

ISSN 0389-4010
UDC 533.6
533.6.0115.5
533.6.013.12
629.7.025

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1426

体積と最大厚み位置を与えた時の厚みによる
造波抵抗の最小化

石 田 洋 治

2001年7月

独立行政法人 航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY OF JAPAN

航空宇宙技術研究所報告 1426 号

平成 13 年 7 月 発行

発行所 独立行政法人 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町 7 - 44 - 1

電話 (0422) 40-3935 〒182-8522

印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山 5 - 6 - 17

© 2001 航空宇宙技術研究所

※本書（誌）の一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、無断で複写、複製、転載、テープ化およびファイル化することを禁じます。

※本書（誌）からの複写、転載等を希望される場合は、情報技術課資料係にご連絡ください。

※本書（誌）中、本文については再生紙を使用しております。

Printed in Japan

航空宇宙技術研究所報告

TR-1426

体積と最大厚み位置を与えた時の厚みによる 造波抵抗の最小化*

石 田 洋 治*¹

Minimization of wave drag due to thickness with constraints on constant volume and maximum thickness position*

Yoji ISHIDA *¹

ABSTRACT

We have developed a numerical method for designing minimum-drag supersonic wing thickness with constraints on total volume and wing's maximum thickness position. This method is based on the linearized supersonic theory and is an extension of Kawasaki's method (ref.10) which deals only with total volume constraint. The maximum thickness position of the wing, a new constraint condition, is important information from both aerodynamic and structural points of view. The addition of the constraint has considerably extended the design possibility and has actually produced many interesting optimum thickness families. Numerical examples are given for delta, gothic and arrow wings, which confirm the usefulness of present design method.

Keywords :Aerodynamics, zero lift wave drag, optimum design, supersonic flow

概 要

体積と最大厚み位置を指定した時の、厚みによる造波抵抗を最小にする、最適厚み分布を設計する数値計算法を開発した。本方法は線形超音速理論に基づいており、体積一定の条件下での最適厚み分布を求める河崎の方法(文献10)を拡張したものである。新しい拘束条件である最大厚み位置は空力的、構造的の両観点から重要であり、近年注目されている全翼機の設計では必要不可欠である。この拘束条件の追加により設計可能性の範囲は著しく広がり、事実多くの興味ある厚み分布の族が得られている。計算例としてデルタ翼、ゴチック翼、アロー翼の各翼平面形に本計算法を適用し、本設計法の有用性を確かめた。

1. 序

超音速翼の線形理論による揚力依存造波抵抗の最小化については多くの研究があるが、厚みによる造波抵抗を最小にする問題は驚くべきことにそれ程多くはない。厚みによる翼の圧力分布の計算は多くの研究者によって行

なわれている。Puckett¹²⁾は湧き出し特異解を用いて特別な厚み分布のデルタ翼の圧力分布と造波抵抗を求めた。Jones¹³⁾は「逆流れの定理」を用いて体積が与えられた時の厚みによる造波抵抗が最小となる条件を与えた。しかしこの条件はこれまで実際には使われていない。Lord and Brebner¹⁾は細長物体理論を用いて計算を

* 平成13年5月11日受付 (received 11 May 2001)

*¹ 風洞技術開発センター (Wind Tunnel Technology Center)

行い, Weber²⁾は rhombic 断面とよばれる特別な翼断面を持つデルタ翼について, 厚みによる抵抗を推定した。Eminton³⁾や Smith and Thomson⁴⁾は Weber が扱ったのと同じグループに属する翼について, 翼の表面上の圧力分布を計算した。これらは直接造波抵抗を扱っていない。Lighthill⁷⁾は細長いデルタ翼の厚みによる造波抵抗を求める式を与えたが, 最適化は試みなかった。Lock and Bridgewater¹⁴⁾は任意平面形の翼の厚み分布に基づく圧力分布の計算法を与え, 線形理論の範囲で丸い前縁を扱うべく補正を行なった。他方 Bean⁵⁾や Grant and Cooper⁶⁾は鍾状流の概念を用い, スパン方向に同じ厚み分布を持つデルタ翼やアロー翼の抵抗を計算し, 最適な厚み分布を求めた。しかしながら鍾状流の方法は圧力分布の精度良い推定を, 特に亜音速前縁を持つ翼の場合には与えない。

一方, Strand⁸⁾はマッハボックス法(それは Anliker⁹⁾に始まる)と呼ばれる数値計算法を用いて, スパン方向に厚み分布が変わる場合も含めて, 体積一定の拘束条件の下で厚みによる最小抵抗の問題を解いた。Kawasaki¹⁰⁾は厚み分布を流れ方向変数とスパン方向変数の二重多項式で表し, 半解析的に圧力分布を求め, それにもとづいて体積拘束条件の下での抵抗最小となる厚み分布を求めた。Strand と Kawasaki の方法は実用的に興味のある厚み分布を与えた。Middleton & Lundry¹¹⁾は全機の超音速航空機の空力設計法を構成し, その中で厚みによる翼の圧力計算も行なった。

しかしながら, 上述の抵抗最小化はいずれも拘束条件として体積一定を用いており, それ以外の拘束条件を用いた文献はないと言ってよい。厚み問題に関連した拘束条件として最大厚み位置は重要な条件である。それは最大厚み位置を予め指定することは構造上の観点からも好ましいし, 翼の内部スペースを有効に利用したい場合などに役に立つと思われるからである。特に近年再び注目を浴びている全翼機の設計には欠かせない技術であると思われる。

本報告ではこの最大厚み位置を体積一定の拘束条件に加えて, 厚みによる抵抗を最小にする問題を考える。基本的な計算方法は Kawasaki の方法に基づいており, 彼の方法は体積一定を拘束条件にしていたが, それに最大厚み位置を加えて新たに定式化した。この新しい条件を加えることにより設計の可能性は著しく広がり, 多くの実用的に興味のある厚み分布が得られる。

2. 理論

線形理論による超音速翼の厚み $t(x, y)$ による表面圧力 $C_p(x, y)$ は

$$C_p(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{\tau} \frac{\partial t(x_1, y_1) / \partial x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2}} dx_1 dy_1 \quad (1)$$

で与えられる。ここで全ての長さは翼根部の弦長で無次元化されているものとする。翼の前縁と後縁は解析的な関数で与えられるものと仮定する:

$$\begin{aligned} \text{前縁: } x &= l(y/s_0) \\ \text{後縁: } y &= t(y/s_0) \end{aligned} \quad (2)$$

このとき局所弦長は

$$C(y/s_0) = t(y/s_0) - l(y/s_0) \quad (3)$$

である。厚み分布 $t(x, y)$ を

$$t(x, y) = \tau_0 C(y/s_0) f(\xi, y/s_0) \quad (4)$$

とおく。ここで

$$\xi = (x - l(\eta)) / C(\eta) \quad \text{および} \quad \eta = y/s_0$$

はそれぞれ無次元の弦長, スパン両方向の座標であり, τ_0 は厚み比である。(4) 式より

$$\partial t / \partial x = \tau_0 C(\eta) (\partial f / \partial \xi) (\partial \xi / \partial x) = \tau_0 \partial f / \partial \xi \quad (5)$$

ここで Kawasaki に従い $\partial f / \partial \xi$ を次のような ξ と η の二重級数に展開する。

$$\begin{aligned} \partial f(\xi, \eta) / \partial \xi &= a_{10}(1-2\xi) + a_{20}(1-3\xi^2) + a_{30}(1-4\xi^3) \\ &\quad + a_{40}(1-5\xi^4) + |\eta| [a_{11}(1-2\xi) + a_{21}(1-3\xi^2) \\ &\quad + a_{31}(1-4\xi^3) + a_{41}(1-5\xi^4)] + |\eta|^2 [a_{12}(1-2\xi) \\ &\quad + a_{22}(1-3\xi^2) + a_{32}(1-4\xi^3) + a_{42}(1-5\xi^4)] \\ &= \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} a_{ij} |\eta|^j [1 - (i+1)\xi^i] \end{aligned} \quad (6)$$

上式はこの文献で用いられる一番次数の高い分布形 ($I_{\max}=4, J_{\max}=2$) を表しているが, 他の分布形も $1 \leq I_{\max} \leq 4, 0 \leq J_{\max} \leq 2$ の範囲内で可能である。 $J_{\max}=0$ の(無次元)分布形はスパン方向に同じであり, $J_{\max}=1$ の時はスパン方向に変化する。(6) 式の a_{ij} は決定されるべき定数である。(5), (6) 式を (1) 式に代入し, 若干の計算の後, 次の式が得られる。

$$C_p(x, y) = \frac{\tau_0}{\beta\pi} \left[\sum_{i=1}^{I_{\max}} a_{i0} G_{i0}(x, y) + \sum_{i=1}^{I_{\max}} a_{i1} G_{i1}(x, y) + \sum_{i=1}^{I_{\max}} a_{i2} G_{i2}(x, y) \right] \quad (7)$$

ここで

$$G_{ij} = \int_{\beta y(\tau)} |\eta|^j \left(I_0(x, y, y_1) - (i+1) \frac{I_i(x, y, y_1)}{(t(y_1/s_0) - l(y_1/s_0))^i} \right) d(\beta y_1) \quad (8)$$

および

$$I_i(x, y, y_1) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \int_{l(y_1/s_0)}^{x-\beta|y-y_1|} \frac{[x_1 - l(y_1/s_0)]^i}{[(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2]^{1/2}} dx_1 \quad (9)$$

である。関数 $I_i(x, y, y_1)$ は与えられた翼平面形に対して解析的に評価出来る。詳細は付録を参照されたい。そして G_{ij} は数値的に求めることが出来る。

次に抵抗であるが、まず局所抵抗係数 $C_d(y/s_0)$ は

$$\frac{\beta}{\tau_0^2} C_d \left(\frac{y}{s_0} \right) = \int_0^1 \frac{\beta}{\tau_0} C_p(x, y) f' \left(\xi, \frac{y}{s_0} \right) d\xi \quad (10)$$

となる。このとき全抵抗係数 C_D は、局所抵抗係数をスパン方向に積分することにより得られる。

$$\frac{\beta}{\tau_0^2} C_D = \frac{2s_0}{S} \int_0^1 \frac{\beta}{\tau_0^2} C_d \left(\frac{y}{s_0} \right) \left[t \left(\frac{y}{s_0} \right) - l \left(\frac{y}{s_0} \right) \right] d \left(\frac{y}{s_0} \right) \quad (11)$$

ここで S は翼面積で

$$S = 2s_0 \int_0^1 \left[t \left(\frac{y}{s_0} \right) - l \left(\frac{y}{s_0} \right) \right] d \left(\frac{y}{s_0} \right) \quad (12)$$

(6) 及び (7) 式を (10) 式に代入すると $C_d(y/s_0)$ はつぎのように求められる。

$$\frac{\beta}{\tau_0^2} C_d \left(\frac{y}{s_0} \right) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} \sum_{i'=1}^{I_{\max}} \sum_{j'=0}^{J_{\max}} H_{ij,i'j'} \left(\frac{y}{s_0} \right) a_{ij} a_{i'j'} \quad (13)$$

ここで

$$H_{ij,i'j'} \left(\frac{y}{s_0} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left\{ G_{ij}(x, y) \left| \frac{y}{s_0} \right|^{j'} [1 - (i'+1)\xi^{i'}] \right. \\ \left. + G_{i'j'}(x, y) \left| \frac{y}{s_0} \right|^j [1 - (i+1)\xi^i] \right\} d\xi \quad (14)$$

次に (10) 式を (11) 式に代入すると C_D は

$$\frac{\beta}{\tau_0^2} C_D = \frac{2s_0}{S} \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} \sum_{i'=1}^{I_{\max}} \sum_{j'=0}^{J_{\max}} \bar{H}_{ij,i'j'} a_{ij} a_{i'j'} \quad (15)$$

となる。ここで

$$\bar{H}_{ij,i'j'} = \int_0^1 H_{ij,i'j'}(y/s_0) [t(y/s_0) - l(y/s_0)] d(y/s_0) \quad (16)$$

従って全抵抗係数 C_D は a_{ij} の 2 次形式で表される。

3. 最適化

既に述べたように、全抵抗係数は (15) 式に示したよう

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{V}_{10} & \bar{V}_{20} & \bar{V}_{30} & \cdots & \bar{V}_{42} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{V}_{10} & 2\bar{H}_{10,10} & 2\bar{H}_{10,20} & 2\bar{H}_{10,30} & \cdots & 2\bar{H}_{10,42} & \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \cdots & \sigma_{10,K} \\ \bar{V}_{20} & 2\bar{H}_{20,10} & 2\bar{H}_{20,20} & 2\bar{H}_{20,30} & \cdots & 2\bar{H}_{20,42} & \sigma_{20,1} & \sigma_{20,2} & \cdots & \sigma_{20,K} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \bar{V}_{42} & 2\bar{H}_{42,10} & 2\bar{H}_{42,20} & 2\bar{H}_{42,30} & \cdots & 2\bar{H}_{42,42} & \sigma_{42,1} & \sigma_{42,2} & \cdots & \sigma_{42,K} \\ 0 & \sigma_{10,1} & \sigma_{20,1} & \sigma_{30,1} & \cdots & \sigma_{42,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{10,2} & \sigma_{20,2} & \sigma_{30,2} & \cdots & \sigma_{42,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \sigma_{10,K} & \sigma_{20,K} & \sigma_{30,K} & \cdots & \sigma_{42,K} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S\lambda/2s_0 \\ a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{42} \\ S\mu_1/2s_0 \\ S\mu_2/2s_0 \\ \vdots \\ S\mu_K/2s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/\tau_0 S \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

にパラメータ a_{ij} の 2 次式で表される。この時、ある拘束条件の下での抵抗係数の最小値は、Lagrange の未定乗数法を適用することにより容易に見出すことが出来る。ここでは体積と最大厚み位置が与えられた時の最小抵抗を与える翼の厚み分布を見出す問題を考えよう。

体積 V は

$$V = 2 \int_0^{s_0} \int_{l(y/s_0)}^{t(y/s_0)} t(x, y) dx dy \quad (17)$$

で与えられるので、(4)、(6) 式から、 $I_{\max}=4$ 、 $J_{\max}=2$ に対して

$$\frac{V}{\tau_0 S} = \left\{ \left(\frac{a_{10}}{6} + \frac{a_{20}}{4} + \frac{3a_{30}}{10} + \frac{a_{40}}{3} \right) \int_0^1 C(\eta)^2 d\eta + \left(\frac{a_{11}}{6} + \frac{a_{21}}{4} + \frac{3a_{31}}{10} + \frac{a_{41}}{3} \right) \int_0^1 \eta C(\eta)^2 d\eta + \left(\frac{a_{12}}{6} + \frac{a_{22}}{4} + \frac{3a_{32}}{10} + \frac{a_{42}}{3} \right) \int_0^1 \eta^2 C(\eta)^2 d\eta \right\} + \int_0^1 C(\eta) d\eta \\ \equiv \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} \bar{V}_{ij} a_{ij} \quad (18)$$

となる。一方翼表面の最大厚み点 (ξ_{Mk}, η_{Mk}) ($k=1\dots K$) は、その点の上で $\partial t/\partial x=0$ 、すなわち $\partial f/\partial \xi=0$ が満たされる点である。この条件は (6) 式より

$$\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} a_{ij} |\eta_{Mk}|^j [1 - (i+1)\xi_{Mk}^i] = 0 \quad (k=1\dots K) \quad (19)$$

となる。 λ と μ_k を Lagrange 乗数とし、関数 F を次式で定義する。

$$F = \frac{\beta}{\tau_0^2} C_D + \lambda \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} \bar{V}_{ij} a_{ij} - \frac{V}{\tau_0 S} \right) + \sum_{k=1}^K \mu_k \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=0}^{J_{\max}} \sigma_{ij,k} a_{ij} \right) \quad (20)$$

ここで

$$\sigma_{ij,k} = |\eta_{Mk}|^j [1 - (i+1)\xi_{Mk}^i] \quad (21)$$

さて、 $\partial F/\partial \lambda=0$ 、 $\partial F/\partial \mu_k=0$ そして $\partial F/\partial a_{ij}=0$ とおくと λ 、 μ_k および a_{ij} を決定する線形方程式が得られる。それらは行列式の形で次のように書ける ($I_{\max}=4$ 、 $J_{\max}=2$ の時)。

この時係数 a_{ij} は (22) 式の解として与えられる。一旦 a_{ij} が与えられれば、無次元厚み $f(\xi, \eta)$ は (6) 式を ξ に関して積分することにより得られる。

4. 数値計算

(8), (14) および (16) 式の数値計算は、積分区間を 100 分割して台形公式を使って計算した。計算の際の主な困難さは、前方マッハ線が、考えている翼の前縁と交わる点で被積分関数が特異点を持つことから生じる。その困難さは基本的に Kawasaki と同じ扱い方により処理できる。

5. 数値例と検討

5.1 一般的注釈

拘束条件として最大厚み位置 (ξ_M, η_M) を加えることは、翼設計の可能性を著しく広げる。何故なら数学的には翼上の殆ど全ての位置がその位置として選べるからである。しかしながら、実際には最適厚みが負になることなどもあって、その位置は必然的に限られてくる。

(6) 式より I_{\max} , J_{\max} の組合せに対応して最大 12 ケースの厚み分布が可能である。それらのうち $I_{\max}=1$ と $J_{\max}=0$ の場合はいわゆる biconvex 翼型を意味するが、本論文ではこの断面を持つ翼を抵抗値の比較の際の標準翼

とした。

ここで示す数値例は数が限られており、代表例として示したものにすぎない。第 1 図は我々の最適化法が適用されるであろう 4 つの翼平面形を示す。

5.2 デルタ翼

我々はまず $\beta s_0=0.6$ のデルタ翼に対して (6) 式で $I_{\max}=4$, $J_{\max}=2$ を使った場合の最適化を試みた。最大厚み位置として等%弦長線上のスパン方向の 3 点 $(\xi_M, 0)$, $(\xi_M, 0.5)$, $(\xi_M, 1.0)$ を指定し、 ξ_M は 0.2 から 0.5 まで変えた。第 2 図は得られた最適厚み分布を示す。 $\xi_M=0.2$ (同図 (a)) の時、翼の内側領域 ($\eta < 0.4$) で極値を二つ取る (0.2 と 0.7 付近) というおかしな分布が得られるが、他の ξ_M に対しては滑らかな分布形が得られている (同図 (b) から (d))。第 2 図 (e) は最大厚みが等%弦長線上になく、翼端に近づくにつれて最大厚み位置が翼の前方に移動しているような場合である。この場合も滑らかな厚み分布が得られている。最大厚みも指定された位置に来ている。第 3 図は第 2 図で求めたそれぞれの翼の換算抵抗係数 ($\beta S^2/V^2$) C_D を ξ_M の関数として示したものである。 ξ_M が 0.4 付近で最小値 16.66 を取る。しかしこの結果から $\xi_M=0.4$ の結果が一番良いと判断してはならないであろう。何故なら他の分布も含めてこれらはそれぞれの与

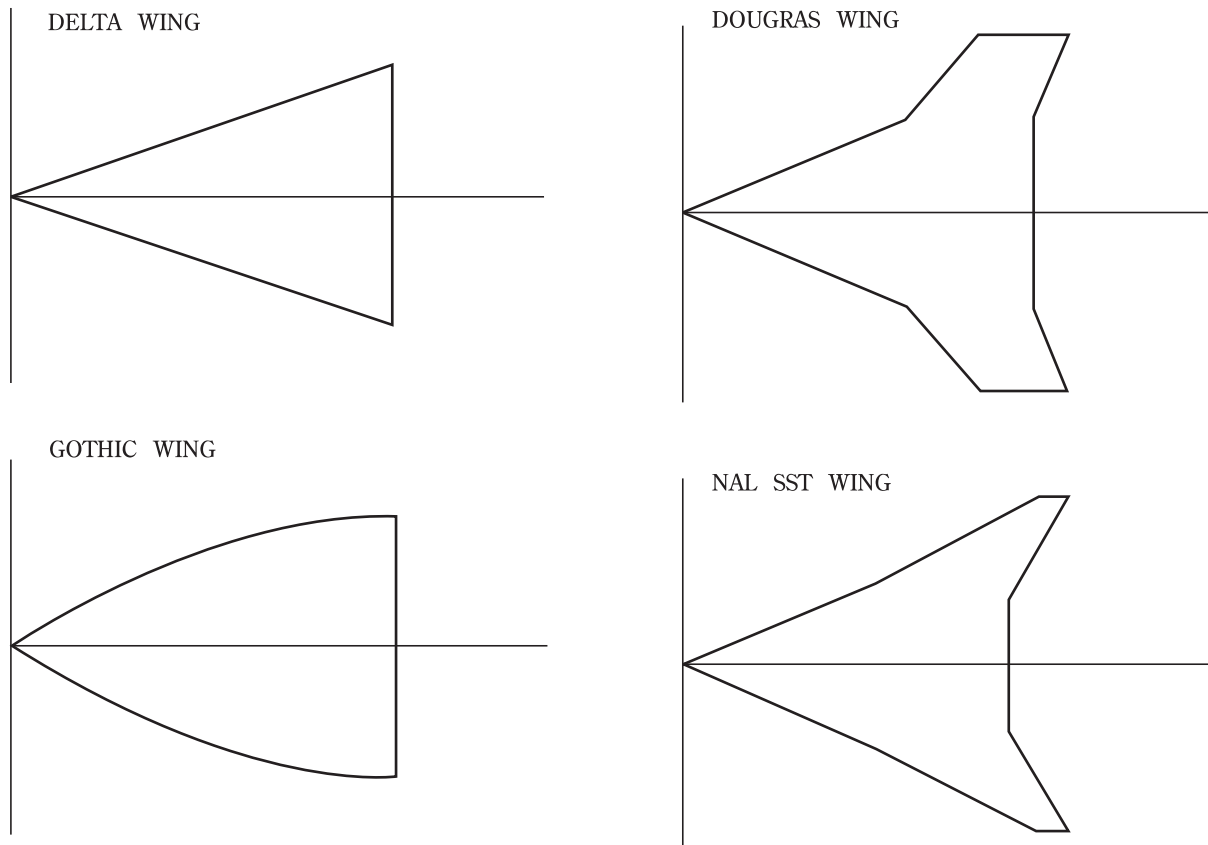


図1 計算で用いた翼平面形

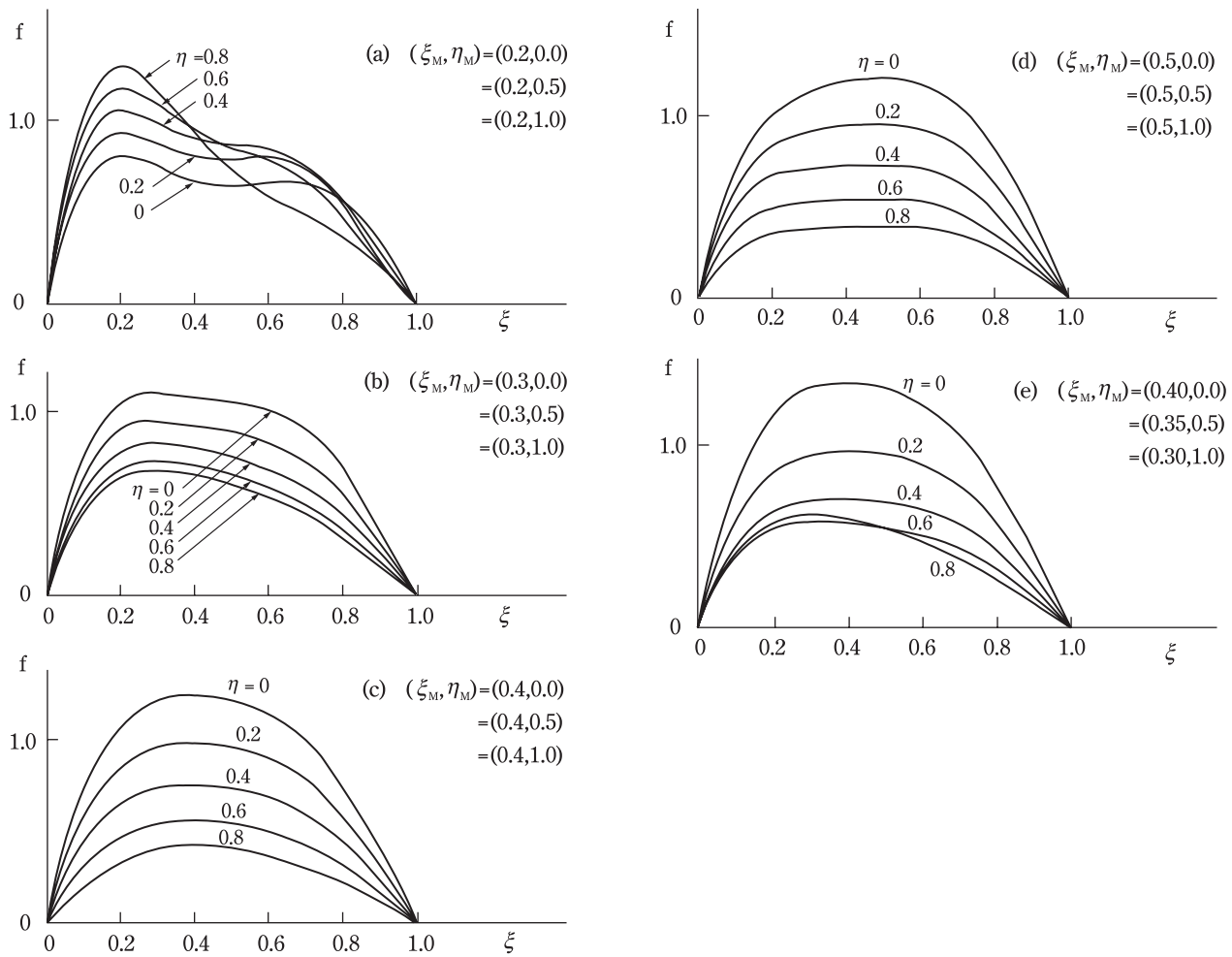


図2 デルタ翼の最適厚み分布。 $I_{\max}=4$, $J_{\max}=2$ の場合。

えられた条件での最適分布であるからであり、それぞれの設計目的を持っているからである。因みに第2図(e)の翼はもっと小さい値16.62を持つ。比較のため biconvex 翼の換算抵抗は21.69であり、我々の最適翼はいずれもこれよりかなり小さい抵抗を持っている。

次に代表的な場合の表面圧力分布が第4図に示されている。同図(a)は $\xi_M=0.2$ の場合である。得られた圧力分布は、スパン方向 $0.2 \leq \eta \leq 0.6$ の領域に渡って厳しい逆圧力勾配を持っており、圧力抵抗に大きく寄与するであろう。第3図でも $\xi_M=0.2$ での抵抗値は高い。粘性効果の点からもこの逆圧力勾配は好ましくないであろう。他方、同図(b)は $\xi_M=0.4$ の場合である。この場合は第3図で抵抗が最小になる場合に相当するが、圧力分布も翼の大部分に渡って滑らかな順圧力勾配を持っており、圧力抵抗への寄与は小さくなっている。恐らく粘性の効果も順圧力勾配ゆえ良好であろうと思われる。

我々は他の (I_{\max}, J_{\max}) の組合せに対しても最適化問題を解いたが、その結果はスペースの関係で省略する。

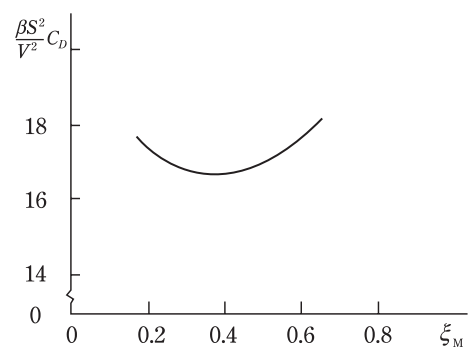


図3 デルタ翼の換算抵抗係数

5.3 ゴチック翼

第2の例は $\beta_{S_0}=0.4$ の場合のゴチック翼である。最初に(6)式で $I_{\max}=4$, $J_{\max}=0$ とし、最大厚み位置は翼端の一点 $(\xi_M, 1.0)$ に与えて最適化を行なった。第5図は様々な ξ_M に対する最適厚み分布を示す。 $J_{\max}=0$ であるから分布形はスパン方向に同じである。最大厚み位置が $\xi_M=0.2$ と $\xi_M=0.6$ の場合には翼の表面に凹部が見られる。それ以外の ξ_M に対しては滑らかな分布形が得られてい

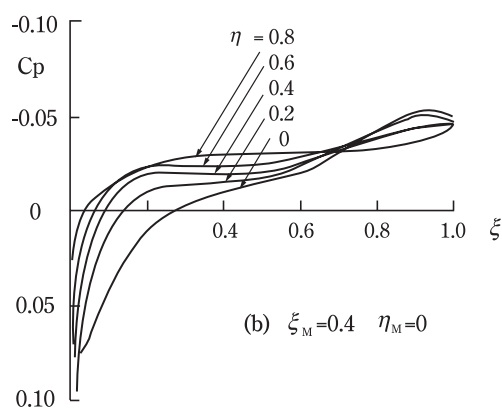
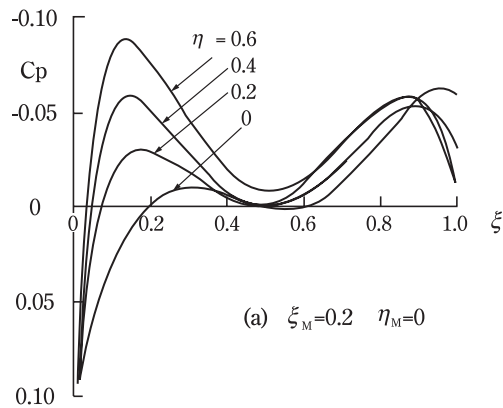
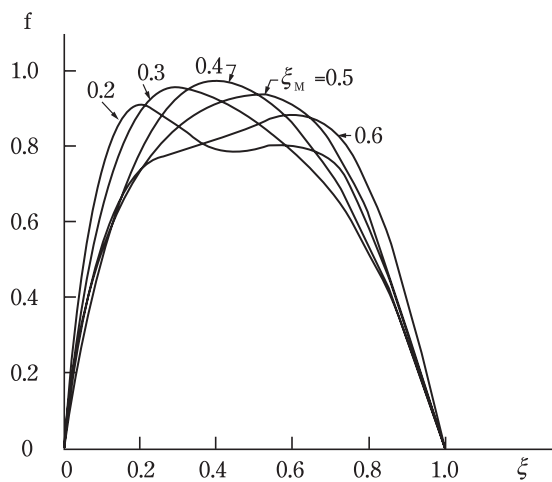


図4 デルタ翼の圧力分布

図5 ゴチック翼の最適厚み分布。
 $I_{\max}=4, J_{\max}=0$ の場合。

る。第6図は ξ_M による抵抗係数の変化を示す。デルタ翼の場合と較べて ξ_M による変化がより急である。この場合にも $\xi_M=0.4$ で抵抗は最小 (=15.03) になっていることがわかる。第7図は体積一定の拘束条件だけを課した場合の最適分布であり、この最適分布は第5図の $\xi_M=0.4$ の場合の分布に極めて近いことは興味深い。

次に厚み分布がスパン方向に1次で変化する $I_{\max}=4$ と

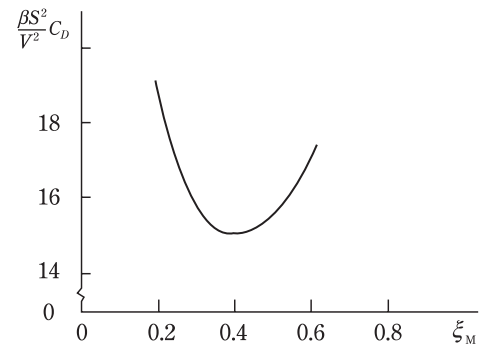
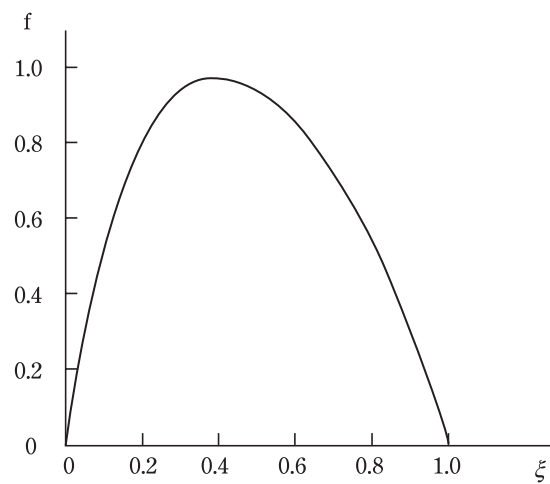


図6 ゴチック翼の換算抵抗係数

図7 ゴチック翼の体積一定の条件のみにおける最適厚み分布。 $I_{\max}=4, J_{\max}=0$ の場合。

$J_{\max}=1$ の場合を考えよう。最大厚み位置は同じく $(\xi_M, 1.0)$ に取った。この場合には最適化問題は ξ_M 0.3 の ξ_M に対してしか解を与えなかった(それ以外では負の厚みが予測された)。その結果は第8図(a), (b)に示されている。同図(a)は $\xi_M=0.2$ の場合であり、同図(b)は $\xi_M=0.3$ の場合である。 ξ_M が0.1しか変わらないのに得られた分布形は大きく違っており、デルタ翼の場合とずいぶん異なっている。

次に最大厚み位置を翼端 $(\xi_M, 1.0)$ から翼根部 $(\xi_M, 0)$ へ変えてみよう。 $(I_{\max}, J_{\max})=(3, 1)$ である。最適分布は第9図に示されている。この場合も最大厚み位置の変化による最適厚み分布の変化は大きい。また ξ_M が0.3より大きくなると最適化は上手く行かない。

5.4 アロー翼

第1図に示したようなダグラス・アロー翼について(6)式において $(I_{\max}, J_{\max})=(4, 0)$ とし、最大厚み位置を翼端 $(\xi_M, 1.0)$ とした場合の最適化問題を考えた。第10図(a)は ξ_M を0.2から0.6まで変えた時の最適分布を示す(スパン方向には分布形は変わらない)。 $\xi_M=0.2$ と0.3の場合には得られた厚み分布は二つの極値を持ち、翼表

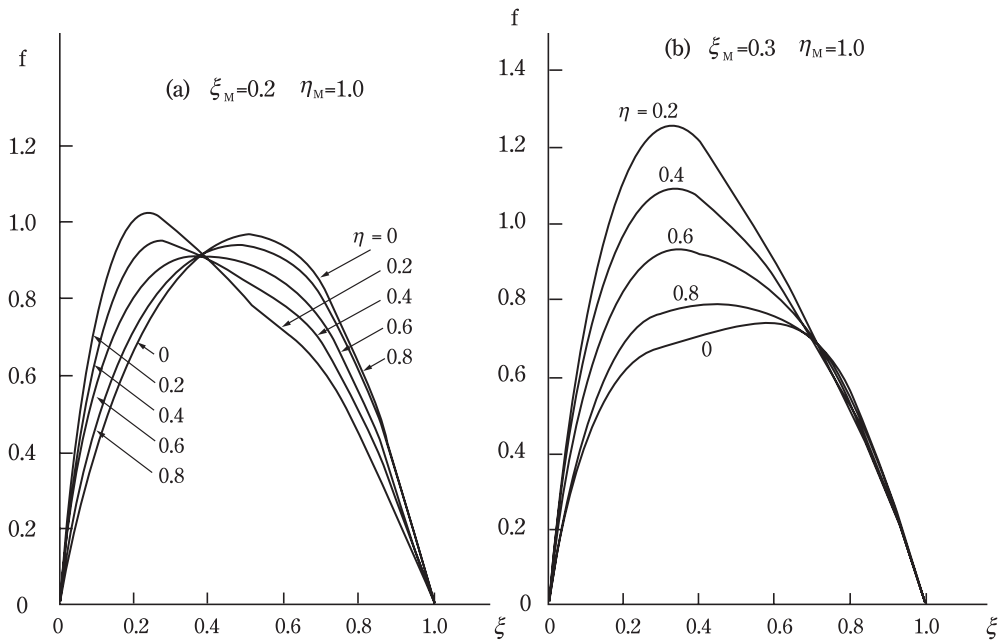


図8 ゴチック翼の最適厚み分布。 $I_{\max}=4$, $J_{\max}=1$ の場合。

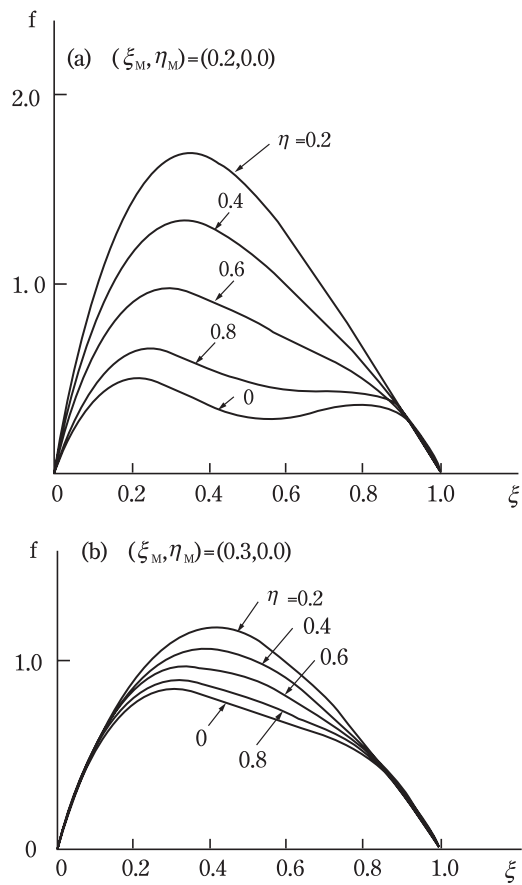


図9 ゴチック翼の最適厚み分布。
 $I_{\max}=3$, $J_{\max}=1$ の場合。

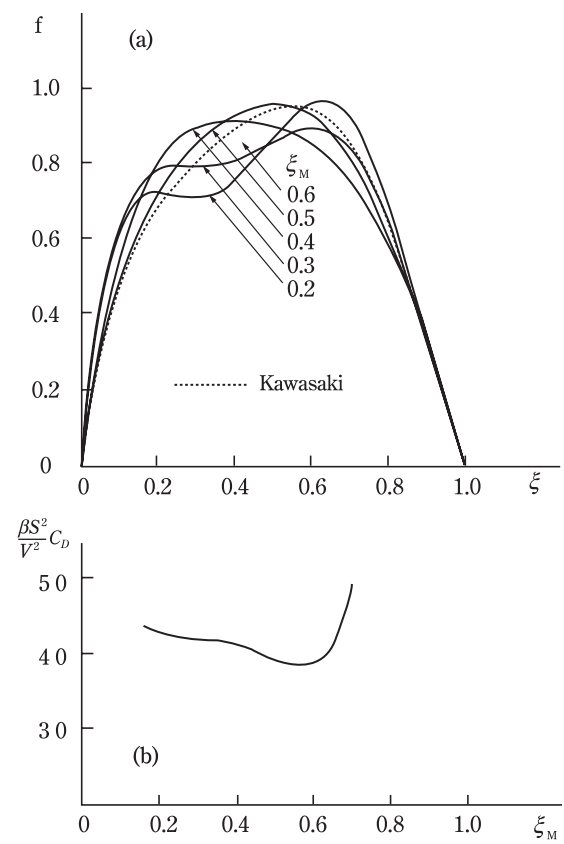


図10 ダグラス・アロー翼の (a) 最適厚み分布 $I_{\max}=4$, $J_{\max}=1$ の場合, (b) 換算抵抗係数

面に凹部を持っている。 ξ_M が 0.4 以上では良好な分布形が得られている。参考のために体積拘束条件のみを課した最適厚み分布も図中 (破線, Kawasaki) に示されている。同分布は $\xi_M = 0.57$ 付近に最大厚みを持っている。同図 (b) は換算抵抗の ξ_M による変化を示す。 ξ_M が 0.57 付近で抵抗値が最小になっている。上で述べたようにこの位置は体積一定の条件からのみ得られた分布のそれと一致する。

第 11 図は NAL SST 翼の場合である。同図 (a) は (6) 式において $(I_{\max}, J_{\max}) = (4, 0)$ とし、最大厚み位置として $(\xi_M, 1.0)$ を指定した場合の結果である。 $\xi_M = 0.4 \sim 0.6$ で良い形状が得られているが、 $\xi_M = 0.3$ 以下と 0.7 以上の場合には最適形状は凹部を持つ。これまでの計算例からもわかるように、あまり前方 (または後方) に最大位置を持つてくると、このように凹部が発生するようである。同図 (b) は換算抵抗を ξ_M に対してプロットしたものである。この場合には $\xi_M = 0.5$ 付近で抵抗は一番小さい。因みにこの翼平面形に biconvex 翼断面をつけた場合の換算抵抗は 44.77 で、 ξ_M が 0.35 から 0.62 までの翼がこれより小さい抵抗値を与える。

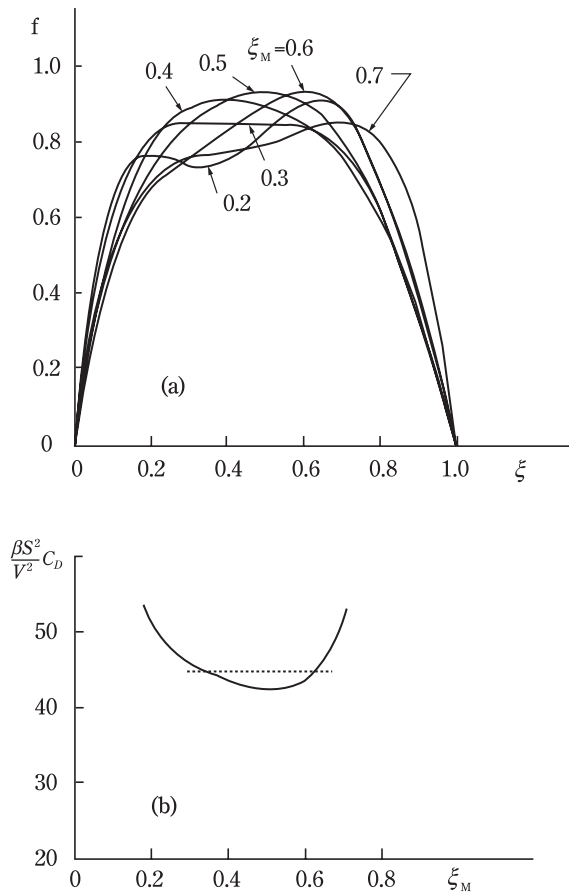


図 11 NAL SST 翼の (a) 最適厚み分布 $I_{\max}=4$, $J_{\max}=0$ の場合, (b) 換算抵抗係数

5.5 議 論

これまでの計算例からわかるように、我々の最適計算は、 $J_{\max}=0$ の場合は全ての考えている翼平面形において上手く行ったが、そうでない時は平面形に強く依存した。デルタ翼の場合には J_{\max} が 2 まで可能であったが、ゴチック翼では 1 まで、ダグラス・アロー翼の場合には J_{\max} が 0 の場合しか出来なかった。平面形状が複雑になるにつれ許容される J_{\max} の値は限られてくる。その理由は現在の所明らかではないが、無次元厚さのスパン方向の変化による体積分布の再配分が、形状が複雑になるにつれて困難になるからであろうと思われる。拘束条件として体積一定を課した場合の最適化でも事情は変わらないようである (Kawasaki)。これは無次元厚み分布 (の勾配) として (6) 式を使うことの限界であるかも知れない。それに反し I_{\max} は翼の平面形には殆ど影響されない。

次に最大厚み位置 ξ_M の許容範囲については組織的に調べていないので明確なことはいえないが、極端な前方もしくは後方に指定すると上手く行かないことが多い。これは空力的に考えても妥当であろう。0.3 位から 0.6 位までが実用的に許される範囲であろう。

6. 結 論

翼の体積と最大厚み位置を与えた時の最適厚み分布を求める数値計算法を開発した。この方法は線形超音速理論に基づいており、Kawasaki (Ref.10) の方法を拡張したものである。新しい拘束条件の導入により設計の可能性が非常に広がり、事実実用的に興味のある翼の族が生み出されている。デルタ翼、ゴチック翼およびアロー翼について例示的な計算を行った。スパン方向に無次元厚さ分布が変わらない場合 ($J_{\max}=0$) は、翼平面形にかかわらず最適化は上手く行く。実用化のためにはそれで十分であると思われる。無次元厚さ分布がスパン方向に変化する場合には、翼の平面形が複雑になるにつれ、最適翼の設計は難しくなる。

付録 I_i の解析的表現

Kawasaki¹⁰⁾ の論文にはミスプリントがある。ここではそれを訂正して示す。

$$I_i(x, y, y_1) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{l(y_1/s_0)}^{x-\beta(y-y_1)} \frac{[x_1 - l(y_1/s_0)]^i}{[(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2]^{1/2}} dx_1 \quad (A1)$$

この式の分子は

$$[x_1 - l(y_1/s_0)]^i = [x - l(y_1/s_0) - (x - x_1)]^i \quad (A2)$$

と書けるから、 I_i に含まれる積分は次の積分の線形和として与えられる：

$$J_i = \int \frac{(x-x_1)^i}{[(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)]^{1/2}} dx_1 \quad (A3)$$

それらは解析的に次のように積分される：

$$\begin{aligned} J_0 &= -\ln|x-x_1 + \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2}| \\ J_1 &= -\sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2} \\ J_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ (x-x_1)\sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. \beta^2(y-y_1)^2 \ln|x-x_1 + \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2}| \right\} \\ J_3 &= -\frac{1}{3} \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2} [(x-x_1)^2 + 2\beta^2(y-y_1)^2] \\ J_4 &= -\frac{1}{8} \left[\left\{ 2(x-x_1)^3 + 3(x-x_1)\beta^2(y-y_1)^2 \right\} \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2} \right. \\ &\quad \left. + 3\beta^4(y-y_1)^4 \ln|x-x_1 + \sqrt{(x-x_1)^2 - \beta^2(y-y_1)^2}| \right] \end{aligned} \quad (A4)$$

これらの J_i を (A1) に代入し、 x に関する微分を実行すると I_i に対して次の式を得る：

$$\begin{aligned} I_0(x, y, y_1) &= 1/R \\ I_1(x, y, y_1) &= -\ln|\beta(y-y_1)| + \ln|x-l(y_1/s_0) + R| \\ I_2(x, y, y_1) &= 2[x-l(y_1/s_0)] [-\ln|\beta(y-y_1)| + \ln|x-l(y_1/s_0) + R|] - 2R \\ I_3(x, y, y_1) &= \left[3(x-l(y_1/s_0))^2 + \frac{3}{2}\beta^2(y-y_1)^2 \right] [-\ln|\beta(y-y_1)| + \\ &\quad \ln|x-l(y_1/s_0) + R|] - \frac{9}{2}(x-l(y_1/s_0))R \\ I_4(x, y, y_1) &= [x-l(y_1/s_0)] [4(x-l(y_1/s_0))^2 + 6\beta^2(y-y_1)^2] \times \\ &\quad [-\ln|\beta(y-y_1)| + \ln|x-l(y_1/s_0) + R|] - 4R \left[\frac{1}{3}R^2 + \beta^2(y-y_1)^2 \right] \\ &\quad - 6[x-l(y_1/s_0)]^2 R \end{aligned} \quad (A5)$$

ここで

$$R = \sqrt{(x-l(y_1/s_0))^2 - \beta^2(y-y_1)^2} \quad (A6)$$

参考文献

- 1) Lord, W.T. and Brebner, G.G: Supersonic flow past slender pointed wings with 'similar' cross sections at zero lift. Aero. Quart. 10(1959), pp.79-102
- 2) Weber, J.: Some notes on the zero-lift wave drag of slender wings with unswept trailing edge. Aeronautical Research Council R&M 3222 (1959)
- 3) Eminton, E.: Pressure distribution at zero lift for delta wings with rhombic cross sections. Aeronautical Research Council C.P.525 (1960)
- 4) Smith, J.H.B. and Thomson, W.: The calculated effect of the station of maximum cross-sectional area on the wave drag of delta wings. Aeronautical Research Council C.P. 606 (1962)
- 5) Beane, B.: The characteristics of the supersonic wings having biconvex sections. J. Aeronaut. Sci. 18 (1951) pp.7-20.
- 6) Grant, F.C. and Cooper, M.: Tables for the computation of wave drag of arrow wings of arbitrary airfoil section. NACA TN 3185 (1954)
- 7) Lighthill, M.J.: The wave drag at zero lift of slender delta wings and similar configurations. J. Fluid Mech. 1 (1956) pp.337-348.
- 8) Strand, T.: Minimum Wing Wave Drag With Volume Constraint. Jour. Aero. Sci, Vol.27, No.8 (1960), pp.615-619.
- 9) Anliker, M.: A Numerical Method of Evaluating the Velocity Potential and the Minimum Drag Warping of Arbitrary Supersonic Wings. ZAMP, vol.X (1959), pp.1-15.
- 10) Kawasaki, T.: Favorable Thickness Distributions

- for Wings in Supersonic Flow. AIAA Journal 5 (1967), pp.439-445
- 11) Middleton, W.D. and Lundry, J.L.: A Computational system for Aerodynamic Design and Analysis of Supersonic Aircraft Part 1- General Description and Theoretical Development. NASA CR-2715 (1976)
- 12) Puckett, A.E.: Supersonic Wave Drag of Thin Airfoils. Jour. Aero. Sci. 13 (1946), pp.475-484
- 13) Jones, R.T.: The Minimum Drag of Thin Wings in Frictionless Flow. Jour. Aero. Sci. 18 (1951), pp.560-565
- 14) Lock, R.C. and Bridgewater, J.B.: Theory and Aerodynamic Design for Swept- Winged Aircraft at Transonic and Supersonic Speeds. Prog. Aero. Sci. 8 (1967), pp.139-228