

有限差分法における保存型空間メトリックの空間対称性と幾何学的解釈

阿部圭晃 (東大), 飯塚宣行 (東大), 野々村拓 (ISAS/JAXA), 藤井孝藏 (ISAS/JAXA)

Geometric interpretations and spatial symmetry property of metrics in conservative form for high-order finite difference scheme

by

Yoshiaki Abe, Nobuyuki Iizuka, Taku Nonomura, and Kozo Fujii

ABSTRACT

When the body-fitted coordinate system is adopted, some discretized forms of transform metrics break the freestream preservation which is so-called geometric conservation law (GCL). The GCL identities consist of surface closure law (SCL) and volume conservation law (VCL), and the SCL identity is focused. One of the techniques for the discretization of spatial metrics is to rewrite the analytical expression of spatial metrics into asymmetric-conservative forms proposed by Thomas and Lombard, which are extended into symmetric-conservative forms by Vinokur and Yee. In this research, we present the geometrical meanings of discretized symmetric-conservative forms with the use of any higher-order finite difference method.

1. はじめに

圧縮性流れの数値計算において境界適合格子を用いる際、計算空間と物理空間の座標変換に対して定義されるメトリックとヤコビアンは GCL (幾何学的保存則) [6] を満足する事が要請される。GCL はさらに SCL (面積保存則) と VCL (体積保存則) に分けられ [10]、本研究ではこのうち SCL に着目する。SCL を離散式レベルで満足する為に、様々な空間メトリックの離散化手法が提案されてきた。古くは、有限差分法に特殊な平均操作を組み合わせる事で適切な空間メトリックの離散式を得る手法 [5] が Pulliam と Steger によって導入された。また、空間メトリックの解析式を保存型表現に書き換え、空間 2 次精度中心差分を用いる事で SCL を離散的に満足する手法 [6] が Thomas と Lombard によって提案されている。また、有限体積法的な観点から適切な空間メトリックの離散式 [7] [3] を得る手法も Vinokur によって提案されている。しかし、Pulliam と Steger が提案した特殊な離散化手法や Vinokur の有限体積法に基づく手法はいずれも空間的に低次精度の離散化手法であり、空間的に高次精度の流体数値計算を要求される場合には精度が十分でない。そこで、空間的に高次精度の差分を用いる場合であっても SCL を満足するような空間メトリックの評価方法が、Visbal と Gaitonde [9] [6] によって導入されている。Visbal と Gaitonde は、Thomas らの提案した空間メトリックの保存型表現が、特定の条件下で任意の有限差分法に対し SCL を離散的に満足する事を数値実験的に確かめた。Vinokur と Yee [8] はこれに数学的な証明を与え、さらに座標不変性の観点から空間的な対称性を導入した保存型表現を導入した。なお VCL については、時間メトリックとヤコビアンに対して空

間対称性を持つ保存形式が著者らによって最近導入された [1] 本研究では、Visbal と Gaitonde が用いた空間メトリックの保存型表現を非対称保存型メトリック (*asymmetric-conservative metric*) と呼び、Vinokur が座標不変性を導入した表現を対称保存型メトリック (*symmetric-conservative metric*) と呼ぶ。

空間メトリックは、解析的には物理空間において面積ベクトルを各平面に射影した量であり、このような幾何学的解釈は有限体積法的な観点から空間メトリックを離散化する際の拠り所となる。すなわち、有限体積法的な観点からは、ある格子点の持つ空間メトリックはその格子点周りのセルの表面積を各平面に射影した量として導入する。現在、保存型メトリックは空間的に高次の有限差分法の下で広く用いられている。しかし、この保存型メトリックの離散式が、幾何学的にどのような意味を持つのかを考察した例は我々の知る限り存在しない。そこでまず、従来の有限体積法による離散化との比較の為、保存型メトリックに空間 2 次精度の離散化を施して得られる幾何学構造を追求する。その為、有限体積法を基にした空間メトリックの離散式の持つ幾何学構造をまとめ、空間 2 次精度で離散化された保存型メトリックが有する幾何学構造との対応を整理する。また、上記の空間 2 次精度の離散化を高次精度有限差分法に基づく離散化に拡張した場合に保存型メトリックが幾何学構造を持ちうるのかを確認し、空間的な対称性の有無による保存型メトリックの離散式の違いを調べる。

2. 計算座標系と支配方程式

ここでは物理座標系と境界適合座標系の導入を行う。まず、物理空間における時間と物理座標成分を $\{t, x, y, z\}$ 、計算空間での時間と境界適合座標成分を

$\{\tau, \xi, \eta, \zeta\}$ と定義し、これらの間に

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z), \quad (1)$$

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta), \quad (2)$$

$$t = \tau, \quad (3)$$

なる関係を仮定する。ここで、 $\{t, x, y, z\}$ は流れの代表時間と代表長さで無次元化されている。物理空間から計算空間への座標変換行列を定義し、その成分を $\partial\xi/\partial x = \xi_x$ のように書くと、空間メトリック ξ_x, η_x, ζ_x は

$$\xi_z/J = x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta, \quad (4)$$

$$(Non-cons-met.) \quad \eta_z/J = x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta, \quad (5)$$

$$\zeta_z/J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad (6)$$

と導かれる。ここで、 $(Non-cons-met.)$ は *nonconservative metric*, すなわち非保存型の空間メトリックを意味する。 J は変換のヤコビアンであり、具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} 1/J &\equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \\ &= x_\xi y_\eta z_\zeta - x_\eta y_\xi z_\zeta + x_\zeta y_\xi z_\eta \\ &\quad - x_\xi y_\zeta z_\eta + x_\eta y_\zeta z_\xi - x_\zeta y_\eta z_\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

のように表現される。その他の空間メトリックも同様に定義されるが、ここでは省略する。

圧縮性 Euler 方程式は境界適合座標系を用いて以下のように表現され、これに理想気体の状態方程式を加えて方程式系が閉じる。ここで $\mathbf{u} = (u, v, w)$, e, p はそれぞれ、物理空間における流速、単位体積当たりの全エネルギー、圧力であり、方程式中の変数は基準長、基準状態における密度と音速によって無次元化されている。また、 $\mathbf{U} = (U, V, W)$ は反変速度と呼ばれる。

$$\hat{Q}_\tau = -\hat{E}_\xi - \hat{F}_\eta - \hat{G}_\zeta, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e+p)U \end{bmatrix}, \\ \hat{F} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e+p)V \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e+p)W \end{bmatrix}, \\ U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \end{aligned}$$

3. 保存型空間メトリックの導入

3-1 保存型空間メトリックの解析表現

境界適合座標系で記述された支配方程式は解析的には保存則を満たす形式であるが、座標変換行列の成分を含む項を適切に離散化しなければ、その過程で保存

則が破られ正しく数値計算を行えない。その為、一様流保存性を維持する事を基準とした評価法が知られており、空間メトリックは以下の恒等式で表現される面積保存則 (SCL) を満たす事を要請する。

$$(SCL)$$

$$(\xi_x/J)_\xi + (\eta_x/J)_\eta + (\zeta_x/J)_\zeta = 0, \quad (9)$$

$$(\xi_y/J)_\xi + (\eta_y/J)_\eta + (\zeta_y/J)_\zeta = 0, \quad (10)$$

$$(\xi_z/J)_\xi + (\eta_z/J)_\eta + (\zeta_z/J)_\zeta = 0, \quad (11)$$

なお、SCL は数学的には微小体積素の表面が閉じている事を表現する恒等式である。離散化に際しても SCL を恒等的に満足するように、様々な手法が提案されている。ここでは式 (6) で表現される空間メトリックを、以下のような保存型表現と呼ばれる表式に書き換える手法に着目する。

$$(Asym-cons-met.)$$

$$\xi_z/J = (x_\eta y)_\zeta - (x_\zeta y)_\eta,$$

$$\eta_z/J = (x_\zeta y)_\xi - (x_\xi y)_\zeta,$$

$$\zeta_z/J = (x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi, \quad (12)$$

$$(Sym-cons-met.)$$

$$\xi_z/J = \{(x_\eta y - y_\eta x)_\zeta + (y_\zeta x - x_\zeta y)_\eta\}/2,$$

$$\eta_z/J = \{(x_\zeta y - y_\zeta x)_\xi + (y_\xi x - x_\xi y)_\zeta\}/2,$$

$$\zeta_z/J = \{(x_\xi y - y_\xi x)_\eta + (y_\eta x - x_\eta y)_\xi\}/2, \quad (13)$$

ここで、 $(Asym-cons-met.)$ [6] [9] と $(Sym-cons-met.)$ [8] は各々、非対称および対称保存型メトリック (*asymmetric*, *symmetric conservative metrics*) を意味する。式 (12) と (13) に基づいて離散化を行った空間メトリックは、任意の線形な空間差分法の下で SCL を満足する [2]。非対称保存型メトリックは、Thomas と Lombard によって 2 次精度中心差分法の下で初めて導入された [6]。その後 Visbal と Gaitonde によって高次精度有限差分法の下へ拡張され、数値実験によりその有効性が確認された [9]。Vinokur と Yee はこれに数学的な証明を与え、非対称保存型メトリックに関する Visbal と Gaitonde の数値実験結果を裏付ける報告を行なっている [8]。Vinokur らはまた、座標不変性の観点から、空間的な対称性を導入した対称保存型メトリック (13) も導入した。

なおここでは省略するが、対称保存型メトリックは任意の線形な高次精度差分に対して SCL(9)–(11) を満足する (但し、同一方向の差分には同じ差分を用いなければならない [2])。

4. 空間 2 次精度で離散化された空間メトリックの幾何学的解釈

空間メトリック ζ_z/J は、物理空間における微小体積素の ζ 一定の面を、 z 一定の平面に射影した面積を表している。離散化された空間メトリック ζ_z/J に対しても、同様の幾何学的解釈を可能にするいくつかの手法が存在する。これらの手法はいずれも離散化された SCL を満足するものである。

本節では、有限体積・有限差分法の両観点から、空間

メトリック ζ_z/J を離散化した際の幾何学的解釈を与える。まず、有限体積法に基づく空間メトリック ζ_z/J の離散化手法: $FV1$ [7], $FV2$ を紹介する。その後、空間 2 次精度の有限差分法に基づいて非保存型メトリック (6), 保存型メトリック [(12), (13)] を離散化する手法: 2 次精度中心差分を用いた手法 ($R-FD$), $S-FDPS$, および $SFV2$ を導入し, それらの幾何学的解釈を示す。まず, 中心差分オペレータ $\delta_{2p}/\delta_{2p}\xi$ を (ξ_j, η_k, ζ_l) において,

$$\left(\frac{\delta_{2p}}{\delta_{2p}\xi} \phi \right)_{j,k,l} = \frac{\phi_{j+p,k,l} - \phi_{j-p,k,l}}{2p\Delta\xi} \quad (14)$$

と定義する。また, ξ 方向の平均オペレータは,

$$\bar{\phi}_{j,k,l}^{2p\xi} = \frac{\phi_{j+p,k,l} + \phi_{j-p,k,l}}{2}, \quad (15)$$

と定義する。同様に, η, ζ 方向の中心差分・平均オペレータも導入出来るが, ここでは省略する。なお, 式 (14),(15) 内の p は, 本節では 1 もしくは 1/2 を採るものとする。

4-1 有限体積法からのアプローチ

有限体積法に基づく離散化は, 空間メトリックの解析式を直接離散化したものではなく, 数学的に定義される微小体積素を離散空間での格子セルと同一視するというアナロジーによっている。これにより, セルの各面の面積を正しく評価出来れば, セル表面が閉じていなければならないという SCL の離散式レベルでの要請を満足すると期待される。

4-1-1 $FV1$

空間メトリック ζ_z/J の離散化を以下のように有限体積的な観点から行う [7]。本研究ではこの離散化手法を, $FV1$ [7] と呼ぶ。

$$(FV1): \quad \zeta_z/J|_{j,k,l} \simeq \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} S_0. \quad (16)$$

図 1(a) の各点は, $\zeta = \zeta_l$ 平面上にある格子点を xy 平面に射影したものであり, S_0 は図 1(a) に示す四辺形の面積を表している。すなわち $FV1$ では, 空間メトリック ζ_z/J を S_0 の 4 分の 1 として与えており, 各辺の中点の座標情報は欠落している。

4-1-2 有限体積法からのアプローチ: $FV2$

以下のように ζ_z/J を離散化する手法を $FV2$ と定義する。

$$(FV2): \quad \zeta_z/J|_{j,k,l} \simeq \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4). \quad (17)$$

$FV2$ では, 空間メトリック ζ_z/J を S_1, S_2, S_3, S_4 の平均値として与えている。 S_1, S_2, S_3, S_4 は図 1(b) に示す 4 つの四辺形の面積を表す。 $FV2$ は $FV1$ と異なり, 注目する格子点を含む周囲 9 点全ての座標情報を取り入れて空間メトリックを評価する手法である。なお, 複雑な格子形状を有する流体数值計算に $FV2$ を

用いる場合, $FV1$ を用いた場合よりも安定に計算出来る事が経験的に分かっている。

4-1-3 有限差分法からのアプローチ: $R-FD$

先の節で導入したセル各面の面積の評価手法は $FV1$ や $FV2$ 以外にも考えられ, より高精度を実現するような離散式も構築可能である。しかし, セル各面の面積を求める事を抛り所にする限り, 元々の空間メトリックが持つ解析式に対してどのような空間精度で離散化が行われているかを正確に知る事は困難である。そこで, 空間メトリックの解析式に対して有限差分法を基にした離散化を直接的に施す事が, 離散式の空間精度を知るという点で重要になってくる。これは, 空間的に高精度の離散化を保証しなければならないような流体の数值計算では必須の要請である。このような観点から, 任意の有限差分法を直接適用出来, かつ SCL を離散的に満足する事が保証されている保存型メトリックは非常に有用と言える。

その一方で, 1. で述べたように, 保存型メトリックの離散式がどのような幾何学構造を有するかは明らかにされておらず, 有限体積法のように数学的な定義との間にアナロジーが存在するかどうかも分かっていない。そこでまず, 2 次精度の有限差分法に基づいて保存型メトリックを離散化した場合, どのような幾何学構造を有する離散式が得られるかを議論する。対称保存型メトリック $\zeta_z/J(13)$ に対し, 2 次精度中心差分: $R-FD$ を適用した離散化を行うと, 以下ようになる。

($R-FD$):

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \frac{1}{2} \{ (x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi \\ &\quad + (y_\eta x)_\xi - (y_\xi x)_\eta \} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta_2}{\delta_2\eta} \left(\frac{\delta_2 x}{\delta_2\xi} y - \frac{\delta_2 y}{\delta_2\xi} x \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_2}{\delta_2\xi} \left(\frac{\delta_2 y}{\delta_2\eta} x - \frac{\delta_2 x}{\delta_2\eta} y \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4). \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, “ \times ” は物理空間での外積演算を表す記号である。また, $\mathbf{r}_{j,k,l} = x_{j,k,l}\mathbf{e}_x + y_{j,k,l}\mathbf{e}_y + z_{j,k,l}\mathbf{e}_z$ であり, z -comp は z 成分を採る事を表す。 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す。式 (18) より, $R-FD$ は有限体積法からのアプローチ $FV2$ と同じ離散化を与える事が分かる。なお, 非対称保存型メトリック $\zeta_z/J(12)$ に $R-FD$ を適用しても $FV1$ および $FV2$ のような幾何学構造は得られない。

すなわち, 2 次精度中心差分の下では空間対称性の有無によって保存型メトリックの離散式が異なり, 空間対称性が無い場合にはセル面積を正しく表すとは言えない事が分かる。一方, 非保存型メトリックに対し $R-FD$ を適用しても, 離散式に幾何学的解釈を見出す事は困難である事にも言及しておく。

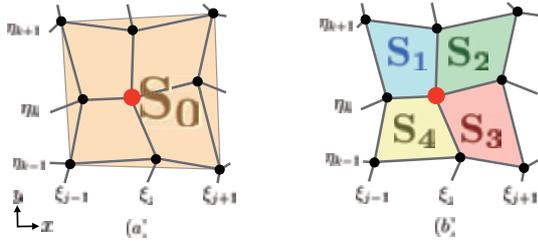


図1 Geometric interpretations for discretized spatial metric (ζ_z/J) $_{j,k,l}$ in accuracy of 2nd order. The grid of $\zeta = \zeta_i$ projected onto $z = const$ plane is shown; (a) Discretizations with the use of *FV1* and *S-FDPS*; (b) Discretizations with the use of *FV2* and *S-FDM*.

4-1-4 有限差分法からのアプローチ：PulliamとStegerによる手法

先に導入した *FV1* は Vinokur ら [7] が提唱しているものだが、それらは Pulliam と Steger [5] が導入した離散式を、有限体積法の観点から解釈し直したものである。Pulliam と Steger は当初、有限差分法的な観点から非保存型メトリック (6) に以下のような特殊な離散化を施す事によって式 (16) を得ている：

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \left(\frac{\delta_2 \bar{x}^{2\eta}}{\delta_2 \xi} \right) \left(\frac{\delta_2 \bar{y}^{2\xi}}{\delta_2 \eta} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\delta_2 \bar{y}^{2\eta}}{\delta_2 \xi} \right) \left(\frac{\delta_2 \bar{x}^{2\xi}}{\delta_2 \eta} \right) \Big|_{j,k,l} \quad (19) \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} S_0. \end{aligned}$$

式 (19) においては、例えば x_ξ の離散化に際し、 ξ 方向の差分を計算する前に η 方向の平均値を採っている。この平均操作は、図 1(a) の *FV1* において、各辺の中点の情報を欠落させる作用と同等である。

4-1-5 有限差分法からのアプローチ：*S-FDPS*

先に、2次精度中心差分の下では非対称保存型メトリックが適切な幾何学構造を持たない事に言及した。本節では、特殊な離散化を行えば、対称・非対称保存型メトリックが共に *FV1* の幾何学構造を表す離散式に帰着出来る事を示す。ここで導入する有限差分法を基にした特殊な離散化 *S-FDPS* や次節で導入する *S-FDM* は空間 2次精度を実現しており、また高次精度への拡張が容易な離散化手法である。まず、Pulliam と Steger 非保存型メトリック (6) に導入した、 ξ 方向の差分を採る前に η 方向の平均を採るという特殊な操作を、非対称保存型メトリック ζ_z/J (12) の離散化に導

入してみる：

(*S-FDPS*):

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \{(x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi\} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \left\{ \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\bar{y}^{2\xi} \frac{\delta_2 x}{\delta_2 \xi} \right) - \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\bar{x}^{2\eta} \frac{\delta_2 y}{\delta_2 \eta} \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} S_0. \quad (20) \end{aligned}$$

なお、式 (20) と同様に以下の関係式も成立する。

(*S-FDPS*):

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \{(xy)_\eta)_\xi - (xy)_\xi)_\eta\} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \left\{ \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\bar{x}^{2\eta} \frac{\delta_2 y}{\delta_2 \eta} \right) - \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\bar{y}^{2\xi} \frac{\delta_2 x}{\delta_2 \xi} \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} S_0. \quad (21) \end{aligned}$$

式 (20), (21) から、Pulliam と Steger が非保存型メトリックの離散化に用いた手法を応用した、*S-FDPS* は非対称保存型メトリック (12) および対称保存型メトリック (13) の両方に同じ離散式を与えると分かる。また、その離散式は ζ_z/J を S_0 の 4分の1として与えており、Pulliam と Steger が導入した *FV1* と同じ離散化を実現している。

4-1-6 有限差分法からのアプローチ：*S-FDM*

保存型メトリックの各項の形は、いわゆる勾配型の移流項 [4] と同じ構造を含む。この事に着目し、森西らが移流項の離散化に導入した手法 [4] を非対称保存型メトリックの離散化に適用する。非対称保存型メトリック ζ_z/J (12) に対し、以下の離散化：*S-FDM* を定義する。

(*S-FDM*):

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \{(x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi\} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \left\{ \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\bar{y}^{1\xi} \frac{\delta_1 x}{\delta_1 \xi} \right) - \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\bar{y}^{1\eta} \frac{\delta_1 y}{\delta_1 \eta} \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4). \quad (22) \end{aligned}$$

式 (22) と同様に、以下の関係式も成立する。

(*S-FDM*):

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \{(xy)_\eta)_\xi - (xy)_\xi)_\eta\} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \left\{ \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\bar{x}^{1\eta} \frac{\delta_1 y}{\delta_1 \eta} \right) - \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\bar{x}^{1\xi} \frac{\delta_1 x}{\delta_1 \xi} \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4), \quad (23) \end{aligned}$$

式 (22), (23) から、*S-FDM* は非対称保存型メトリック (12) および対称保存型メトリック (13) の両方に同じ離散式を与えると分かる。また、その離散式は ζ_z/J を S_1, S_2, S_3, S_4 の平均値として与えており、先に紹介した *FV2* と同じ離散化を実現している。

4-1-7 有限差分法に基づき離散化された保存型メトリックの幾何学的解釈

以上のように、有限差分法の下でも空間メトリックの離散式に有限体積法的な幾何学的な解釈を可能にする手法をいくつか示した。図 2 は、有限差分法を用いた場合の空間メトリックの離散式と、従来の有限体積法的な観点から得られる幾何学構造を関連付けた図である。非保存型メトリックの離散化に Pulliam と Steger が導入した特殊な手法を用いると、 $FV1$ と同一の離散式を得る。また、非対称保存型メトリックに Pulliam と Steger の離散化を応用した $S\text{-FDPS}(20)$ 、森西らの離散化を適用した $S\text{-FDM}(22)$ を用いると各々 $FV1$ 、 $FV2$ と同一の離散式を得る。さらに、対称保存型メトリックに $S\text{-FDPS}(20)$ 、 $S\text{-FDM}(22)$ を用いた場合にも各々 $FV1$ 、 $FV2$ と同一の離散式を得る。一方、対称保存型メトリックに 2 次精度中心差分 $R\text{-FD}(18)$ を用いた場合には、 $FV2$ と同一の離散式を得る。このように、2 次精度中心差分法を用いて従来の有限体積法と同一の幾何学的形状を再現出来るのが対称保存型メトリックのみであり、かつ幾何学的に格子形状をより忠実に再現する離散式を与えるという事は特筆すべき点である。

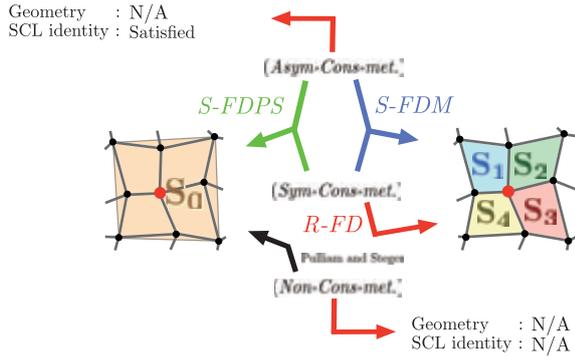


図 2 Summary of geometries for discretized spatial metric $(\zeta_z/J)_{j,k,l}$ in accuracy of 2nd order. Arrows indicate the discretizations in terms of finite difference schemes.

4-2 高次精度スキーム

本節では、前節で対称保存型メトリック $\zeta_z/J(13)$ に導入した 2 次精度の離散化を、高次精度に拡張する。

$$\frac{\delta}{\delta\xi}\phi_{j,k,l} = \sum_{m=L_a}^{M_a} a_m(\phi_{j+m+1,k,l} - \phi_{j+m,k,l}), \quad (24)$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta}\phi_{j,k,l} = \sum_{m=L_b}^{M_b} b_m(\phi_{j,k+m+1,l} - \phi_{j,k+m,l}), \quad (25)$$

式 (24), (25) で定義した任意精度有限差分オペレー

タを用いると、 $\zeta_z/J(13)$ は以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \frac{1}{2} \{ (x\xi y)_\eta - (x\eta y)_\xi \\ &\quad + (y\eta x)_\xi - (y\xi x)_\eta \} \Big|_{j,k,l} \\ &\simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta}{\delta\eta} \left(\frac{\delta x}{\delta\xi} y - \frac{\delta y}{\delta\xi} x \right) + \frac{\delta}{\delta\xi} \left(\frac{\delta y}{\delta\eta} x - \frac{\delta x}{\delta\eta} y \right) \right\} \Big|_{j,k,l} \\ &= \sum_{n=L_b}^{M_b} \sum_{m=L_a}^{M_a} b_n a_m \\ &\quad \left[\frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} \{ (\mathbf{r}_{j+m,k,l} - \mathbf{r}_{j,k+n,l}) \right. \\ &\quad \quad \times (\mathbf{r}_{j+m,k+n,l} - \mathbf{r}_{j,k,l}) \\ &\quad \quad + (\mathbf{r}_{j+m+1,k,l} - \mathbf{r}_{j,k+n+1,l}) \\ &\quad \quad \quad \times (\mathbf{r}_{j+m+1,k+n+1,l} - \mathbf{r}_{j,k,l}) \\ &\quad \quad - (\mathbf{r}_{j+m,k,l} - \mathbf{r}_{j,k+n+1,l}) \\ &\quad \quad \quad \times (\mathbf{r}_{j+m,k+n+1,l} - \mathbf{r}_{j,k,l}) \\ &\quad \quad - (\mathbf{r}_{j+m+1,k,l} - \mathbf{r}_{j,k+n,l}) \\ &\quad \quad \quad \left. \times (\mathbf{r}_{j+m+1,k+n,l} - \mathbf{r}_{j,k,l}) \} \right]_{z\text{-comp}} \\ &= \sum_{n=L_b}^{M_b} \sum_{m=L_a}^{M_a} b_n a_m (S_{A;m,n} + S_{B;m,n} - S_{C;m,n} - S_{D;m,n}) \quad (26) \end{aligned}$$

ここで、 $S_{1;m,n}, S_{2;m,n}, S_{3;m,n}, S_{4;m,n}$ は図 3 に示す 4 つの四辺形の面積を表している。式 (26) は、任意の有限差分法の下で、対称保存型メトリック (13) に有限体積法のような幾何学的解釈を施せる事を示している。例えば、4 次精度中心差分を適用すると、

$$\zeta_z/J|_{j,k,l} = \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta} \sum_{\alpha=1}^4 \left(\frac{16}{9} S_{A\alpha} + \frac{1}{36} S_{B\alpha} - \frac{2}{9} S_{C\alpha} - \frac{2}{9} S_{D\alpha} \right) \quad (27)$$

となり、図 4 に示す 16 個の四辺形の加重平均となる。また、2 次精度中心差分を用いた時には式 (26) は式 (18) に帰着し、図 1 に示される $FV2$ の幾何的構造と一致する。なお、非保存型メトリック、非対称保存型メトリックを用いた場合には、いずれも本節のような幾何的構造は得られない事が分かっている。

5. まとめ

空間メトリック (非保存型メトリック、非対称・対称保存型メトリック) が、離散的にどのような幾何学的構造を有するかについて議論した。その為にあらず、従来から用いられている有限体積法的な観点から空間メトリックを離散化する手法を 2 つ紹介した。このうち、注目する格子点を含むセルの幾何形状の再現性という観点から、2 つの手法には優劣が存在する事を指摘した。その後、有限差分法的な観点から非保存型メ

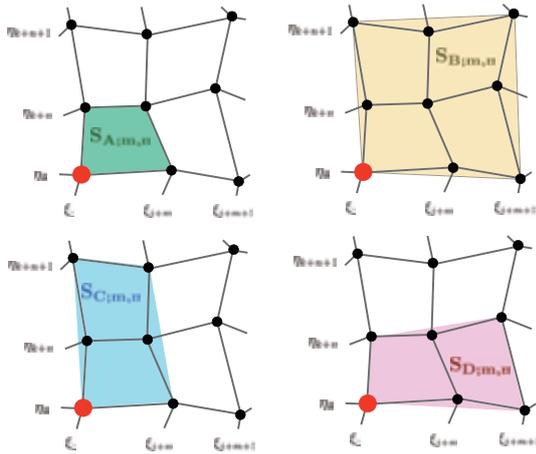


図3 Geometric interpretations for discretized spatial metric $(\zeta_z/J)_{j,k,l}$ with the use of any high-order finite difference schemes. The grid of $\zeta = \zeta_i$ projected onto $z = \text{const}$ plane is shown.

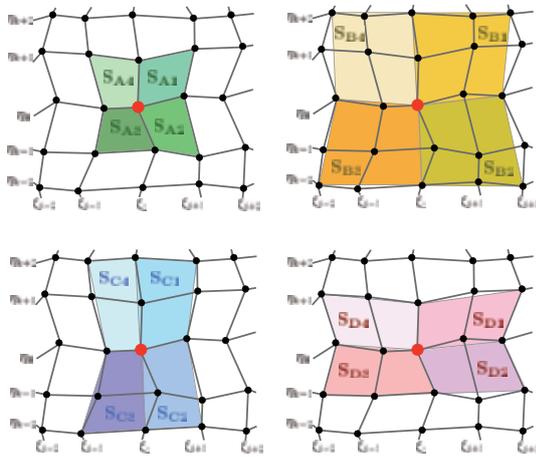


図4 Geometric interpretations for discretized spatial metric $(\zeta_z/J)_{j,k,l}$ with the use of 4th-order central finite difference scheme. The grid of $\zeta = \zeta_i$ projected onto $z = \text{const}$ plane is shown.

トリックを離散化する手法として、Pulliam と Steger が導入したものを紹介した。さらに、非対称・対称保存型メトリックを空間 2 次精度で離散化する手法を、Pulliam [5] 及び森西ら [4] に倣って 2 つ導入し、従来の有限体積法的な観点から得られる空間メトリックの 2 つの離散式と各々同一のものが得られる事を示した。また、2 次精度中心差分を対称保存型メトリックの離散化に用いた場合、有限体積法的な観点から得られる離散式のうち、セルの幾何形状を良く再現する方と一致する事を新たに示した。一方で、2 次精度中心差分を非保存型メトリックおよび非対称保存型メトリックの離散化に用いた場合、有限体積法的な観点から得られる離散式のいずれにも一致しない事を指摘した。以上により、従来から知られている有限体積法を基にした空間メトリックの離散化手法は、何らかの形で空間メトリックを直接離散化する手法に帰着される事が示

されたが、特に空間的な対称性を有する対称保存型メトリックは自然な有限差分法の下で、格子の幾何形状をより良く再現する離散式を与える事が分かった。また、対称保存型メトリックは、高次精度に拡張した場合にも幾何学構造を有する事を示せると分かった一方で、非保存型メトリックおよび非対称保存型メトリックからはそのような幾何学構造を得られない事が分かった。

参考文献

- 1) Y. Abe, N. Iizuka, T. Nonomura and K. Fujii, "Conservative metric evaluation for high-order finite difference schemes with the GCL identities on moving and deforming grids," accepted for publication in J. Comput. Phys., 2012.
- 2) X. Deng, M. Mao, G. Tu and H. Zhang, "Geometric conservation law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids," J. Comput. Phys., **230** (2011), 1103–1105
- 3) 藤井 孝藏, 「流体力学の数値計算法」, 東京大学出版会, (1994), 155–173
- 4) Y. Morinishi, T. Lund, O. Vasilyev, and P. Moin, "Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow," J. Comput. Phys., **143** (1998), 90–124.
- 5) T.H. Pulliam and J.L. Steger, "On Implicit Finite-Difference Simulations of Three Dimensional Flow," AIAA, **10** (1978)
- 6) P.D. Thomas and C.K. Lombard, "Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids," AIAA, **17** (1978), 1030–1034
- 7) M. Vinokur, "An Analysis of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Conservation Laws," J. Comput. Phys., **81** (1989), 1–52
- 8) M. Vinokur and H.C. Yee, "Extension of efficient low dissipation high-order schemes for 3-D curvilinear moving grids," World Scientific, Frontiers of computational fluid dynamics 2002, 129–164.
- 9) M.R. Visbal and D.V. Gaitonde, "On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes," J. Comput. Phys., **181** (2002), 155–185.
- 10) H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trepanier and R. Camarero, "Discrete Form of the GCL for Moving Meshes and its Implementation in CFD Schemes," C. Fluids, **22** (1993), 9–23