

圧縮波領域中の衝撃波発生点に関する数値的考察

金森正史(東大院 現 JAXA), 鈴木宏二郎(東大新領域)

Numerical Study on the Start Point of a Shock Wave in Compressive Region

Masashi Kanamori and Kojiro Suzuki (Univ. of Tokyo)

ABSTRACT

In the past study, the author investigated a supersonic flow on a slow ascent and uncovered the existence of two start points of a shock wave in the flow field from a theoretical point of view. In this article, computational fluid dynamics (CFD) analyses are conducted on such flow field in order to investigate the existence from a practical view point. From the information of shockwaves, obtained from the shock detection algorithm with the compression wave exclusion filter, two start points can be certainly observed in the flow field. On the other hand, there are some differences between the theoretical and numerical result on the position of the start point. Such differences occur due to the effect of entropy, which is generated along the shock wave and is distributed downstream of the shock.

1 はじめに

緩やかな上り坂へ向かう超音速流れについて、著者らは Landau & Lifshitz による特性曲線の理論¹⁾を用いて、圧縮波が集積し衝撃波となる場所を理論的に導出することに成功した²⁾。実際、同じ種類の特性曲線同士の衝突という衝撃波の定義³⁾に基づき、特性曲線同士が最初に衝突する部分を導出した結果、衝突点の軌跡が特性曲線の包絡線に一致するということを示した。そして、衝撃波発生点が一様流マッハ数 M_∞ 及び壁面転向角 θ_{wall} に応じて、0 個から最大で 2 個存在することを示した。

しかしながら、以上の結果は理論的に示されたものであって、実現象として衝撃波発生点が 2 点発生するということを確認した例はこれまでにない。そこで本稿では、上記の流れ場を数値的に解析し、その結果から衝撃波検出手法^{4, 5)}を適用して衝撃波のみを抽出することによって、理論的に得られた衝撃波発生点の分類の真偽を考察することを目的とする。

2 問題設定

Fig.1 に示すような、緩やかな上り坂を過ぎる超音速流れを考える。Fig.1 において、 α 及び φ はそれぞれ一様流に対応するマッハ角及び特性曲線が x 軸となす角度である。座標系 (x, y) の原点 O は壁面が凹になり始める点に一致させている。壁面は 2 本の直線が円弧によって滑らかに接続されたものである。

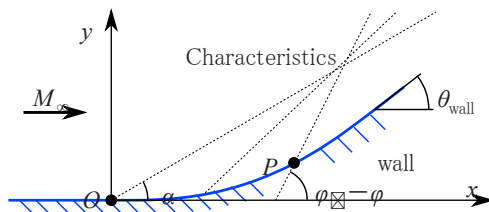


Fig.1 Problem setting

3 衝撃波発生点の解析的考察

著者らはこれまでに、上記のように設定された流れ場において衝撃波発生点がどのように存在するのかを理論的に考察した²⁾。ここでは、その結果を要約して示す。

Landau & Lifshitz¹⁾は、2次元定常等エントロピー流れに対する圧縮性 Euler 方程式から φ をパラメータとする特性曲線の方程式群を導出した。これらの特性曲線群は Fig.2 に示すように互いに交差するから、それらが最初に衝突する部分を極限的に導出することによって、衝撃波の発生点を求めた。更に、衝撃波発生点の軌跡は特性曲線群の包絡線になることを示した。

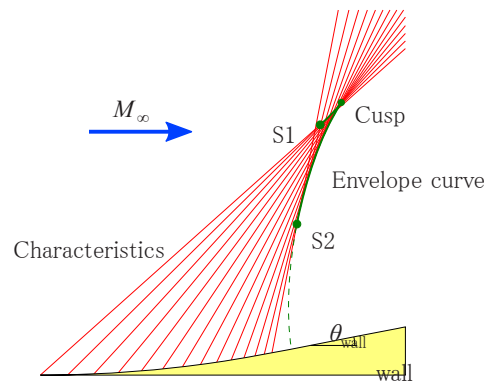


Fig.2 The characteristics and their envelope curve

包絡線の形状は、一様流マッハ数 M_∞ 及び壁面転向角 θ_{wall} によって決定される。すなわち、衝撃波発生点は Fig.3 の下に示したように、包絡線が $S1$ から始まって尖点 (Cusp) で折り返し $S2$ に到達する場合もあれば、 $S1$ 或いは $S2$ のいずれか一方のみが存在する場合もある。それらの分類をまとめたものが、Fig.3 の上に示した $M_\infty - \theta_{\text{wall}}$ 線図である。これは衝撃波発生点の個数を示した図であるが、図中の水色で示された領域においてのみ、衝撃波発生点が 2 点存在することが分かる。

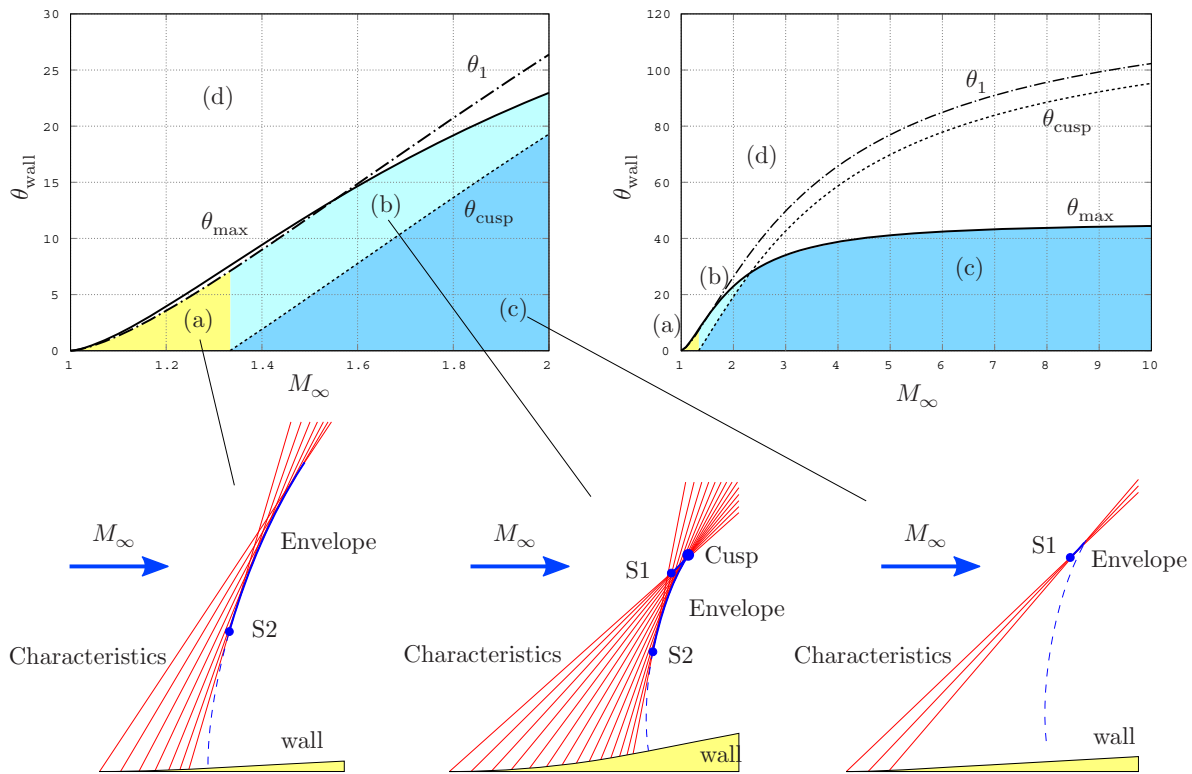


Fig.3 Classification of the number of the start point of a shock wave²⁾

4 数値解析による衝撃波発生点の分類

本節では、先に示した流れ場を数値的に解析し、その結果から衝撃波を抽出することによって衝撃波発生点を決定し、それと理論的に導出された結果とを比較、考察する。

4.1 解析手法の概要

対象となる流れ場は Fig.1 に示すような領域である。ここで曲面の曲率 R は 5 に固定し、パラメータである一様流マッハ数 M_∞ は 1.25 から 1.5 まで 0.01 おき、壁面転向角 θ_{wall} は 3 deg から 11 deg まで 2 deg おきに設定している。ただし、 $\theta_{wall} = 11$ deg の場合のみ、 $M_\infty = 1.52$ から 1.65 までのケースも追加してある。以上のパラメータの組み合わせを $M_\infty - \theta_{wall}$ 線図上にまとめたものを Fig.4 に示す。

本稿で扱う現象は、圧縮波と衝撃波の理論的取り扱いに対応するものであるため、ここでは 2 次元非粘性の解析を行うこととした。以上の現象は、圧縮波の集積による衝撃波の発生であり、弱い波動を正しく扱うことが重要となる。そこで、今回は 5 次精度陽的 WCNS⁶⁾ によって高精度化した原始変数を用いた SHUS⁷⁾ によって対流項を評価した。また、時間積分には 3 次精度 3 段階の TVD Runge Kutta 法⁸⁾ を用いた。格子点数は壁面に沿う方向及び壁面から離れる方向に対してそれぞれ 965 点、500 点とした。

4.2 衝撃波検出法による衝撃波と圧縮波の判別

上記の手法を用いることで得られた解析結果に対して、著者らが開発した衝撃波検出手法⁴⁾ に、圧縮波を取り除くフィルタ⁵⁾ を導入することによって、CFD 解析結果から衝撃波発生点を抽出した。この手法は、特性曲線の衝突部分を衝撃波として抽出する手法であり、これに対してベクトル場の曲率 κ を導入することによって、圧縮波と衝撃波を適切に判別

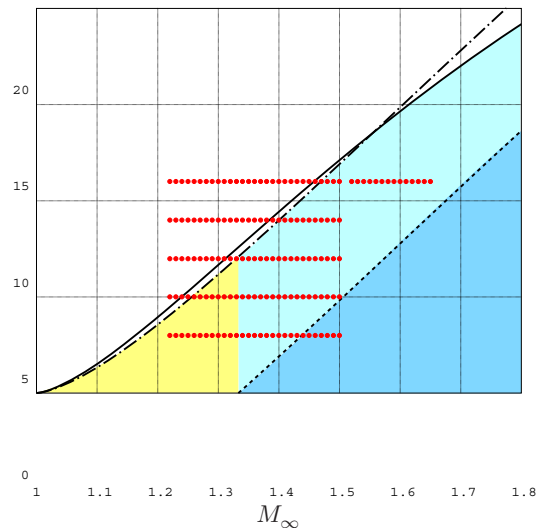


Fig.4 Parameters chosen for numerical analyses (red: chosen parameters)

することが可能になる。すなわち、各セルにおける衝撃波検出結果に対してベクトル場の曲率 κ を求め、それが大きい場合は衝撃波、小さい場合は圧縮波と判断する。その場合の判断基準 κ_c は、解析結果の格子に依存するということが分かっている。すなわち、計算格子の解像度に応じて、衝撃波かどうかを判断する基準 κ_c の値が変わってくる。そこで本稿では、格子解像度を 965×500 に固定し、更にパラメータ (M_∞, θ_{wall}) を理論的に正しいことが確認されているものに設定することで、理論解と比較しながら κ_c を決定した。その様子を Fig.5 に示す。Fig.5 において、青は衝撃波の理論

解, 赤は衝撃波検出結果を示す. κ_c の値を適切に調節することによって, 衝撃波検出結果が減少している様子が見られる. これは, κ_c よりも大きい値をとる検出結果を衝撃波として残しているためである. この図から, 今回の問題設定の場合 $\kappa_c = 17$ と設定することによって, 圧縮波を適切に判別できるものと考えられる.

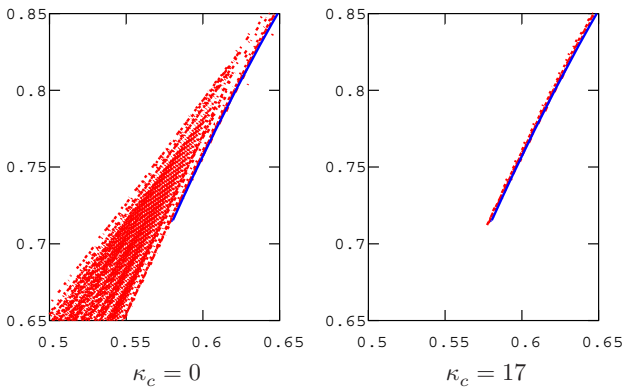


Fig.5 Determination of κ_c as a threshold of the distinction parameter (red: detected, blue: theoretical) with the result $(M_\infty, \theta_{wall}) = (1.25, 5 \text{ deg})$

4.3 解析結果

前節にて述べた解析手法を用いて CFD 解析を行い, その結果から衝撃波を抽出することによって, 衝撃波発生点の分類について考察した. 特に重要なのは, 衝撃波発生点が 2 点存在する場合, すなわち, Fig.3 で水色で示される場合である. 代表的なパターンにおける衝撃波検出結果と理論解との比較を Fig.6 に示す. Fig.6 において, 青は衝撃波面の理論解, 赤は衝撃波検出結果を示す. この結果から明らかなように, 理論解から予想された通り衝撃波発生点は確かに 2 点存在していることが分かる.

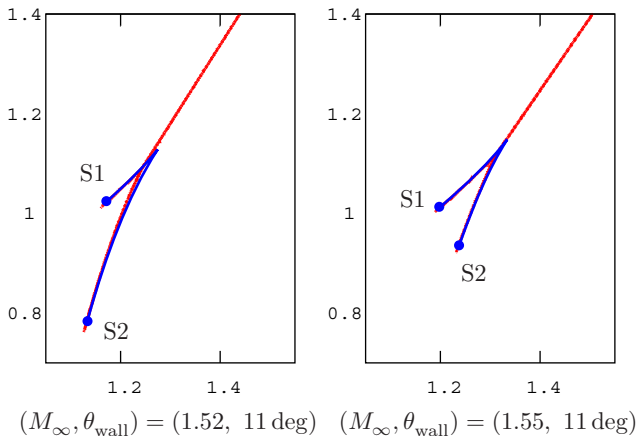


Fig.6 Comparison between theoretical and numerical results for the case of two shock starting points (red: detected, blue: theoretical)

しかし, 理論解による衝撃波面と, 衝撃波検出結果とは僅かながらずれが生じている. これは, 理論解における特性曲線の取り扱いによるものである. すなわち, Landau & Lifshitz による特性曲線の理論では, 場の全体が等エントロ

ピーであると仮定しているため, 特性曲線は常に直線として取り扱われる. 一方で, 実際には特性曲線同士が衝突を起こすと, 衝突点の影響領域内を通る特性曲線は曲げられる. これは, 衝突点, すなわち衝撃波の発生点がエントロピーを生成し, その影響によって新たなエントロピー状態を基にした特性曲線の場合が設定されるためである. この様子を Fig.7 に模式的に示した. 以上の理由から, 特性曲線が次第に下流側へと曲げられ, その結果それらの衝突点の軌跡もまた, 下流側へと曲げられることになる. しかし, このように特性曲線が曲げられ始めるのは, 特性曲線同士が最初に衝突した点, すなわち衝撃波発生点より下流 (厳密にはその点の影響領域) であるから, 衝撃波発生点そのものは, CFD と理論解とで一致するはずである. 実際, Fig.6 を見ると, 衝撃波面の形状については, 理論解と CFD との間で差異が発生しているが, 衝撃波発生点自体は両者は良く一致している.

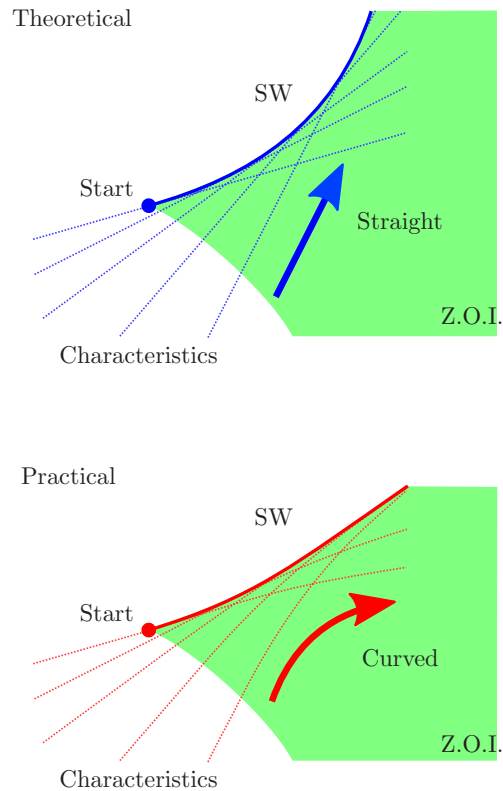


Fig.7 Difference between theoretical and practical behaviors of the characteristics in the zone of influence(Z.O.I.)

以上の考察から, 次のような場合に衝撃波発生点が理論解と一致しなくなる可能性が考えられる. すなわち, 衝撃波発生点 S1 の影響領域内にもう一方の衝撃波発生点 S2 が存在する場合である. 先ほどの考察より, S1 の影響領域内では, 特性曲線はもはや直線ではなくなるため, それらの衝突点の軌跡 (すなわち衝撃波面) は理論解とは異なることが分かった. 従って, S2 の位置もまた変更を受けることが予想される. 以上の観点から, 衝撃波発生点 S1 の影響領域を合わせて示し, もう一方の衝撃波発生点 S2 がどのような影響を受けるかを考察した.

Fig.8 は, 理論解及び衝撃波検出結果に合わせて S1 の影響領域を描画したものである. S1 の影響領域は, S1 を出発点

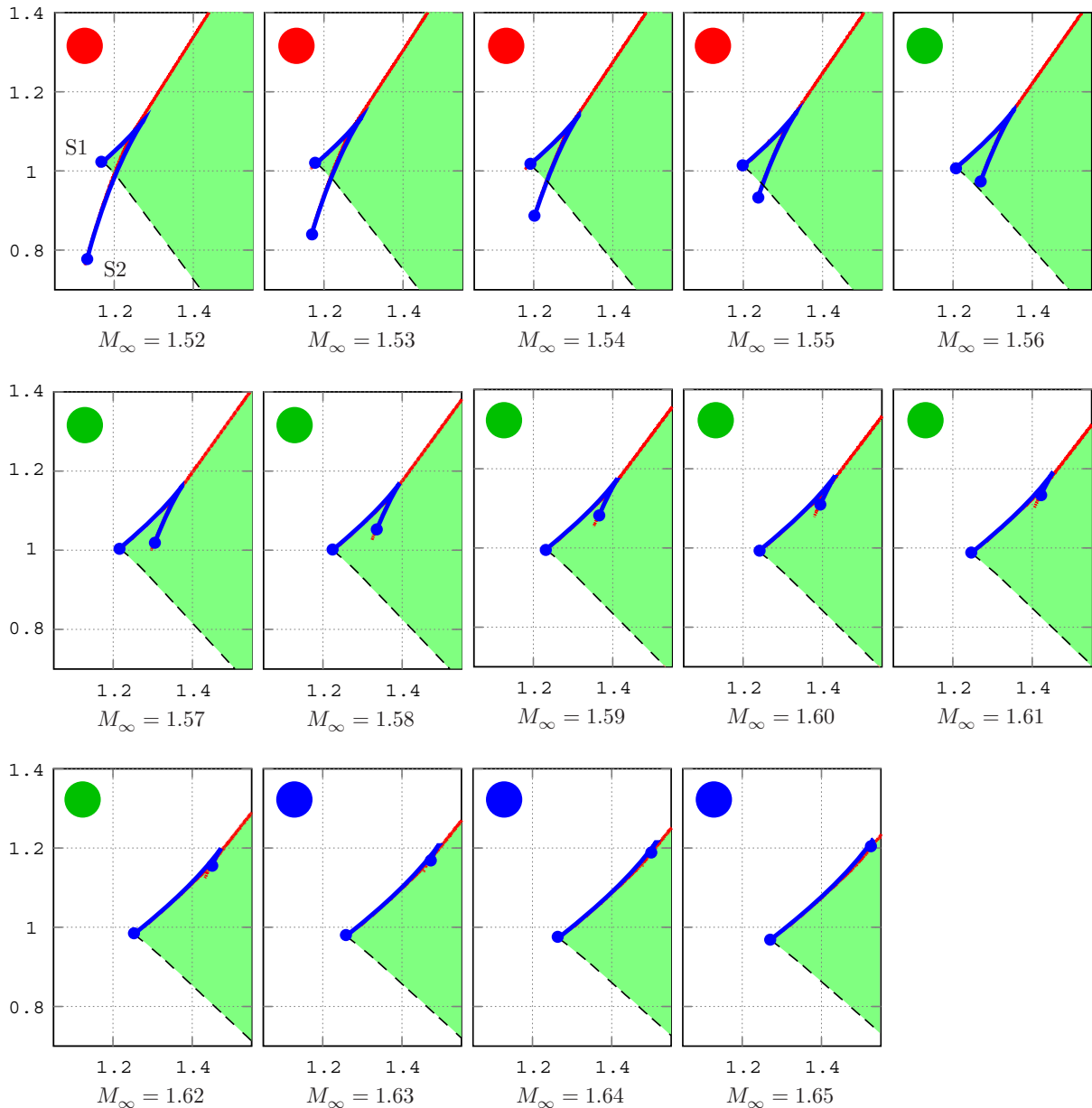


Fig.8 Effect of Z.O.I on the position of the start point of shock wave

として特性曲線を描画することによって得られる。特性曲線の描画法については付録 A にまとめた。Fig.8 の各図において左上に示される丸は、衝撃波発生点の個数に応じて決まった色をとる。すなわち、CFD の解析結果から判断して、衝撃波発生点 S2 の位置が理論解と一致する場合は赤、異なる位置にある場合は緑、完全に消失してしまう場合は青で示してある。なお、Fig.8 に示した図はすべて $\theta_{\text{wall}} = 11 \text{ deg}$ であり、理論的にはいずれのマッハ数に対しても衝撃波発生点は 2 点存在する条件となっている。この結果を見ると、S2 が影響領域に入ったとしても、ある程度マッハ数が小さい場合には S2 の位置に大きな変化はないということが分かる。それに対して、 $M_{\infty} = 1.63$ を超えるマッハ数の場合に S2 は完全に消失している。これは、特性曲線が曲げられた影響で、S1 から発生した衝撃波が尖点に到達する前に強く曲げられ、その結果 S2 の位置よりも下側 (壁面側) に移動してしまうた

め、理論的には S2 にあるべき衝突点に到達する前に特性曲線が衝撃波と衝突してしまうためであると考えられる。

Fig.4 に示したすべてのパラメータ ($M_{\infty}, \theta_{\text{wall}}$) に対して同様の解析及び処理を行い、衝撃波発生点の個数の分類をまとめたものを Fig.9 に示す。Fig.9 において、灰色、青、赤の各色で示される点は、CFD 解析及び衝撃波検出によって衝撃波発生点の個数を調べた結果であり、それぞれ 0 個、1 個、2 個の衝撃波発生点に対応する。理論的には、#2 で示される水色の領域において衝撃波発生点は 2 点存在するはずであるが、今回の解析結果から、実際には Fig.9 下の図内に水色で示される領域のように、縮小されるということが分かる。

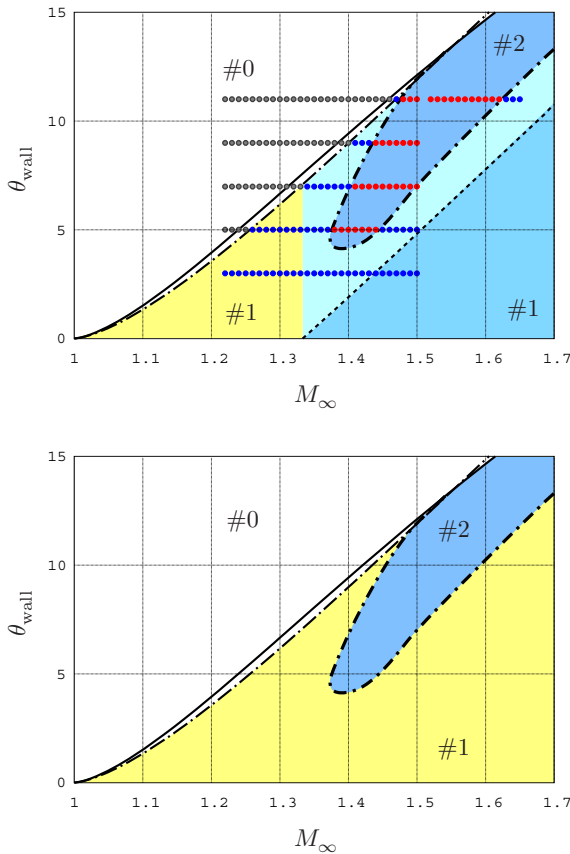


Fig.9 Modified classification of the number of the start point of a shock wave

5 まとめ

緩やかな上り坂へ向かう超音速流れを CFD によって解析することによって、圧縮波が衝撃波へと移り変わる点の存在を検証した。著者らは既に、特性曲線の理論を用いて解析的にこれらの結果について考察し、衝撃波発生点は最大で 2 点存在するということを理論的に示したが、その結果は CFD 解析結果においても存在することが確かめられた。一方で、衝撃波発生点の個数に関する理論的な分類は、CFD の結果とは異なるものとなった。すなわち、上流側の衝撃波発生点の影響領域内にもう一方の衝撃波発生点が存在する場合、後者が消失することがあることが確認された。

付録 A 特性曲線の描画

特性曲線に沿った Riemann 不変量 P 及び Q の輸送方程式は次式で表される⁹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{M^2 - 1} \cos \theta + \sin \theta}{M} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\sqrt{M^2 - 1} \sin \theta - \cos \theta}{M} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\sqrt{M^2 - 1} \cos \theta - \sin \theta}{M} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\sqrt{M^2 - 1} \sin \theta + \cos \theta}{M} \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

この方程式に対して、特性曲線の方程式は常微分方程式系の形で次のように表される。

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{M^2 - 1} \cos \theta \pm \sin \theta) / M \\ (\sqrt{M^2 - 1} \sin \theta \mp \cos \theta) / M \end{bmatrix} \quad (2)$$

これは、流線の微分方程式の右辺が置き換わったものと考えることができる。従って、流線の描画と同様に、適当な初期値を設定し、そこから積分すればよい。

参考文献

- 1) L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1987.
- 2) 金森正史, 鈴木宏二郎. 圧縮波領域中の衝撃波発生点に関する理論的考察. 第 43 回流体力学講演会論文集, No. 1E10, 2011.
- 3) Y. B. Zel'dovich and Y. P. Raizer. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Dover Publications, New York, 2002.
- 4) Masashi Kanamori and Kojiro Suzuki. Shock wave detection in two-dimensional flow based on the theory of characteristics from cfd data. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 8, pp. 3085–3092, 2011.
- 5) 金森正史, 鈴木宏二郎. 特性曲線理論に基づく衝撃波検出手法の拡張について. 第 42 回流体力学講演会論文集, No. 1E8, 2010.
- 6) X. Deng and H. Zhang. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 165, pp. 22–44, 2000.
- 7) 嶋英志, 城之内忠正. 一粒子的風上法について. 第 25 期日本航空宇宙学会年会講演会, No. 1B5, 1994.
- 8) C. W. Shu and S Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, pp. 439–471, 1988.
- 9) 松尾一泰. 圧縮性流体力学 内部流れの理論と解析. 理工学社, 1994.