1－5

剝離のある流れの数値解析

桑原邦郎*

Some Numerical Analyses of Flows with Separation

Kunio Kuwahara

The Institute of Space and Astronautical Sciences

Computational study of high Reynolds number flow with large separation is the most important problem now in computational aerodynamics. In this paper, some examples of recent results of studies of such flows are presented. The methods used are finite-difference methods and vortex methods. The first example is that of an incompressible flow past two cylinders computed by the finite-difference method based on a stream function-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. It is pointed out that special care must be taken to determine the boundary values of the stream function on the bodies when using this method. The second example is that of an incompressible flow past a circular cylinder at a critical Reynolds number computed by the MAC method using an improved upwind difference. The sharp drag reduction is first captured numerically by this computation. Third is an example of the simplest version of the new vortex methods without conformal mapping, which enables us to compute incompressible flows with large separation very easily and economically. The last example is of a transonic flow past an oscillating airfoil computed by the Beam-Warming scheme, which is the most common method for solving the compressible Navier-Stokes equations. New methods are suggested for future development of computational aerodynamics.

1.

剝離のない流れを数値的に調べるには，ポテンシャル方程式に基づいた方法が普通である。境界層の補正を考慮した場合でも，圧縮性，非圧縮性流体とも３次元流れまでほぼ設計に利用できる段階まできている。これに反して剝離のある流れは依然としてかなり大変な問題である。

２次元流れに関しては，かなりな程度の解が求められるようになってきているが，３次元流れはまだ始まったばかりといえる。ここでは，現在どのような方法で剝離のある流れを取り扱い得るかを考えてみたい。圧縮性のある流れとない流れでは，手法的にかなりの違いがあるので，２つの場合にわけて考える。

まず非圧縮性流れでは，Navier－Stokes 方程式を直接差分法で解く方法と，完全流体の理論に基づいて，渦のある領域を渦糸の集まりで近似する渦糸近似法が主として考えられる。圧縮性流体に関しては，渦糸近似法の適用が今のところ非常にむずかしいので，Navier－Stokes 方程式を直接数値的に解くというのが唯一の道であろう。差分法のかわりに有限要素法の適用が考えられるが，上流差分的な考えを入れにくい等の問題があって，空気力学的問題

＊宇宙科学研究所

に関しては今のところ差分法の方が圧倒的に有力である。

以下順に上にのべた手法を用いた最近の興味ある結果をいくつか紹介する。

2. 非圧縮性2次元流れの差分法による例1

流れを支配するのはNavier－Stokes方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}=-\mathrm{grad}\,P+\frac{1}{R_e}\Delta\boldsymbol{v} \qquad (1)$$

と連続の方程式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0 \qquad (2)$$

である。この方程式を直接差分化して解くのは，圧力の処理が厄介なので，2次元の場合，流れ関数Ψと渦度ωを導入して

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}-\frac{\partial(\Psi,\omega)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{R_e}\Delta\omega \qquad (3)$$

$$\Delta\Psi=-\omega \qquad (4)$$

という形にして解くのがよく行なわれている。しかし，物体を過ぎる流れを計算するには，物体表面上のΨの値を前もって知ることができないので十分な注意が必要である。このΨの値をきめるには，圧力が一価であるという条件を用いる必要がある[1]。すなわち

$$\oint_{\text{物体回り}} p\ ds=0$$

非定常的な流れでは，各時間ステップごとにこの条件を能率よく満たしていかなければならないので特に工夫が必要である。

幾何学的にごく単純な場合を除いて，実際に解くには一般座標系を導入し，方程式(3), (4)を一般座標系に変換し適当な格子生成法と組み合わせて解く必要がある。この方法を用いた2円柱を過ぎるReynolds数200の計算例を図1に示す。主流方向に関して斜めにおかれている時，上流側にある円柱からはKarman渦の放出がほとんどなく，もっぱら下流側の円柱からのみ渦の放出があるという結果が得られている[2]。

この方法は比較的簡単に用いることができる有力なものであるが，最大の欠点は，3次元流れへの拡張が非常にむずかしいことである。

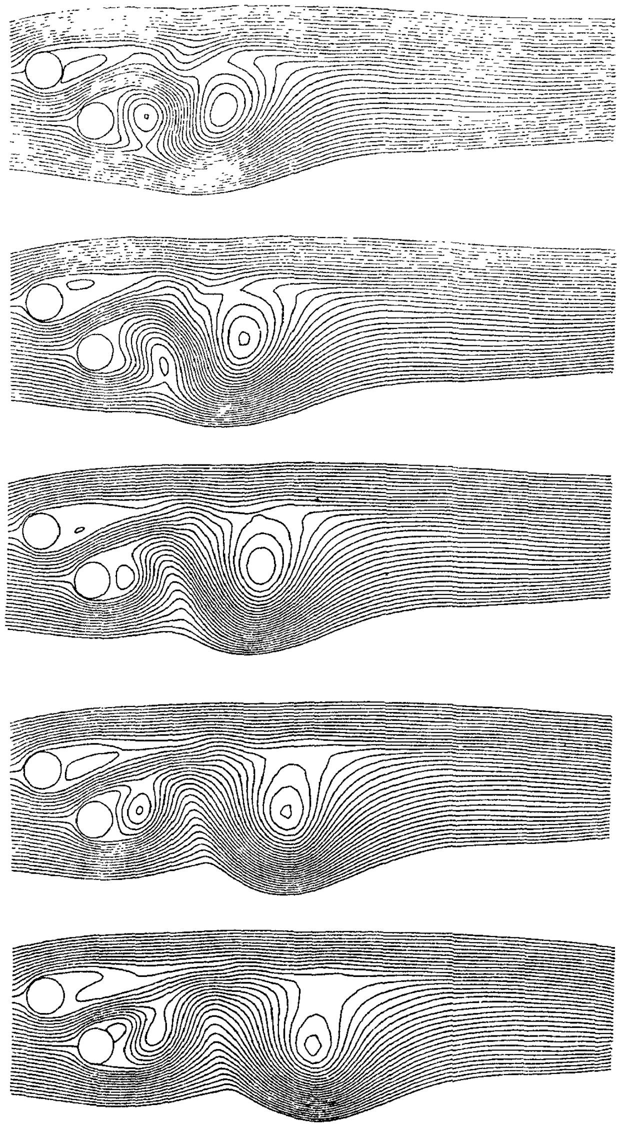

図1 流線図. R_e=200.

3. 非圧縮性2次元流れの差分法による例2

3次元流にすぐ拡張可能な方法は，速度$\boldsymbol{v}$，圧力Pを直接従属変数として解く方法である。それには，Navier-Stokes方程式の発散をとり

$$\Delta P=-\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v})$$

というPoissonの方程式から$\boldsymbol{v}$を既知として圧力場Pを用い次の時刻の速度場を，Navier－Stokes方程式から求めるというMAC法が有力である。

高いReynolds数の流れを解く場合，拡散過程が非常に少ないので，流れの情報は主として上流から下流へ伝わる。このことを考慮に入れないと安定性のよい差分スキームができないということはよく知

られてきた。このためによく用いられるのが非線型項を差分化するとき，上流差分という考えを取り入れることである。しかし一番単純な1次の上流差分は誤差項が粘性拡散と同じ2階微分の形になり，高いReynolds数の流れのシミュレーションにはむかない。2次の上流差分を用いるとかなり改善されるが，誤差の主要項が3階微分の形になり，数値誤差が拡散せず波動的に伝わってしまいあまりいい結果が得られない。そこで，この2階の上流差分が本質的に5点差分近似であることを用いて係数を調整し，3階微分の誤差項を消し，誤差の主要項が4階微分の形になるようなスキームが考えだされた[3]。この4階微分の拡散項は，用いている格子では解像しきれない非線形項から必然的に出てくる高い波数成分を効果的に取りのぞき，かつ粘性拡散に比べて局所的にしか拡散効果がないので，高いReynolds数の流れを計算する場合，きわめて有効なものと思われる。

このスキームを用いて円柱をすぎる臨界Reynolds数附近の流れが計算された[3]。この際，臨界Reynolds数をなるべく低くするために表面粗さをつけた。Reynolds 数 40,000の流れの流線図（図2）および抵抗，Strouhal 数のReynolds 数依存性を示す（図3）。この計算は臨界Reynolds数を初めて数値的にとらえたものといえるであろう。

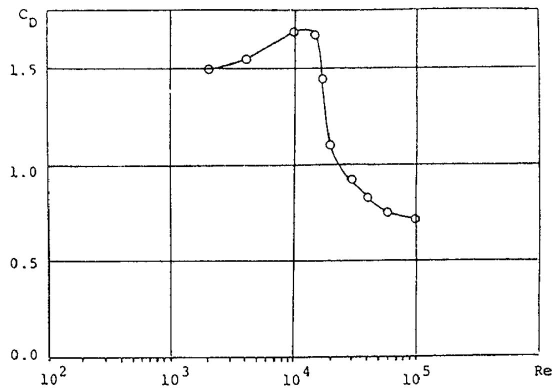

図3(a)　抵抗係数－Reyrolds 数

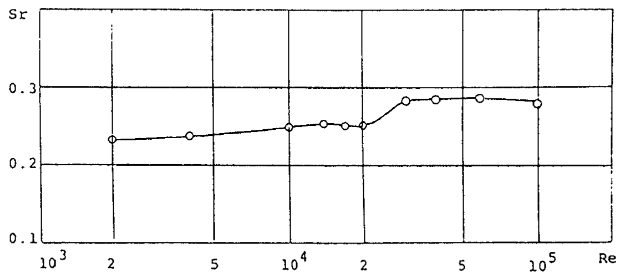

図3(b)　Strouhal 数－Reynolds 数

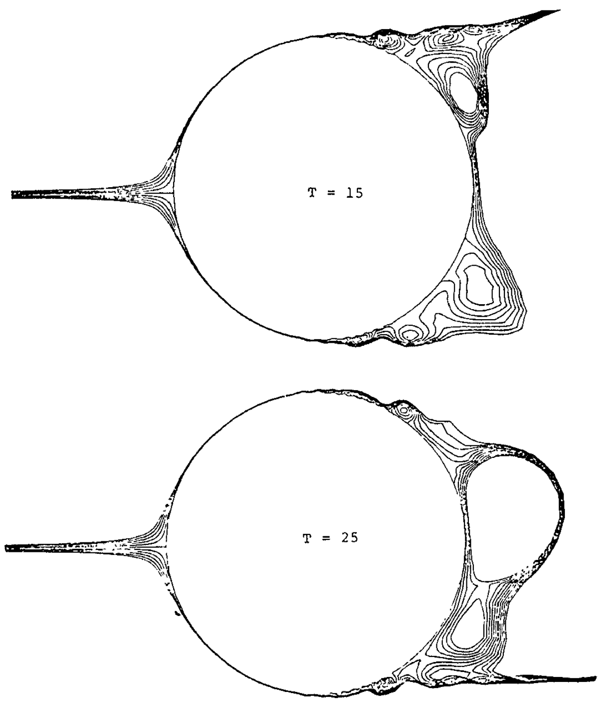

図2　境界層附近を通る流線．$R_e=40,000$

4. 渦糸近似法

上記のような差分法は，正攻法ではあるが，剝離のある高いReynolds数の流れを解くには，HITAC－M280HあるいはFACOM－M380 クラスの計算機を用いても1ケース当り数時間かかるのが普通である。しかし大きな剝離のある流れでは，特別な場合をのぞいてReynolds数依存性は小さく，また大まかな流れの様子がわかれば十分であるという場合が多い。このような時にはるかに能率よく流れをシミュレートする計算法が渦糸近似法である。

高いReynolds数の流れでは粘性の影響はきわめて狭い領域あるいは薄い層だけに局限されていて，その他の大部分の領域では流れは渦なしで粘性が無視できるという場合が多い。また渦はそのような粘性のきく領域でしか発生せず，しかもいったん発生した渦はなかなか消滅しないという性質がある。この事実を基礎にして，渦度をもつ領域を多数の渦糸の集団でおきかえ，渦糸間の運動学的な相互作用でお

こる渦糸の運動を追跡することによって流れを調べるのが渦糸近似法である。

この方法は，形式的にはReynolds数無限大の極限の流れを扱うことになるのだが，数値積分の際，不可避的に入ってくる誤差が拡散的であるので，Euler方程式の解を求めるというより，高Reynolds数のNavier-Stokes方程式の解に近いものが得られる。この誤差項による拡散は分子粘性的なものではなく渦粘性的なものであって，渦糸近似法はその中に簡単な乱流モデルを含んでいるということがいえる。[4] 分子粘性の効果を正しく入れるには，渦糸にランダム・ウォーク的な動きを附加することによってできる。またこのランダム変数の分布を変えることによって，もっと精密な乱流モデルを導入することも可能であろう。

物体を過ぎる流れに渦糸近似法を適用するには，まずその形を円に等角写像する。つぎに物体表面上の境界条件を満足させるために，流れ場の中にある渦糸のおのおのについて，円に関する鏡像の位置に渦糸を導入する。新しい渦の発生は，すべりなし条件あるいは，Kutta 条件によって決定する。以上のような方法がよく用いられてきた。しかし，任意の形を円に等角写像するのは容易なことではないので，最近等角写像によらない方法が開発されてきた。ここではその中で最も簡単と思われる方法を紹介する。[5]

それは，渦糸を境界上に分布させ，その強さを境界が近似的に流線になるという条件を附加することによって各時間ステップごとにきめる方法である。境界上におかれた渦糸は動かず，流れ場の中にある渦糸は通常の渦糸近似法のように強さを変えずに他のすべての渦糸が誘導する速度で動いていく。この方法で求めた翼型の上におかれたスポイラーによる剝離渦の動きの計算例を示す（図4）。

渦糸近似法は2次元流れに対しては非常に威力を発揮するが3次元流れに関しては，いろいろな試みはあるがまだ確立された方法はないといっていいだろう。3次元の場合，渦糸という概念にとらわれすぎるとどうしても無理がでてくるようである。新しい方法として，渦糸ではなく渦度がLagrange的に流され，かつそれとは独立に渦度が強さを変えていくという形で渦の動きをとらえようとしたBealeとMajdaの方法[6]がまだ計算例はないが非常に有望な方法と思われる。

5. 圧縮性流れ

剝離のある圧縮性流れを扱うのは必然的に高Reynolds数になってしまい，かなり大規模な計算が必要になる。この類の計算は最近になってやっと可能になってきた。

圧縮性流体の運動は，非圧縮の場合に比べて方程式は複雑になるが原理的な扱い方はむしろ簡単になる。それは非圧縮性流体では圧力場$\boldsymbol{P}$が流速場$\boldsymbol{v}$から受動的にきまるのに対して，圧縮性の場合には$\boldsymbol{P}$も$\boldsymbol{v}$も対等に時間発展的に決まっていくからである。

圧縮性流体に関する基礎方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial z}=\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial z}\right)$$

という形にまとめて書くことができる。この方程式を具体的に解くにはいくつかの有力な方法がある。第1はMac Cormackの陽解法で1階微分係数を交互に上流差分と下流差分でおきかえて進む方法である。この方法は陽解法であるのであまり安定性がよくないが，局所的に安定条件をやぶるところだけ陰解法をとり入れたMacCormackの陰解法[7]がつかわれ始めている。

しかし現在Navier-Stokes方程式を解くもっとも有力な方法として用いられているものはBeam-Warming法あるいはその改良版であろう。Beam-Warming法は，ADI法の変形である因数分解法と適当な局所線形化を組み合わせて安定性の比較的よい陰解法でありながら時間発展的には反復操作なしに三重対角行列の反転という直接法で解ける方法を用いて能率をよくしている。

この方法を用いて迎角4°±1°の範囲で振動するNACA64A010翼型をすぎるMach数0.8の流れを求め衝撃波の翼面上の位置を計算した結果を実験値とともに図5に示す。[8] CDC7600で約10時間の計算である。この方法で3次元の剝離流れを扱うことが可能になり，興味ある結果がではじめている。[9] しかし

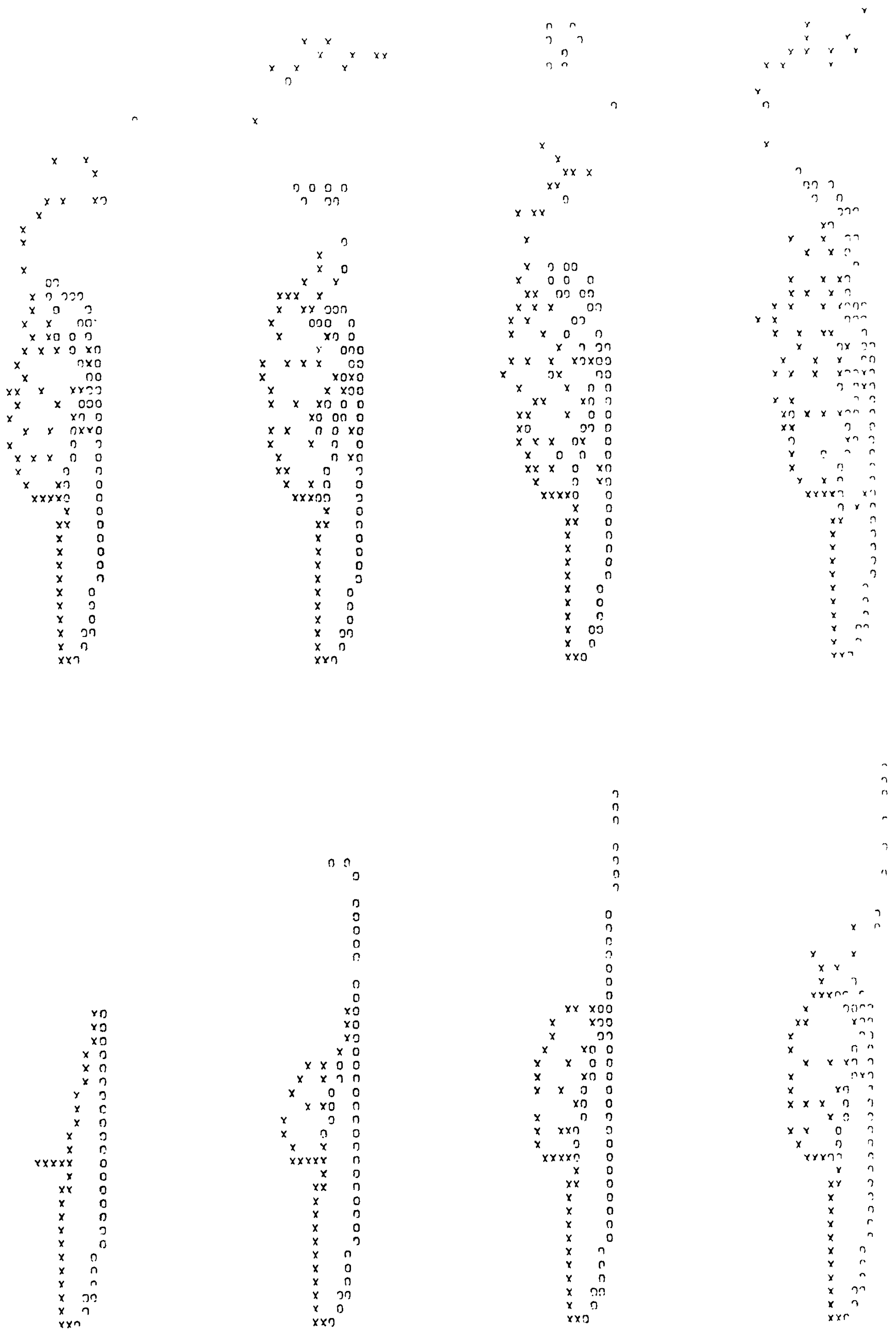

図 4　スポイラーによる渦の剥離

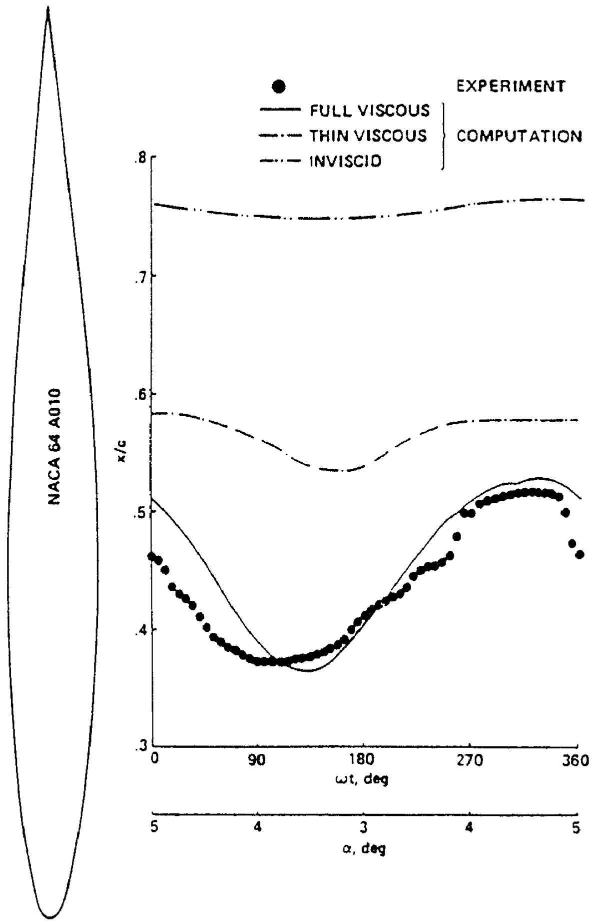

図5　衝撃波の位置

ながら計算時間はCRAY1を用いて数時間を必要とする。

最近新しい解法として空間的には有限体積法を用い時間発展的にはRunge-Kutta 法を用いるスキームがJamesonらによって開発されている。まだEuler方程式にしか適用例がないが，Beam-Warming法にくらべて10～100倍の能率向上が得られたと報告されている。[10] もしこの程度の効率があれば，3次元物体の回りの遷音速領域での剥離流れがスーパー・コンピューターを用いれば1時間以下で求まることになる。

文　献

1) Y. Matida, K. Kuwahara, H. Takami: J. Phys. Soc. Jpn. 38 (1975) 1522.
2) Y. Shida, K. Kuwahara, H. Takami: Proc. 2nd Asian Congress of Fluid Mechanics (1983).
3) T. Kawamura, K. Kuwahara: AIAA paper 84-0340 (1984).
4) K. Kuwahara, H. Takami: Proc. IUTAM Symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids (1983).
5) K. Izumi, K. Kuwahara: AIAA paper 83-1711 (1983).
6) J. T. Beale, A. Majda: Math. Comput. 39(1982) 1.
7) R. W. MacCormack: AIAA J.20 (1982) 1275.
8) W. J. Chyu, K. Kuwahara: AIAA Paper 82-0350(1982).
9) K. Fujii, P. Kutler: AIAA paper 83-1908(1983).
10) A. Jameson, T. J. Baker: AIAA paper 83-1929.