ヘリコプタの BVI 騒音予測のための規定後流モデルと CFD のハイブリッド手法 ^{杉浦 正彦,田辺 安忠,齊藤 茂}

* 正彦, 田垣 女心, 肖藤 宇宙航空研究開発機構 菅原 瑛明 (株)菱友システムズ 大塩 慧太朗, 金崎 雅博 首都大学東京

Hybrid Method of Prescribed Wake Model and CFD for Helicopter BVI Noise Prediction

by

Masahiko Sugiura, Yasutada Tanabe, Shigeru Saito, Hideaki Sugawara, Keitaro Ohshio, and Masahiro Kanazaki

ABSTRACT

This paper explains a hybrid method of prescribed wake model and computational fluid dynamics (CFD) developed by Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA). Blade vortex interaction (BVI) noise is a main source of helicopter noise. Precise prediction of flow field around helicopter is required to establish BVI noise reduction technology. Despite CFD predicts flow field precisely, it is computationally expensive. On the other hand, prescribed wake model which empirically predicts rotor trailing vortices reduces computational cost greatly compared to CFD. Therefore, hybrid method of prescribed wake model and CFD is a promising technology for BVI noise reduction technology. The base CFD code herein assumed is a structured grid Euler solver, <rflow3D>, which has intensively been developed for helicopter applications at JAXA. The rFlow3D is a highly versatile CFD code that can numerically simulate flows around helicopter in a wide range of flow conditions, considering trimming and blade elastic deformation. In this study, several existing prescribed wake model are combined with rFlow3D. Accuracy of the hybrid method is evaluated by comparing computational results with experimental ones. Normal force coefficient on blade and noise contour computed by the hybrid method show good agreement with experiment, however, they are still overestimated. We plan to improve the hybrid method by utilizing vortex position and strength obtained from rFlow3D in the near future.

1. はじめに

固定翼とは異なり、ヘリコプタは垂直離着陸やホバリン グなど独特の飛行特性を持っているので、ドクター・ヘリ のような救急活動、消防・防災や農薬散布、報道、警察、 山岳部における物資輸送など活躍の幅が広い.しかし、ヘ リコプタの騒音はヘリポート近隣の住民にとっては環境問 題の一つとなっている.また、災害時にはヘリコプタの騒 音が地上の救助者の声をかき消してしまうために、飛行が 制限されることがあり、低騒音化に対する要求が高まって いる.

近年では、騒音低減のため、低騒音ブレード翼型の開発 や翼端形状の改善など様々な改良がされてきたが、ロータ のアクティブ制御は騒音低減効果が大きいと期待されてい る. ヘリコプタの騒音低減技術確立には、ヘリコプタ周り、 特にロータ・ブレード上の非定常な圧力変動を正確に予測 することが必要である.また、BVI 騒音(Blade Vortex Interaction Noise)のように先行するブレードから放出された 翼端渦と後続ブレードが干渉する現象を把握するには、翼 端渦の挙動を正確に予測することが非常に重要である.

JAXA では、ヘリコプタ全機周りの流れ場解析が可能な移動重合格子法に基づく CFD (Computational Fluid Dynamics) コード"rFlow3D (rotor Flow 3D)"を開発している[1],[2]. このコードを用いた検証は過去にも行われてきており、 Caradonnaらの行ったロータのみのホバリング実験に基づいた基礎的な検証[3]やヘリコプタ胴体を含めた ROBIN (Rotor Body Interaction)モデルに基づいた検証がされている[4]. rFlow3D では CFD 解析だけでなく、CSD (Computational Structural Dynamics)解析、飛行力学解析も合わせて行い、 ブレードの弾性変形解析やトリム解析を考慮することによって高精度化を実現している.さらに、構造解析コード" rMode (rotor Mode)",音響解析コード"rNoise (rotor Noise)" と組み合わせることで、BVI 騒音の統合解析ツールとして 開発されている[5], [6]. 統合解析ツールの構成を図 1 に示す. 上述したように、rFlow3Dの計算精度については既に風洞 実験との比較から十分な計算精度を確保できることがわか っている.しかし、CFD では流れ場を詳細に精度良く再現 できるが、1ケース1ヶ月以上等、一般的に計算時間がかか り、多数のケースについてロータのアクティブ制御による 騒音低減効果を確認するには実用的とはいえない.一方、 規定後流モデルでは、経験的に翼端渦の形を決め、ビオ・ サバールの法則に基づき渦要素からの誘導速度を積算し、 各点での誘導速度を求めるために、CFD に比べて計算コス トを飛躍的に下げることができる.

本研究では、規定後流モデルと rFlow3D のハイブリッド 手法を構築し、ロータ騒音に関する国際共同プロジェクト の HART II [7]-[9]の実験データと比較・検証することで、BVI 騒音低減技術の確立に有効なツールを開発することを目的 とする.

- 2. 数值解析手法
- 2.1 規定後流モデル
- 2. 1. 1 翼端渦モデル

翼端渦モデルには,実験値とよく合う Vatistas n=2 モデル [10]を採用した. Lamb-Oseen モデル, Rankine モデルととも に, Vatistas モデルを図 2 に示す.本モデルは渦減衰の影響 を考慮することができ[11],ブレードが渦と衝突するまでの 時間が長い場合にも渦の影響を正確に評価できる.図 3 の 点 P における渦の速度 V は

$$V = \frac{1}{4\pi} \frac{n}{(r_c^4 + h^4)^{1/2}} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$
(1)

で表され[12], 渦のコア半径 r_c の増加とともに周速が減衰する.ここで, Γ は渦の循環である.

*r*_cの増加は

 $r_{c}(t) = \sqrt{r_{c0}^{2} + 4\alpha\delta vt}$ (2) で与えられる.ここで、tは時間、 r_{c0} は渦のコア半径の初期 値で、ブレード・コード長の 20%とした. α は Oseen parameter と呼ばれ、 $\alpha = 1.25643$ で与えられる. vは動粘性係数、 δ は



図3 ビオ・サバールの法則による誘導速度の導出

Squire によって提案された effective diffusion constant あるい は eddy viscosity coefficient と呼ばれるもので, 渦レイノルズ 数(vortex Reynolds number)に応じて決まる値である.

2.1.2 翼端渦の幾何学的な形状

ブレードから放出された翼端渦は,螺旋状に後方へ流れていく.この過程で翼端渦はロータの吹き下ろしを受けて徐々に下方へ移動し,進行方向に対して傾斜を持つ配置となる.

このような 3 次元的な渦の形状を表現するために,規定 後流モデルには,rigid モデル,Beddoes モデル[13], modified Beddoes モデル[14]等がある.rigid モデルは円筒の螺旋状に 渦が配置されるモデル,Beddoes モデルは翼端渦の巻き上が りを表現しているモデル(ただし,左右方向で対称), modified Beddoes モデルは翼端渦の巻き上がりの左右方向の 非対称性を表現しているモデルである. Beddoes モデル, modified Beddoes モデル,それぞれでは,渦のスキュー角を $E = |\chi|$ として表現されるが, $E = |\chi|/2$ とした場合に実験値 とよく合うという報告もあり,本研究では $E = |\chi|, |\chi|/2$, それぞれについて比較検討した.

以下, modified Beddoes モデルについて説明する. オリ ジナルの Beddoes モデルとの違いは,誘導速度の導出部分で あり, modified Beddoes モデルでは運動量の保存, 吹き下ろ しの左右方向の非対称性を考慮している. なお, rigid モデ ルでは, 誘導速度を一定と仮定している. modified Beddoes モデルは渦の軌跡の x-y 平面への投影を単純な epi-cycloid と 仮定し, その x-y 座標を次のように与える.

$$x_{v} = R\cos\Psi_{v} + \mu_{x}\Delta\Psi_{v}$$
$$y_{v} = R\sin\Psi_{v}$$

ここで、Rはロータ半径、 Ψ_v は翼端渦放出時のブレード回転 角、 μ_x 、 $\Delta \Psi_v$ はそれぞれ $\mu_x = V \cos \alpha_{TPP} / R\Omega$ 、 $\Delta \Psi_v = \Psi_b - \Psi_v$ で、 α_{TPP} はロータ面の迎角、 Ω はブレードの回転角速度、 Ψ_b は計算時のブレードの回転角である.

さらに、渦の z 座標はロータに流入する流れの下向き成分 と、吹き下ろしvによる下方への移動を積分した形で与えら れ、

$$z_{v} = (1/R\Omega) \int_{\Psi_{v}}^{\Psi_{b}} (-V \sin \alpha_{TPP} + v) d\Psi$$

$$= \int_{\Psi_{v}}^{\Psi_{b}} (-\mu_{z} + v / R\Omega) d\Psi$$

$$= -\mu_{z} \Delta \Psi_{v} + \int_{\Psi_{v}}^{\Psi_{b}} (v / R\Omega) d\Psi$$
 (4)

(3)

となる. ここで, $\mu_z = V \sin \alpha_{TPP} / R\Omega$ であり, 吹き下ろしvは, 進行方向と左右方向に対する傾斜や不均一な分布を考慮し て, 次のように定式化する.

(ロータディスク内)

$$v = v_0(1 + 8E/15\pi + Ex' - 2\mu_x y' - E|y'^3|)$$
 (5)
(ロータディスク外)

 $v = v_0(1 + 8E/15\pi + Ex' - 2\mu_x y' - E|y'^3|)$ (6) ここで、 v_0 はロータディスク内で一様な吹き下ろしを仮定 した場合の吹き下ろしであり、 $v_0 = -\lambda_I R\Omega$ で与えられる. λ_I は次式の解である.

 $-C_T/2\lambda_I = [(\mu_z + \lambda_I)^2 + \mu_x^2]^{1/2}$ (7) また,式(5),(6)のプライム付の変数はロータ半径Rで無次元 化された変数であることを示し,後流の進行方向に対する 傾斜 E は,次式のスキュー角を用いてE = $|\chi|$ と表される. $\chi = \tan^{-1}[\mu_x/-(\mu_z + \lambda_I)]$ (8) なお,式(4)右辺の第 2 項は,式(5),(6)を用いて積分してい る.

2. 2 CFD

2. 2. 1 CFD ソルバ

支配方程式は 3 次元圧縮性オイラー方程式で,以下のように表される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{U} dV + \int_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$
⁽⁹⁾

ここでUは解ベクトル, F はそれぞれ x, y, z 方向の流速ベクトル, n は法線方向の単位ベクトルである. それぞれの成分は,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \rho \\ (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \rho \mathbf{v} + p \mathbf{n} \\ (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \rho e + p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$
(10)

である. v はそれぞれ x, y, z 方向の速度ベクトル, \dot{x} は移動 セル境界の速度ベクトル, ρ は空気密度, p は圧力, e は全 エネルギである.



図4ブレード弾性変形の3成分

数値解法は、有限体積法で離散化を行い、移動重合格子 法を使用している.数値流速には、全速度型 SLAU (Simple Low-dissipation AUSM) スキームを移動重合格子法に適用す るため修正した mSLAU (modified SLAU) [2]を使用し、物 理量の値の再構築に空間 4 次精度の FCMT (Fourth-order Compact MUSCL TVD) 法[15]を用いている.時間積分は、 背景直交格子では 4 段階のルンゲ・クッタ法を、ブレード 格子と胴体格子には dual-time stepping 法[16]で非定常陰解法 を構築し、疑似時間の時間積分に LU-SGS/DP-LUR を使用し ている.各格子間の値の受け渡しは Tri-Linear 補間法を用い ている.

2. 2. 2 ブレード運動のモデル化

ブレードの運動は、ピッチ角制御と弾性変形により上下 と前後方向に非定常に変動する.この変動は渦放出位置の 変動や、放出された渦とブレードが干渉する際の3次元的 な位置関係に影響を与えるため、BVI 騒音の正確な予測を 行うためにはまず、ブレード運動の正確なモデル化が必要 である.本研究では、BVI 騒音の予測精度を確認すること が主な目的のため、独自のブレード運動の予測をする代わ りに、HART II で用いられたピッチ角の制御パラメータと、 計測されたブレードの弾性変形のデータを用いてブレード の運動をモデル化する.ブレードの弾性変形には、図4に 示すようにブレード面に垂直な変形(flap)、ブレード面に 沿った変形(lead-lag)、ねじれ変形(torsion)の3つの成 分があり、それぞれの成分についてモデル化している.

2. 3 規定後流モデルと CFD のハイブリッド手法

本ハイブリッド手法は、CFD でブレード周りのみを計算 し、後流域についてはポテンシャル領域とみなし、規定後 流モデルで代用することで、計算コストを削減している. 規定後流モデルにより翼端渦の誘導速度を CFD に与え、流 れの密度、運動量、エネルギを算出する. 圧縮性の影響を 考慮して、質量保存の法則を満たすように格子の外周 3 層 までに規定後流モデルの誘導速度を CFD に加えている.規 定後流モデルと CFD 計算格子のハイブリッドの様子を図 5 に示す.

CFD とポテンシャル領域の境界では,流れ場の変数は次の式(11)を用いて計算する[17].

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\infty} + u_{w} \\ v_{\infty} + v_{w} \\ w_{\infty} + w_{w} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \left(\frac{a^{2}}{a_{\infty}^{2}}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$e = \rho \left[\frac{a^{2}}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{u^{2} + v^{2} + w^{2}}{2}\right]$$

$$(11)$$

ここで, u, v, w は流速の x, y, z 成分, *a* は音速, *γ*は比熱 比, _∞は一様流成分, _w は後流成分を表している. ローカル の音速はエネルギ式から

$$a^{2} = a_{\infty}^{2} + \frac{\gamma - 1}{2} [V_{\infty}^{2} - (u^{2} + v^{2} + w^{2})]$$
(12)



図 5 規定後流モデルと CFD 計算格子のハイブリッドの 様子



図6ブレード上の循環分布

と決まる. V∞は主流の流速を表している.

従来,この規定後流モデルの循環の強さは,一定値を用 いていたが,アジマス角により循環の強さは大きく変動す る(図 6).その強弱がブレード上の空力荷重の予測,ひい ては BVI 騒音の予測に大きく影響するため,本研究では CFD による揚力分布を利用して循環を算出し,規定後流モ デルの循環の強さを変動させている.すなわち,各アジマ ス角でスパン方向の揚力の最大値を取り,その総和が推力 と等しくなるように規格化し,位相を合わせて規定後流モ デルに組み込んでいる.

2.4 騒音解析

定常飛行状態のロータでは、ブレードの表面圧力分布や 弾性変形などは回転に同期した周期性があると考えられる ので、CFD 解析で得られる一回転分のブレード表面圧力分 布、ロータ操舵角、弾性変形量を用いて騒音を計算する. 本研究では、Lighthill の音響アナロジに基づく音の波動方程 式の解である Ffowes Williams and Hawkings の Farassat の Formulation 1[18]と呼ばれる式を用いて音響解析を行う.こ の式は以下の式(13)のような形をしており、ブレード表面の 圧力変動から、任意の観測点における音圧の変動を与えら れる.

$$4\pi p'(\mathbf{x},t) = 4\pi \left(p'_T(\mathbf{x},t) + p'_L(\mathbf{x},t) \right)$$
(13)

$$4\pi p_T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\partial t} \int_{f=0}^{t} \left[\frac{p\cos\theta}{r(1-M_r)} \right]_{ret} dS \tag{14}$$

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{f=0}^{t} \left[\frac{p\cos\theta}{r(1-M_r)} \right]_{ret} dS \tag{15}$$

$$+ \int_{f=0}^{t} \left[\frac{p\cos\theta}{r^2(1-M_r)} \right]_{ret} dS \tag{15}$$

ここで, f = 0 はブレード表面で積分することを表し, ret は は遅延時間 (retarded time) の略で,観測時刻tに観測点に音 速aで伝わってくる音源時間τで積分を行うことを表す. p'は 求める音圧で, p'_{T} はブレードの運動によって押しのけられ た空気によって生じる音で翼厚音と呼ばれ, p'_{L} はブレード 表面の圧力変動によって生じる音で荷重音と呼ばれる. ρ_{0} は一様流における空気密度で, v_{n} は表面セルの垂直方向の 速度, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ は観測点と音源セルとの距離で, $M_{r} = \hat{r}_{i} \cdot v_{i}/a$ は音源時刻における音源セルの放射線方向マ ッハ数である. $\cos\theta$ は音源セルの垂直方向と音源から観測 点への方向との交差角の余弦である.

上記の積分を行うには、ブレード表面の各セルについて、 下記遅延時間を求める式を満足する音源時間τ(位相角)を 探す必要がある.

 $|x - y(\eta, \tau)| = a(t - \tau)$ (16) ここで, xは観測点位置, yは音源位置, ηはロータ・ブレー ド上の局所座標である. yはブレード表面を分割したセルの 代表位置で, CFD 計算に用いられるブレードの基本形状か ら, 3 軸方向の弾性変形, フェザリング, フラッピング, リ ード・ラグ, 回転の 7 段階の座標変換を行うことにより, 解析的に求められる. また, セルの 4 つの角点の座標を計 算して,表面セルの面ベクトルを求めている.

得られた音圧の時間波形に対して,特にブレードと翼端 渦の干渉によって発生する中間周波数範囲の騒音成分の強 さを評価するため,音圧のスペクトル成分を用いて,下記 の式で *BVISPL* (Sound Pressure Level)を定義した.

$$BVISPL = 20 \cdot \log\left(\sqrt{\sum_{i=6\times NBLD}^{40\times NBLD} p_i} \cdot \frac{1}{p_{ref}}\right)$$
(17)

ここで, NBLDはブレード枚数, $p_{ref} = 2.0 \times 10^{-5}$ である.

3. 数值解析条件

ロータ騒音に関する国際共同プロジェクトの HART II の 実験データと比較することで,規定後流モデル/CFD のハイ ブリッド手法の精度を検証する.HART II では,ロータの高 調波制御により騒音あるいは振動を軽減できることが示さ れた.実験の様子を図 7[8],8に示す.騒音の計測面はロー タ中心より 2.2m下の平面とした(図8).以下に,数値解 析に使用した HART II の残りの実験条件を示す.

ロータ・ブレードは4枚で,諸元は表1のようになる. 計測実験には,標準条件,最小騒音条件,最小振動条件と あるが,このうち標準条件を採用した(表2). M_{∞} は一様 流のマッハ数, M_{tip} はブレード翼端のマッハ数, μ は前進率, C_T はロータ推力係数, C_{MX} はロータ・ハブ・ローリング・モ ーメント係数, C_{MY} はロータ・ハブ・ピッチング・モーメン ト係数, θ はブレードのピッチ角を表しており,次のように 1次の調和振動で表される.

 $\theta(\Psi) = \theta_0 + \theta_{1c}\cos\Psi + \theta_{1s}\sin\Psi$ (18) ここで、 Ψ はブレードの方位角、 θ_0 はコレクティブ・ピッチ 角、 θ_{1c} は横サイクリック・ピッチ角、 θ_{1s} は縦サイクリッ ク・ピッチ角である.

ブレードの弾性変形は、4枚のブレードの変形量の平均値 を取り、ブレードのスパン方向の距離、方位角の関数とし て与える(図9).



図 7 HART II 実験の様子[8]



図8HART II 実験でのロータと騒音計測面の位置関係

表1ブレード諸元	
ブレード枚数	4
ロータ半径	2.0 m
ブレード翼型	NACA23012
翼弦長	0.121 m
捻り下げ	8.0 deg
ルートカット	0.44 m

表 2 標準条件	
M_{∞}	0.09628
M_{tip}	0.6387
μ	0.1508
C_T	4.63E-03
C_{MX}	2.81E-05
C_{MY}	-2.81E-05
$ heta_0$	3.800 deg
$ heta_{Ic}$	1.916 deg
$ heta_{Is}$	-1.342 deg



4. 数值解析結果

BVI 騒音は、ブレードが翼端渦と干渉する際に生じるブレード表面の圧力変動を主要な音源として発生するため、 圧力変動が本手法によって再現されているか確認する必要がある.そこで、CFDの計算から得たブレード表面の圧力 分布に基づいて、HARTIIと同様に87%スパン位置における ブレードの空力荷重係数(CnM²)の時間変動を計算し、その結 果を図 10 に示す.図 10 より、本手法はブレード前進側で 圧力変動を過大評価しているが、干渉位置を精度良く捉え ていることが分かる.

ロータ周りの圧力変動の結果を用いて BVI 騒音の音圧分 布を計算し,その結果を図 11 に示す.図 11 には,modified Beddoes モデルだけでなく,rigid モデル,オリジナルの Beddoes モデルのハイブリッド手法の結果とともに,比較の ために,HART II の実験結果,rFlow3Dのみによる計算結果 も合わせて示している.ハイブリッド手法は音圧レベルを 実験値より全体的に過大評価しているが,騒音のピーク位 置の傾向を捉えていることが分かる.ハイブリッド手法の 比較から,騒音のピーク位置と騒音分布が風洞実験データ



に最も近いモデルが modified Beddoes モデル $(E=|\chi|, (f))$ であることがわかった.

BVI 騒音の最大値の比較をすると、ハイブリッド手法で は実験より 2dB ほど大きく、反対に CFD では 3dB ほど小さ い結果となっている.これは規定後流モデルではブレード と近い位置に渦が配置され、渦が減衰しないまま干渉した こと、CFD では渦が数値減衰することが影響しているもの と考えられる.

5. おわりに

規定後流モデル/CFD のハイブリッド手法を構築し, HART IIの実験データを用いて計算精度の評価を行った.構築した手法は図 10,11 の解析結果より, BVI 騒音を過大評価している部分や騒音発生位置のずれが見られるが,良好な再現性を示していることが分かった.また,計算時間は数日に短縮し,CFDのみでの計算時間(1ヶ月)の10分の1程度となった.メモリの使用量もCFDに比べて少ないので,並列数を増やすことができ,計算時間・メモリ両方の点において,計算コストを削減することができた.以上の検証結果から本手法は BVI 騒音の解析に対して有効であるといえる.

BVI 騒音を過大評価している原因は、規定後流モデルに よりブレードと近い位置に渦が配置され、渦があまり減衰 しないまま干渉したことが考えられる. 今後は、CFD から 得られる渦の位置・強さの情報を規定後流モデルに反映す ることで計算精度を上げるとともに、渦の減衰モデルを構 築し循環の再現性を向上させる.

参考文献

- Tanabe, Y. and Saito, S., "A simplified CFD/CSD LooseCoupling Approach For Rotor Blade Deformation", JAXA-RR-08-008E, 2009.
- Tanabe, Y. and Saito, S., "Significance of All-Speed Scheme in Application to Rotorcraft CFD Simulation", The 3rd International Basic Research Conference on Rotorcraft Technology, 2009.
- 3) 田辺安忠, 齊藤茂, 菅原瑛明, "ロータ周りの流れ場の 高解像度 CFD 解析と検証", 第 47 回飛行機シンポジウム, 2009.
- Tanabe, Y., Saito, S., and Otani, I., "Verification of Computation Results of Rotor/Fuselage Interaction Analysis using rFlow3D Code", APISAT 2009, 2009.
- 5) Tanabe, Y., Saito, S., and Sugawara, H., "Evaluation of Rotor Noise Reduction by Active Devices Using a CFD/CSD Coupling Analysis Tool Chain", 1st Asian Australian Rotorcraft Forum and Exhibition 2012, 2012.
- 6) 田辺安忠,"回転翼機の空力騒音予測ツールの構築について",第44回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2012, 2012.
- Bailly, J., Delrieux, Y., and Beaumier, P., "Experimental Analysis and Validation of ONERA Methodology for the Prediction of Blade-Vortex Interaction", 30th European Rotorcraft Forum., 2004.
- Boyd, Jr., D. D., "HART-II Acoustic Predictions using a Coupled CFD/CSD Method", 65th Annual Forum of the AHS, 2009.

- 9) van der Wall, B. G., and Burley, C. L., "2nd HHC Aeroacoustics Rotor Test (HART II) -Part II: Representative Results -", DLR 1 B 111-2005/3, 2005.
- Vatistas, G. H., Kozel, V., and Mih, W. C., "A Simpler Model for Concentrated Vortices", Experiments in Fluids, 1991.
- Bhagwat, M. J. and Leishman, J. G., "Generalized Viscous Vortex Model for Application to Free-Vortex Wake and Aeroacoustic Calculations", AHS 58th Annual Forum Proceedings, 2002.
- 12) Leishman, J. G., "Principles of Helicopter Aerodynamics (second edition)", Cambridge University Press, 2006.
- Beddoes, T. S., "A Wake Model for High Resolution Airloads", 2nd International Conference on Basic Rotorcraft Research, 1985.
- 14) van der Wall, B. G., "The Effect of HHC on the Vortex Convection in the Wake of a Helicopter Rotor", Aerospace Science and Technology, 2000.
- 15) Yamamoto, S. and Daiguji, H., "High-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, Computers & Fluids ,Vol.22, No2/3, pp.259-270, 1993.
- 16) Zhang, L. P. and Wang, Z. J., "A block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes", Computers & Fluids, Vol.33, pp.891-916, 2004.
- 17) Yang, Z., Sankar, L. N., Smith, M. J., and Bauchau, O., "Recent Improvements to a Hybrid Method for Rotors in Forward Flight", Journal of Aircraft, 2002.
- Farassat, F., "Derivation of Formulations 1 and 1A of Farassat", NASA/TM-2007-214853, 2007.

