - \theta_0)(Q_1 - Q_0)} Y_{11} \quad (B.3b)$$

が導かれる。 $X_{00}$  などは  $(\theta_0, Q_0)$  などを  $X = X(\theta, Q)$  に代入して得られる値、 $Y_{00}$  などは  $(\theta_0, Q_0)$  などを  $Y = Y(\theta, Q)$  に代入して得られる値である。

指定されている  $X$  および  $Y$  を求めるには  $\theta_0, \theta_1, Q_0$  および  $Q_1$  の妥当な初期値から出発する必要がある。 $X$  が  $X_{00}, X_{10}, X_{01}$  および  $X_{11}$  の最小値と最大値の間にあり、 $Y$  が  $Y_{00}, Y_{10}, Y_{01}$  および  $Y_{11}$  の最小値と最大値の間にあるように  $\theta_0, \theta_1, Q_0$  および  $Q_1$  の初期値を設定することが望ましい。初期値設定は難しいことではなく、図 2.6 のような概略の地図をつかって見当をつけることができる。

両式を  $\theta$  と  $Q$  に注目して整理すると

$$a\theta Q + b\theta + cQ + d = 0 \quad (B.4a)$$

$$e\theta Q + f\theta + gQ + h = 0 \quad (B.4b)$$

が得られる。(B.4a)式と(B.4b)式を連立させて解くことは簡単である。  $\theta$  に関する2次方程式を導き、当初設定した  $\theta_0, \theta_1$  に近い方の根を近似解  $\theta_a$  とする。続いて対応する  $Q_a$  を求める。 $(\theta_a, Q_a)$  は連立方程式  $X = X(\theta, Q)$ ,  $Y = Y(\theta, Q)$  の近似解になる。得られた  $(\theta_a, Q_a)$  を取り囲むように新たに  $\theta_0, \theta_1, Q_0$  および  $Q_1$  を設定し直して同じ操作を繰り返す。この方法を用いると (A.10a)式と (A.10b)式を満たし有効数字6桁程度の精度をもつ  $(\theta, Q)$  を3回程度の反復で求めることができる。

付録C 境界線直近の格子点で の値を補間する方法

付録Bで述べたラグランジュの補間公式、(B.1)式を利用して境界線の直近内側の格子点での の値を求める。図C.1に即して具体的に述べると、A点とC、D、E、...の諸点で知られている の値を使ってB点で の値を求める方法である。補間に用いる格子点の数を2点から1点ずつ増加させるときにnが3以下の補間公式を例示的に書き下す。

$$I_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad (C.1a)$$

$$I_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \quad (C.1b)$$

$$I_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \quad (C.1c)$$

となる。ここで、図C.1に即して

$x_0, Y_A, x_1, Y_B, x_2, Y_C, x_3, Y_D, x_4, Y_E, \dots$   
 $y_0, \Psi_A, I_n(x), \Psi_B, y_1, \Psi_C, y_2, \Psi_D, y_3, \Psi_E, \dots$   
 と書き替えると

n = 1 の場合

$$\Psi_B = \frac{Y_B - Y_C}{Y_A - Y_C} \Psi_A + \frac{Y_B - Y_A}{Y_C - Y_A} \Psi_C$$

ここで  $\Psi_A = 0$  ゆえ

$$\Psi_B = \frac{Y_B - Y_A}{Y_C - Y_A} \Psi_C \quad (C.2a)$$

n = 2 の場合

$$\Psi_B = \frac{(Y_B - Y_C)(Y_B - Y_D)}{(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D)} \Psi_A + \frac{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_D)}{(Y_C - Y_A)(Y_C - Y_D)} \Psi_C + \frac{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_C)}{(Y_D - Y_A)(Y_D - Y_C)} \Psi_D \quad (C.2b)$$

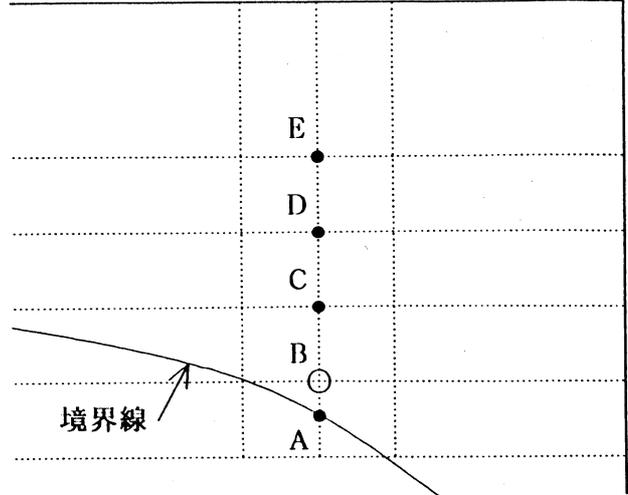


図 C.1 補間に用いる点

ここで  $\Psi_A = 0, Y_B - Y_D = -2H, Y_C - Y_D = -H, Y_B - Y_C = -H$  ゆえ

$$\Psi_B = 2 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_C - Y_A)} \Psi_C - \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_D - Y_A)} \Psi_D \quad (C.3b)$$

n = 3 の場合

$$\Psi_B = \frac{(Y_B - Y_C)(Y_B - Y_D)(Y_B - Y_E)}{(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D)(Y_A - Y_E)} \Psi_A + \frac{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_D)(Y_B - Y_E)}{(Y_C - Y_A)(Y_C - Y_D)(Y_C - Y_E)} \Psi_C + \frac{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_C)(Y_B - Y_E)}{(Y_D - Y_A)(Y_D - Y_C)(Y_D - Y_E)} \Psi_D + \frac{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_C)(Y_B - Y_D)}{(Y_E - Y_A)(Y_E - Y_C)(Y_E - Y_D)} \Psi_E$$

ここで  $\Psi_A = 0, Y_B - Y_D = -2H, Y_B - Y_E = -3H, Y_C - Y_D = -H, Y_C - Y_E = -2H, Y_B - Y_C = -H, Y_D - Y_E = -H, Y_E - Y_C = 2H$  ゆえ

$$\Psi_B = 3 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_C - Y_A)} \Psi_C - 3 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_D - Y_A)} \Psi_D + \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_E - Y_A)} \Psi_E \quad (C.3c)$$

上記の結果から、nが4以上の場合についてもつぎのように  $\Psi_B$  の表式を推論できる。

$$\Psi_B = -(-1)^1 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_C - Y_A)} \Psi_C - (-1)^2 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_D - Y_A)} \Psi_D$$

$$\begin{aligned}
 & - (-1)^3 {}_n C_3 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_E - Y_A)} \Psi_E \\
 & - (-1)^4 {}_n C_4 \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_F - Y_A)} \Psi_F - \dots \\
 & - (-1)^n {}_n C_n \frac{(Y_B - Y_A)}{(Y_n - Y_A)} \Psi_n
 \end{aligned}$$

推論された表式が正しいことは表式に従って実際に  $\Psi_B$  の補間計算を行ってみれば確認できる。

付録D 境界線上の点で  $\partial\Psi/\partial Y$  を求める方法

ラグランジュの補間公式を利用して境界線上の点で  $\partial\Psi/\partial Y$  を求める。付録Cではnが3以下の場合について補間公式を書き下し(C.1a)式から(C.1c)式を得た。これらの式をxで微分すると

$$\begin{aligned}
 l_1(x) &= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \\
 l_2(x) &= \frac{(x - x_2) + (x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 \\
 &+ \frac{(x - x_2) + (x - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 \\
 &+ \frac{(x - x_1) + (x - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \\
 l_3(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 \\
 &+ \frac{(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 \\
 &+ \frac{(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 \\
 &+ \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3
 \end{aligned}$$

とくに  $x = x_0$  で  $y_0 = 0$  である場合について  $x = x_0$  での微係数は

$$l_1(x_0) = \frac{1}{x_1 - x_0} y_1 \tag{D.1a}$$

$$\begin{aligned}
 l_2(x_0) &= \frac{(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 \\
 &+ \frac{(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \tag{D.1b}
 \end{aligned}$$

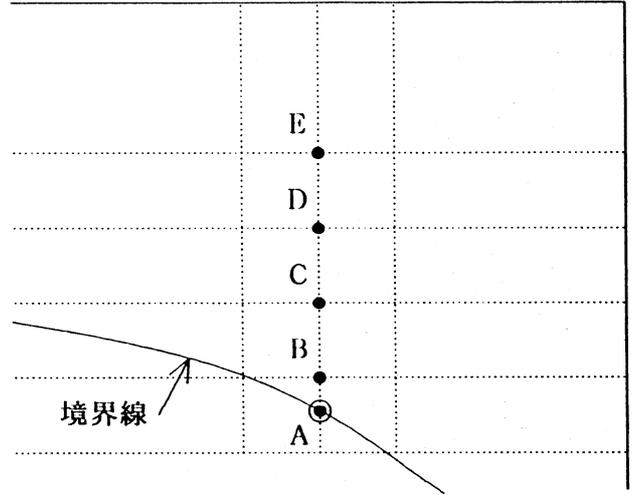


図 D.1 微分に用いる点

$$\begin{aligned}
 l_3(x_0) &= \frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 \\
 &+ \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 \\
 &+ \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \tag{D.1c}
 \end{aligned}$$

図 D.1 に即して

$$\begin{aligned}
 & x_0, Y_A, x_1, Y_B, x_2, Y_C, x_3, Y_D, x_4, Y_E, \dots \\
 l_n(x_0) &= \begin{matrix} A, y_1 & B, y_2 & C, y_3 & D, y_4 & E, \dots \end{matrix}
 \end{aligned}$$

と書き替えると

n = 1 の場合

$$\Psi_A = \frac{1}{Y_B - Y_A} \Psi_B \tag{D.2a}$$

n = 2 の場合

$$\begin{aligned}
 \Psi_A &= \frac{Y_A - Y_C}{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_C)} \Psi_B \\
 &+ \frac{Y_A - Y_B}{(Y_C - Y_A)(Y_C - Y_B)} \Psi_C
 \end{aligned}$$

$Y_B - Y_C = -H$  だから

$$\Psi_A = -\frac{Y_A - Y_C}{(Y_B - Y_A)H} \Psi_B + \frac{Y_A - Y_B}{(Y_C - Y_A)H} \Psi_C \tag{D.2b}$$

$n = 3$  の場合

$$\begin{aligned}\Psi_A &= \frac{(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D)}{(Y_B - Y_A)(Y_B - Y_C)(Y_B - Y_D)} \Psi_B \\ &+ \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_D)}{(Y_C - Y_A)(Y_C - Y_B)(Y_C - Y_D)} \Psi_C \\ &+ \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_C)}{(Y_D - Y_A)(Y_D - Y_B)(Y_D - Y_C)} \Psi_D\end{aligned}$$

$Y_B - Y_C = -H, Y_B - Y_D = -2H, Y_C - Y_D = -H$  だから

$$\begin{aligned}\Psi_A &= \frac{(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D)}{(Y_B - Y_A)(2H^2)} \Psi_B \\ &- \frac{2(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_D)}{(Y_C - Y_A)(2H^2)} \Psi_C \\ &+ \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_C)}{(Y_D - Y_A)(2H^2)} \Psi_D\end{aligned}\quad (D.2c)$$

上記の結果から、 $n$  が 4 以上の場合についてもつぎのよ  
うに  $\Psi_A$  の表式を推論できる。

$$\begin{aligned}\Psi_A &= (-1)^{n-1} C_0 \frac{(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D)(Y_A - Y_E) \dots (Y_A - Y_n)}{(Y_B - Y_A) \{(n-1)! H^{n-1}\}} \Psi_B \\ &- (-1)^{n-1} C_1 \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_D)(Y_A - Y_E) \dots (Y_A - Y_n)}{(Y_C - Y_A) \{(n-1)! H^{n-1}\}} \Psi_C \\ &+ (-1)^{n-1} C_2 \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_E) \dots (Y_A - Y_n)}{(Y_D - Y_A) \{(n-1)! H^{n-1}\}} \Psi_D - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} C^{n-1} \frac{(Y_A - Y_B)(Y_A - Y_C)(Y_A - Y_D) \dots (Y_A - Y_{n-1})}{(Y_n - Y_A) \{(n-1)! H^{n-1}\}} \Psi_n\end{aligned}$$

推論された表式が正しいことは表式に従って実際に  $\Psi_A$   
を微分計算すれば確認できる。