

# 残差切除法を用いた高精度流れ解析手法について

菊地一雄(1), 西澤敏雄(1), 関根義人(2)  
(1)宇宙航空研究開発機構, (2)エイ・エス・アイ総研

## A High Accuracy Flow Analysis Method using Residual Cutting Algorithm

Kazuo KIKUCHI, Toshio NISHIZAWA, Yoshihito SEKINE

### ABSTRACT

The goals of the present study are to develop a numerical flow analysis method based on a high-accuracy algorithm and to simulate flow field around realistic shape like cascades of gas turbines with numerical method. In this paper, a high-accuracy algorithm which forms the basis of the high-accuracy flow simulation is described. In this algorithm, firstly the pressure gradient in the source term of Poisson equation is corrected so that the residual of the equation of continuity in the next time should be zero. Then, the pressure fields in next time iteration are calculated based on the corrected pressure gradient. Finally, the momentum conservation equations are solved with the new pressure field. The target accuracy is realized by repeating the procedure above. In our numerical solver, Residual Cutting Algorithm, which JAXA has developed, is adopted as matrix solver. Three cases of incompressible flow are analyzed to verify our numerical code; Poiseuille flow between parallel flat plates, flow in a cascade of flat plate blades, and square cavity flow. The results are good and the applicability of our high-accuracy method for simulated flow fields is demonstrated.

### 1. はじめに

本研究の目的はまず高精度な流れ解析法の開発と数値解析コードの作成と検証を行うこと、更に翼列等の実形状の流れ解析を行うことにある。

本研究報告では高精度流れ解析法の根幹となる高精度化手法について述べ、数値解析コードのコアであるマトリックスソルバについて述べる。次にこの解析法に基づき作成した数値解析コードの検証計算結果について報告する。

著者らが採用した高精度化手法は、連続の式の次回残差をゼロにするために圧力のポアソン方程式のソース項の圧力勾配値を修正して新たな圧力場を求め、再度運動量保存則を解くことにより、逐次的に目標精度を達成するというものである。

数値解析コードのマトリックスソルバとして当機構が開発した残差切除法を使用している。この解法は残差方程式をSORやADI法のごく少ない反復により求めた近似摂動量を、過去の摂動量との線形結合により最適化する方法である。

数値解析コードの検証は非圧縮性流れ、直交格子により平行平板間のポアズイユ流れ、平板翼列、正方形キャビティで行った。検証結果は良好で高精度化手法の有効性を確認した。

### 2. 高精度化手法

流れの高精度解析を実現するための高精度化の論理と手順について以下に述べる。

#### 2.1 高精度化の論理

本手法で用いる基礎式は、運動量保存則、圧力のポワソン式および連続の式である。

運動量保存則を解いて求めた近似速度場から連続の式の残差  $C$  を計算し、この残差  $C$  を  $0$  とする速度場  $u_\ell$  を求めるために圧力場を修正することを考える。又、各方程式は一般座標系に適合した離散化を行っているが、ここでは  $x, y, z$  座標系の方程式を使用して説明を行う。

座標軸と速度をそれぞれ  $x_\ell, u_\ell$  ( $\ell=1, 2, 3$ ) とすれば  $x_\ell$  方向の運動量保存則は (2-1) 式となる。

$$\rho \frac{\partial u_\ell}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_\ell} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} \quad \dots (2-1)$$

今、反復  $n$  回目の近似速度  $u_\ell = u_\ell^n$  から圧力勾配を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_\ell} &= -\rho \frac{\partial u_\ell}{\partial t} - \rho u_j \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} \\ &= -\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{その他の項} \quad \dots (2-2) \end{aligned}$$

この式の両辺の発散、すなわち  $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}$  をとれば圧力のポアソン方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial p}{\partial x_\ell} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \text{その他の項} \right) \quad \dots (2-3-a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial p^{old}}{\partial x_\ell} \right) + \delta \quad \dots (2-3-b)$$

\* の項は非圧縮の連続の式になっている。

$\delta$  は運動量保存則の収束に応じた誤差。

(2-1) 式から得られた速度  $u_\ell^n$  と (2-2) 式から  $\left( \frac{\partial p}{\partial x_\ell} \right)_{cal}$  が得られる。運動量保存則が高精度に解かれて

いれば再計算した圧力勾配は (2-1) 式に使用した圧力勾配  $\frac{\partial p^{old}}{\partial x_\ell}$  と近似的に等しくなる。この差を  $\delta$  とすれば (2-3-b) が成り立つ。

(2-3-b) の圧力のポアソン方程式と運動量保存則を連立して解いても収束精度の範囲内で圧力場と速度場は変更されない。

(2-1) 式から得られた速度  $u_\ell^n$  を適用した連続の式の残差  $C$  は 0 とならない。

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = C \neq 0 \quad \cdot \cdot \quad (2-4)$$

(2-3) 式の \* で示した項は速度の発散、すなわち非圧縮性流れの連続の式である。そこで \* の項を 0 とするよう強制して求めた圧力勾配をポアソン方程式のソース項とする。

(2-3) 式のソース項を修正した圧力のポアソン方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial p}{\partial x_\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial p^{old}}{\partial x_\ell} \right) - \left\{ -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_\ell^n}{\partial x_\ell} \right) \right\} \quad \cdot \cdot \quad (2-5)$$

となる。この式から求めた  $p$  を  $p^{new}$  として、運動量保存則を解くことにより連続の式の残差  $C$  を逐次的に 0 とすることができる。

## 2.2 計算手順

ある時間ステップでの計算手順を図 2-1 のフローチャートに従って説明する。以下の検証計算では、各方程式の収束判定値  $\varepsilon$  としては  $10^{-13}$  を与えている。

- 1) 圧力と速度の初期値と境界条件を与える。速度の初期値は連続の式を満たしているものとする。(例えば、全領域の速度を 0 とする)
- 2) 運動量保存則の収束解  $u_\ell$  を後で述べるマトリックスソルバ[残差切除法]により求める。

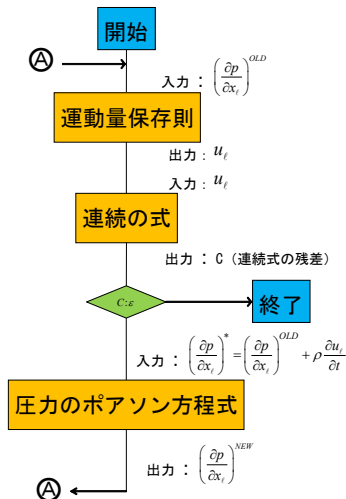


図 2-1 時間ステップ内の計算フローチャート

- 3) 連続の式の残差  $C$  を求める。
- 4) 連続の式の収束判定を満たせば終了する。未収束の時は次の手順に進む。
- 5) 圧力のポアソン方程式を解き、圧力  $p$  を求め、差分により圧力勾配を求め手順 1) にもどる。

## 3. マトリックスソルバ[残差切除法]

本解法は近似解  $U^m$  にどのような修正を施せば、残差が小さくなるかという考え方で反復的に解を求めていく。

### 3.1 残差方程式の定式化

運動量保存則や圧力のポアソン方程式などの微分方程式を離散化して得られる差分方程式は

$$A \cdot U = f \quad \cdot \cdot \quad (3-1)$$

ここで  $A$  は係数マトリックス、 $U$  は未知数、 $f$  はソース項である。

今、式 (3-1) の近似解を  $U^m$ 、残差を  $r^m$ 、摂動量を  $\phi$  とすれば

$$r^m = f - A \cdot U^m \quad \cdot \cdot \quad (3-2)$$

$$U = U^m + \phi \quad \cdot \cdot \quad (3-3)$$

と書け、式 (3-1)、(3-2)、(3-3) から残差方程式 (3-4) が得られる。

$$A \cdot \phi = r^m \quad \cdot \cdot \quad (3-4)$$

$U$  に関する境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U &= U_B & : & \text{第一種境界} \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_l} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_l} \right)_B & : & \text{第二種境界} \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (3-5)$$

添字  $B$  は境界上の値であることを示す

又、近似解  $U^m$  が境界条件を満たしていれば  $\phi$  に関する境界条件は以下になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0 & : & \text{第一種境界} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} &= 0 & : & \text{第二種境界} \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (3-6)$$

### 3.2 残差切除法のアルゴリズム

最初に残差方程式 (3-4) を ADI 法などの数回の反復で近似解  $\psi^m$  を求める。次に残差ノルムを最小とする合成摂動量  $\phi^m$  を (3-7) 式から、新しい近似解  $U^{m+1}$  を (3-8) 式から求める。

$$\phi^m = \alpha_1 \psi^m + \sum_{l=2}^L \alpha_l \phi^{m-l+1} \quad \cdot \cdot (3-7)$$

$$U^{m+1} = U^m + \phi^m \quad \cdot \cdot (3-8)$$

ここで  $\alpha_l$  ( $l=1, 2, 3, \dots, L$ ) は残差最小化係数で、 $l$  ごとの定数である。 $\phi^m$  は残差ノルム  $\|r^{m+1}\|$  を最小とする合成摂動量である。

新しい近似解  $U^{m+1}$  の残差  $r^{m+1}$  は式 (3-2)、(3-7)、(3-8) から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} r^{m+1} &= f - A \cdot U^{m+1} \\ &= f - A \cdot U^m - A \phi^m \\ &= r^m - \alpha_1 A \cdot \psi^m - \sum_{l=2}^L \alpha_l A \cdot \phi^{m-l+1} \quad \cdot \cdot (3-9) \end{aligned}$$

よって残差ノルムは次式で与えられ、 $\alpha_l$  は最小二乗法により求める。

$$\|r^{m+1}\| = \sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k \left\{ r^m - \alpha_1 A \cdot \psi^m - \sum_{l=2}^L \alpha_l A \cdot \phi^{m-l+1} \right\}^2} \quad \cdot \cdot (3-10)$$

さて、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$  が定まれば式 (3-7) から  $\phi^m$  が、式 (3-8) から新しい近似解  $U^{m+1}$  が求められる。残差方程式 (3-4) に戻ってこのプロセスを繰り返すことによって、残差のノルムを 0 又は最小にする解  $U^\infty$  に収束する。

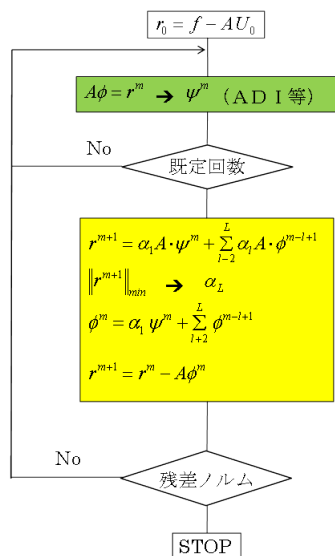


図 3-1 残差切除法のフローチャート

### 3.3 計算手順

本解法の計算の手順は次のようになる。(図 3-1 参照)

- 1) 初期近似値を与える。
- 2) 残差  $r^m = f - A \cdot U^m$  を求める。
- 3)  $A \cdot \phi = r^m$  を ADI 法等の最小単位の反復で近似解  $\psi^m$  を求める。
- 4) 残差最小化係数  $\alpha_l$  を計算する。
- 5)  $\phi^m = \alpha_1 \psi^m + \sum_{l=2}^L \alpha_l \phi^{m-l+1}$ ,  $U^{m+1} = U^m + \phi^m$  を求める。

これで一巡し、2)～5)の手順を繰り返すことによって  $\phi \rightarrow 0$ ,  $\|r^{m+1}\| \rightarrow 0$ ,  $U^m \rightarrow U^\infty$  に、又ノイマン

問題の場合は  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi_l} \rightarrow 0$ ,  $\|r^{m+1}\|$  は取り得る最小値に、

$U^m$  は  $U^\infty$  に収束する。

### 4. ポアズイユ流れと平板翼列流れによる検証結果

本数値解析コードの検証計算例として、平行平板間のポアズイユ流れと平板翼列流れについて精度検証を行った。

計算条件を表 4-1 に、また、使用した計算格子を図 4-1 に示した。流れは低レイノルズ数の非圧縮性領域の流れである。

表 4-1 計算条件

入口断面	0.005 m
流路長さ	0.025 m
流速	0.01 m/s
流れの動圧	3.23 Pa
レイノルズ数	3.42
格子点数	101×21×21 131×31×31

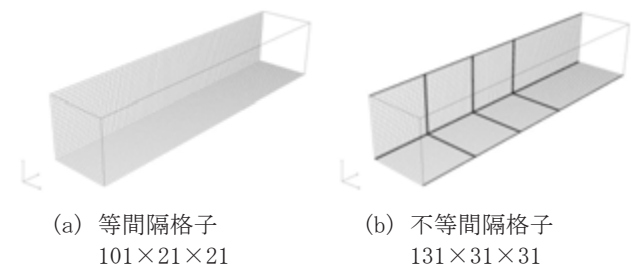


図 4-1 計算格子

#### 4.1 平行平板間のポアズイユ流れ

ポアズイユ流れの境界設定を図 4-2 に示した。上下の青色部が平板壁面、左右の境界はすべり壁である。入口速度分布はポアズイユ流れの厳密解、出口速度はノイマン条件を与える。又、速度の過去値としてポアズイユ流れの厳密解を与え、圧力の初期値を全領域でゼロとした。よってこの計算は時間反復なしに厳密解に収束するべきものである。

図 4-3 に連続の式の残差履歴を、図 4-4 に初回反復時と収束時の流量の主流方向分布を示した。残差ノルムは単調に減少しており約 1300 反復で収束している。

無次元流量は初回反復時には入口で 1.0、下流では約 0.999 であるが、収束時には入口から出口まで 1.0 となっている。

図 4-5 には、収束時の圧力計算値と厳密解の差を示した。その差は全点で  $10^{-11}$  以下であり、十分な収束精度を示している。

圧力の主流方向分布の変化を図 4-6 に示した。反復が進むにつれて圧力が下流方向に直線的に降下する分布となっており、収束時には図 4-5 に示したように厳密解と一致する。入口、出口の圧力差は無次元で -11.686、有次元で 37.777Pa であり、レイノルズ数から算出される厳密解と一致する。

最後に平板間の主流速度分布を図 4-7 に示した。グラフは入口から出口までの速度分布を重ね書きしており、一定であることを示している。

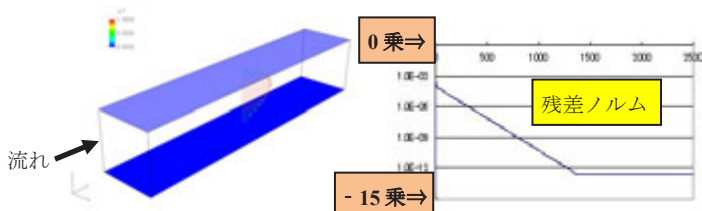


図 4-2 ポアズユ流れの境界設定  
青：平板壁面

図 4-3 連続の式の残差履歴  
横軸：時間ステップ内の反復回数

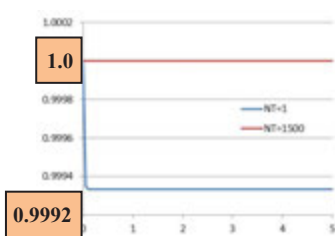


図 4-4 流量の主流方向分布  
青：初期 赤：収束時

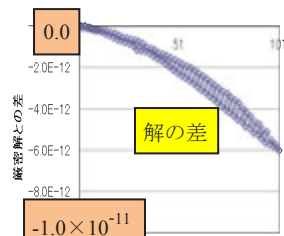


図 4-5 圧力の計算値と厳密解の比較  
横軸：主流方向位置

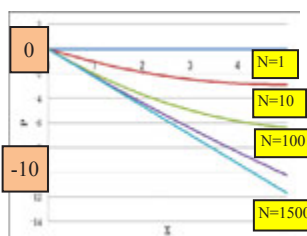


図 4-6 圧力分布の逐次反復回数 N による変化

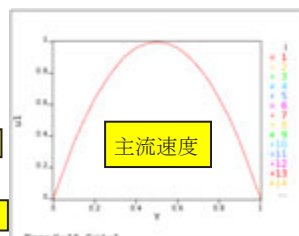


図 4-7 収束時の平板間速度分布  
反復回数 1500

## 4.2 平板翼列の流れ

平板翼列流れの境界設定を図 4-8 に示した。青色の部分が翼及び壁面である。入口速度は一樣流、出口速度はノイマン条件である。流入部上下境界と左右の境界はすべり壁条件である。速度の過去値は一樣流、圧力の初期値は 0 を与えている。この計算は 1 時間ステップのみで時間進行をしていない。

まず、計算の収束性についてみると、図 4-9 のように連続の式の残差ノルムは単調減少して約 4000 反復で収束している。初期残差ノルムは  $10^{+1}$ 、収束時には  $10^{-9}$  である。

次に流量の分布図 4-10 を見てみると初期には入口から上下壁の開始位置までは 1.0、以後前縁 (LE) までは 0.985、後縁 (TE) までは 0.97、以後出口まで 0.985 となっている。収束時には前、後縁にわずかに流量の少ない部分がみられるものの他の断面では 1.0 となっている。

主流方向の圧力分布を見てみると、翼の前縁、後縁にピークが表れている。ピークは翼面を含む境界面内にある。

速度の主流方向分布を図 4-12 に、翼間分布を図 4-13 に示した。

図 4-12 の主流方向速度分布を見ると、翼面で境界層が発達していることがわかる。

図 4-13 の翼間分布では境界層の影響により内側の主流速度が加速されていることがわかる。

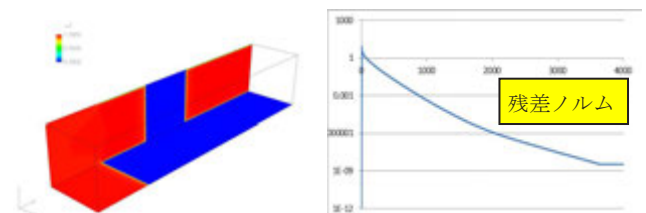


図 4-8 平板翼列の境界設定  
青：翼及び壁面  
赤：すべり壁

図 4-9 連続の式の残差履歴

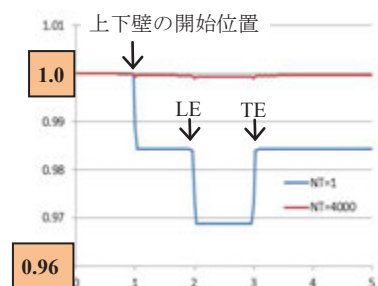
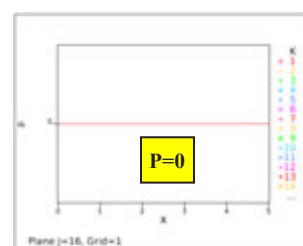
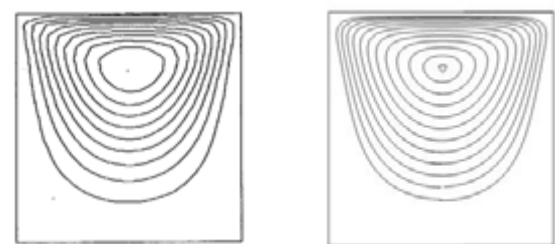
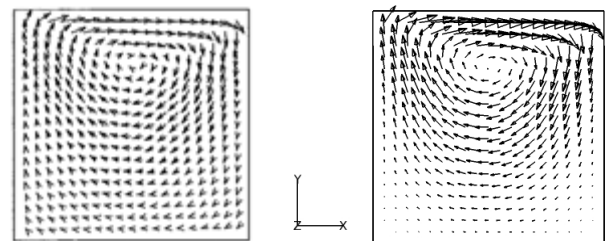
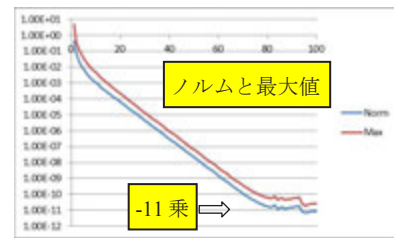
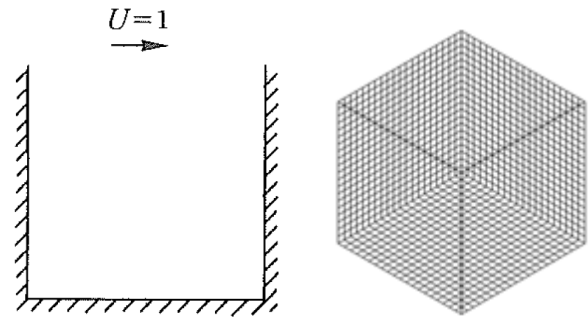
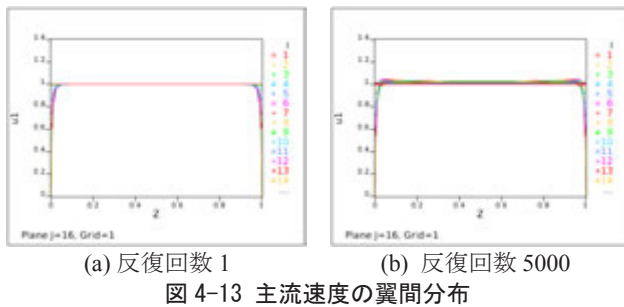
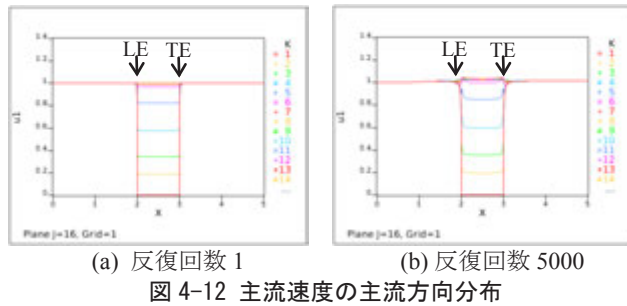
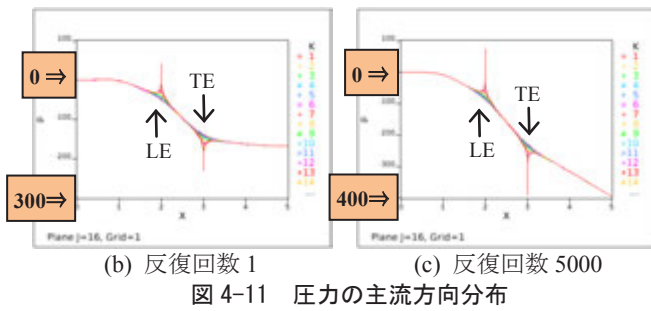


図 4-10 流量の主流方向分布



(a) 初期分布





## 5. キャビティ流れによる検証

次に正方形キャビティ内の流れによる検証について述べる。計算条件を表 5-1 に、キャビティの模式図と計算格子を図 5-1 に示した。キャビティは模式図の上面が左から右へ無次元速度 1.0 で移動している。下面及び左右の壁は固定壁であり、紙面の垂直な方向に溝状の形をしている。溝の両端にはすべり壁条件を与えている。

計算開始時の速度過去値は 0、速度初期値は上面 = 1.0、その他は 0。圧力の初期値は全領域で 0 とした。

時間ステップを進めるにつれて上面に引きずられ内部でも徐々に渦が形成される。

図 5-2 に連続の式の残差のノルムおよび最大値の時間履歴を示した。残差はいずれも単調に減少し、80 ステップで収束している。

文献 4 との比較を図 5-3、4 に示した。速度ベクトル、流線を見ると両者は定性的に一致している。

表 5-1 計算条件

正方形の一辺の長さ	0.01 m
流速	0.015 m/s
レイノルズ数	10
格子点数	21×21×21
無次元時間刻み	0.01

## 6. まとめ

高精度化アルゴリズムの有効性を確認するために、平行平板間ポアズイユ流れ等について非圧縮性流れ、直交格子により検証計算を行った。

検証結果から以下の点がわかった。

1. 連続の式の残差の収束は単調で停留後は再び残差が増加することはなかった。
2. 時間ステップを進めない定常計算においてポアズイユ流れで収束時の残差ノルムは  $10^{-13}$  となり、平板翼列流れでは  $10^{-9}$  となった。又、ポアズイユ流れの解は厳密解と一致した。

3. 時間ステップを進める非定常計算により行ったキャビティ流れでは時間ステップ収束時の残差ノルムは  $10^{-11}$  であり、計算結果は文献とも定性的に一致し妥当であった。

4. よって高精度化手法の有効性を確認できた。

今後は対象を非直交格子に拡張し検証を進めていく予定である。

本報告の作成にあたり次の方々にご協力いただきました。

本原稿の作成には JAXA 研究開発本部の賀澤 順一研究員、計算結果の可視化にはエー・エス・アイ総研の石山 毅氏の両氏の援助に対してここに名前を記して感謝いたします。

#### 参考文献

- (1) 田村敦宏・菊地一雄・高橋匡康, だ円形境界値問題の数値解法—残さ切除法について, 日本機械学会論文集(B編), 62 巻 604 号, (1996-12), 4076-4083.
- (2) Atsuhiko Tamura, Kazuo Kikuchi, and Tadayasu Takahashi. Residual Cutting Method for Elliptic Boundary Value Problems, Journal of Computational Physics 137, 247-264 (1997) Article No.CP975807.
- (3) 申痢録・井小萩利明・大宮司久明, 定常非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の曲線座標格子に適用できる効率的差分スキーム, 日本機械学会論文集(B編), 56 巻 525 号, (1990-5), 89-1022A.
- (4) 川村哲也・川原睦人・平野廣和・登坂宜好・池川昌弘, 非圧縮流体解析, 東京大学出版会, 数値流体力学シリーズ 1, (1995).