

## ダクト内三次元流れの一数值解法

田村 敦宏 ・ 菊地 一雄

## A Numerical Procedure on Three-Dimensional Parabolic

## Flow in Duct

Atsuhiko Tamura and Kazuo Kikuchi

National Aerospace Laboratory

## Abstract

A numerical procedure for solving the three dimensional viscous flow in a duct is described in this paper. The governing equations are parabolized according to boundary layer approximation such that the derivatives concerning physical quantities along the main flow direction are much smaller than those in the secondary flow direction. No assumption such as uncoupling of the longitudinal and cross flow pressure gradients is made for the pressure field. And also relaxed continuity equation is used, which allows constant source distributions in the radial direction. Assumed wall pressures are corrected by the Newton-Raphson method so as to reduce the source distributions to zero. Example calculations of the three dimensional flow field in a curved annulus and curved pipe are carried out. Typical secondary flow patterns are obtained for either case.

## 1. まえがき

流体機械要素の接続部に用いられるダクトや流入部に設けられるノズル、ディフューザなどは、その構造は比較的単純ではあるが、微妙な形状の適否によって流体機械全体の性能を大きく左右するものとして、その内部流れの解析は古くて新しい重要な問題となっている。最近では、三次元翼列流れをも内外壁と翼面によって囲まれたチャンネルと見做す考え方や、エンジンの出口の排気混合ノズルなど広義のダクト流れと云える問題が多く出てきている。ノズル、ディフューザ、ダクト等の設計は、その内部流れを、二次元もしくは回転軸対称なものにつ

いては、ポテンシャル流れとして扱ったり、特性曲線法によったり、ターボ機械では流線法等が選択的に使われてきた。これらは非粘性解法であるため、必要に応じて境界層補正が加えられる場合もある。しかしながら多くのターボ機械の場合、その内部の流路は粘性境界層の影響を著しく受けるため非粘性解は一つの目安にすぎない場合が少なくない。又三次元のダクト流れの解析手段や設計方法が提案されたのもここ数年のことである。最近ターボ機械の翼列その他の設計水準が向上し、翼列設計でも二次元オイラー方程式をベースとしたものから三次元への拡張、更にはナビエーストークスの方程式を基礎としたものに向いつつある。これと呼応して、ダクトの設計も、粘性、圧縮性を考慮した三次元放物型ナビエーストークスの方程式を基礎とした設計に向って

いる。

ダクト流れの数値解析を行なう場合、放物化されたナビエーストークスの方程式を基礎とした方程式系で取り扱うことは、初期値問題として内部流れが上流から下流に向かって前進的にきわめて効率的に解けることから、三次元粘性流のフローパターンを予測するのに優れた性質を持っている。又放物型の基礎方程式に支配される流れの特徴として、剝離現象を扱えない欠点は、ダクトの設計に際しては安全サイドとなり大きな足かせとはならず、むしろその計算効率の良さこそ設計に活用されるべきであろう。放物型の基礎方程式系において、圧力場のみ楕円型として背圧の影響を考慮することもできる。

三次元ダクト流れの数値解法の公表されたものは少なく、文献(1)等によって提案されたものが主体となっている。この方法では、方程式の放物化のし方と圧力項の取り扱いに特徴を有している。ここでは、上述の文献の解法とは全く別の考えに基く三次元ダクト流れの数値解法を提案し、その可能性の一部を例によって示そうとするものである。本解法は既に圧縮性、粘性を伴う回転軸対称ダクト流れの数値解析にきわめて有効であることが確認された方法を三次元ダクト流れに拡張したものである。本解法は端的に云えば、ダクト計算断面の圧力場を仮定し、relaxさせた連続の式  $\text{div } \rho \mathbf{q} = c_j$  一定と他の基礎方程式を連立し収束解を求め、仮定された圧力  $P$  と  $C$  の関係から  $C \rightarrow 0$  とするような圧力場を求め逐次改良することによって最終的に  $\text{div } \rho \mathbf{q} = 0$  を満す解を求める方法によっている。

## 2. 記号

$\xi_l$  ; 曲線直交座標系

$h_l$  ;  $\xi_l$  軸方向座標係数

$J$  ; ヤコビアン ( $=h_1 h_2 h_3$ )

$u_l$  ;  $\xi_l$  軸方向速度成分

$\phi_l$  ; ( $=\frac{J}{h_l} \cdot u_l$ )

$\mathbf{q}$  ; 合速度ベクトル

$P$  ; 圧力

$\rho$  ; 密度

$T$  ; 温度

$\mu$  ; 分子粘性係数

$\lambda$  ; ( $=-\frac{2}{3}\mu$ )

$K$  ; 熱伝導係数

$C_p$  ; 定圧比熱

$R$  ; ガス定数

$P_r$  ; プラントル数

$R_e$  ; レイノルズ数

$E$  ; エッケルト数

$\delta_{lm}$  ; クロネッカーのデルタ

添字

$l$  ;  $\xi_l$  軸方向

$i, j, k$  ;  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  軸方向の計算格子

## 3. 一般曲線直交座標系における基礎方程式系

三次元ダクト流れの方程式を取り扱うに先立って、次のような一般曲線直交座標系を導入する。図1に示すように  $\xi_3$  軸をダクト主流方向に、 $\xi_1$  および  $\xi_2$  軸は横断面内の放射状方向と周回方向の座標軸とする。 $h_l$  ( $l=1, 2, 3$ ) をそれぞれ  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  軸方向の座標係数とすれば、 $h_l$  は式(1)によって定め、 $J$  はヤコビアンである。

$$h_l^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_l}\right)^2 \quad (1)$$

$$J = h_1 h_2 h_3 \quad (2)$$

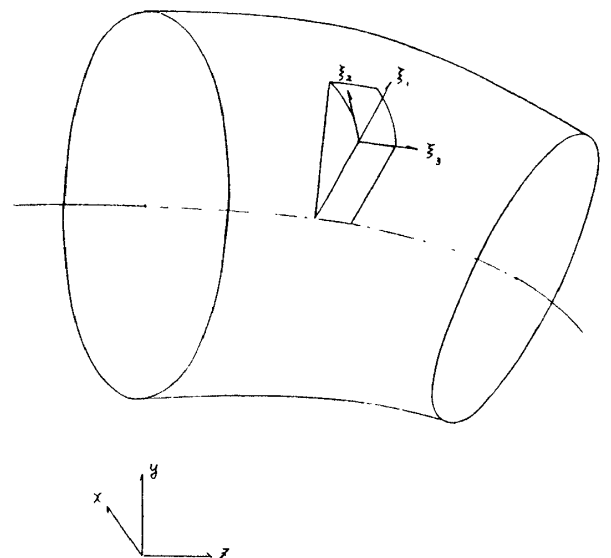


図1 一般曲線直交座標系

$u_1, u_2, u_3$ を各軸方向の速度成分とし、圧力 $P$ 、密度 $\rho$ 、温度を $T$ とし、すべての物理量は無次元化されたものとして扱う。さて一般にターボ機械に現われるダクトには、coreを有する環状の流路とcoreのないノズル状流路があるが、後者の場合座標系の特異点であるダクト中心軸での境界条件の取り扱いを容易にするため、速度成分 $u_l$ の代わりに式(3)のように $\phi_l$ を導入する。

$$\phi_l = \frac{J}{h_l} u_l \quad (3)$$

ダクト流れを支配する曲線直交座標系における三次元 full Navier-Stokes の方程式及びエネルギー、状態、連続の各式は、定常状態で次のように記述される。

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{h_l}{J} \right)^2 \left\{ \phi_1 \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_1} + \phi_2 \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_2} + \phi_3 \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_3} + f_l \right\} + \frac{\partial P}{\partial \xi_l} \\ &= \frac{1}{R_e J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \tau_{11} \frac{h_l J}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \tau_{12} \frac{h_l J}{h_2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \tau_{13} \frac{h_l J}{h_3} \right) - J(D_{1l} \tau_{11} + D_{2l} \tau_{22} \right. \\ & \quad \left. + D_{3l} \tau_{33}) \right\} \quad l=1, 2, 3 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \phi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (C_p T) + \phi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (C_p T) + \phi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (C_p T) \right\} \\ & - E \left( \phi_1 \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + \phi_2 \frac{\partial P}{\partial \xi_2} + \phi_3 \frac{\partial P}{\partial \xi_3} \right) \\ &= \frac{1}{P_r R_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{JK}{h_1^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{JK}{h_2^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{JK}{h_3^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right) \right\} + \frac{E}{R_e} \cdot J \cdot \Phi \quad (5) \end{aligned}$$

$$P = \left( \frac{g R T_0}{U_0^2} \right) \cdot \rho \cdot T \quad (6)$$

$$\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho \phi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho \phi_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho \phi_3) \right\} = 0 \quad (7)$$

ここに

$$\tau_{lm} = \delta_{lm} \cdot \lambda \operatorname{div} \mathbf{Q} + A_{lm} \quad (8)$$

$$A_{ll} = \frac{2\mu}{J} \left\{ J \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \frac{\phi_l}{J} \right) + \phi_1 D_{l1} + \phi_2 D_{l2} + \phi_3 D_{l3} \right\} \quad (9)$$

$$A_{lm} = A_{ml} = \mu \left\{ \frac{h_l}{h_m} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\phi_l}{J} \right) + \frac{h_m}{h_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \frac{\phi_m}{J} \right) \right\} \quad l \neq m \quad (10)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\mu} \left\{ \tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) \right\} \quad (11)$$

$$D_{lm} = \frac{1}{h_l} \frac{\partial h_l}{\partial \xi_m} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_l = & \phi_l \left\{ (2D_{l1} - J_1) \phi_1 + (2D_{l2} - J_2) \phi_2 \right. \\ & \left. + (2D_{l3} - J_3) \phi_3 \right\} - \frac{1}{h_l^2} \left\{ (\phi_1 h_1)^2 D_{1l} \right. \\ & \left. + (\phi_2 h_2)^2 D_{2l} + (\phi_3 h_3)^2 D_{3l} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

#### 4. 基礎方程式の放物化

さて方程式(4), (5)は層流の場合の full equation であるため、放物化をしなければ上流から下流に向かって前進的に解くことはできない。ダクト流れにも、ダクトの入口から出口に向かって剝離もなく自然に流れるものもあれば、途中で剝離を起し逆流域を持つ流れもある。我々が対象としているのは前者に該当するもので、ダクト形状に極端な変化がなく、内部の流れのダクト壁に垂直な $\xi_1$ 軸方向の変化に較べて主流方向である $\xi_3$ 軸方向の変化が充分小さい、いわゆる境界層型の近似が成立する場合を取り扱う。文献(1)は基礎方程式の放物化を次のような近似によって行っている。

1) 主流に垂直な断面に働くせん断応力の下流方向変化を無視する。

2) 主流方向運動量の式の圧力勾配を断面平均圧力で近似し、横断面方向の運動量の圧力項

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_1}, \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \text{ とは分離して扱う。}$$

これらの近似のうち(2)の近似が特徴的で、方程式系を解き易くしている反面、基礎方程式系に一種の準三次元的な近似を導入しており、連続の式の満し方にあいまいさを残している点に疑問が残る。

これに対して本解法では、次のような放物化のた

めの近似を行なう。

- 1) 各物理量の主流方向の変化はそれに垂直な方向の変化に較べて充分小さい。
- 2) 又、物理量のうち速度成分  $u_1, u_2, u_3$  の大きさは、 $u_1 \leq u_2 \ll u_3$  であるとする。

この近似は、上述の文献(1)の近似と同等であり、圧力に関しては一切の近似を行わない点に特徴がある。但し、 $u_1 \leq u_2 \ll u_3$  の近似は、ダクト流れが軸対称流に近い場合には、かなり大きなスワール  $u_2$  が存在し得るため考えられたもので、スワールが  $u_1$  に対して卓越していない場合は、 $u_1 \sim u_2 \ll u_3$  と考えるべきであろう。上述の近似を考慮して各方程式の order-estimation を実施して微小項を省略すれば次のような放物化された基礎方程式系を得ることができる。

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_1} = \rho \left( \frac{1}{J} \right)^2 \{ (h_2 \phi_2)^2 \cdot D_{21} + (h_3 \phi_3)^2 \cdot D_{31} \} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{h_2}{J} \right)^2 \left\{ \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} + \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} + \phi_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_3} + f_2 \right\} + \frac{\partial P}{\partial \xi_2} \\ &= \frac{1}{R_e J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{\mu h_2^2 J}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\phi_2}{J} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ 2 \mu J \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\phi_2}{J} \right) \right\} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{h_3}{J} \right)^2 \left\{ \phi_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} + \phi_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} + \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_3} + f_3 \right\} + \frac{\partial P}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{1}{R_e J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{\mu h_3^2 J}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\phi_3}{J} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \frac{\mu h_3^2 J}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\phi_3}{J} \right) \right\} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_r \cdot R_e \left[ \rho \left\{ \phi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (C_p T) + \phi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (C_p T) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \phi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (C_p T) \right\} - E \left( \phi_1 \frac{\partial P}{\partial \xi_1} + \phi_2 \frac{\partial P}{\partial \xi_2} + \phi_3 \frac{\partial P}{\partial \xi_3} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{JK}{h_1^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{JK}{h_2^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) \\ & \quad + P_r \cdot E \cdot \mu \cdot J \left[ \left\{ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\phi_2}{J} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{\phi_3}{J} \right) \right\}^2 \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \left\{ \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{\phi_3}{J} \right) \right\}^2 \right] \quad (17)$$

$$P = \left( \frac{gRT_0}{U_0^2} \right) \cdot \rho \cdot T \quad (18)$$

$$\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho \phi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho \phi_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho \phi_3) \right\} = 0 \quad (19)$$

なお放物化の問題点として order estimation によってどこまで省略しても本質を失わないかは、多くの事例の検証計算によって確かめられることで、本稿における近似は、 $\xi_1$  方向運動量の式がやゝ近似されすぎのきらいがある。

## 5. 初期条件と境界条件

ダクト流れにおいて与え得る入口条件、境界条件について概観してみよう。環状のダクト、即ちダクト内部に core を有する場合、速度の境界条件は、 $u_1, u_2, u_3$  がダクトの内外壁で 0 又は特定の値を与えることができる。温度場についても内外壁で温度もしくは、温度勾配を境界条件として与えるのが一般である。ここでは周期性のない一般の流れを扱うものとして、ダクト断面全域を計算領域とし、 $\xi_2$  方向の境界は内点と同様に扱い特に条件を付さない。さてダクト入口の条件は最も問題となるところで、ダクト入口から出口に向ってスムーズな流れが存在するためには、入口の物理量を任意にセットすることはできない。多くの文献では、入口条件を“realistic”なものと与えるとして実験データ又はそれを修正したものをを用いている。しかしながら、少なくともダクトに入ると放物型ナビエーストックスの方程式に支配される流れとなる以上、入口条件はこの方程式系の解のファミリーであるか、これに近いものでなければならないであろう。運動量の式で圧力勾配が速度の項で記述されているため入口速度分布と圧力場は密接な関係を持っている。そのためここでは、 $\xi_1, \xi_2$  方向の運動量の式において粘性項及び  $\frac{\partial}{\partial \xi_3}$  を無視した圧力と速度の関係式から、圧力場を入口速度分布に依存して定めることとした。

## 6. 放物化された基礎方程式の数値解法

基礎方程式が放物化された結果、ダクト入口の条件を設定すれば、あとはダクト壁での境界条件を与えることによって下流に向かって前進的に解くことが原理的には可能である。しかしながらこの種の問題では、圧力場の決定に関して大きな困難を伴うため、文献(1)のように圧力場の分離と云う近似を導入したりしてこれに対処している。ここではこのような近似によらずに圧力場を決定することができる。以下に図2のフローチャートを基に本解法の概要を説明する。今  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  軸方向をそれぞれ  $i, j, k$  とすれば、流れ場を計算しようとする  $(k+1)$  断面のダクト内壁の圧力は  $P_{1,j,k+1}$  と表わされる。放物化された  $\xi_1$  方向の運動量の式(14)において、ダクト内壁の圧力  $P_{1,j,k+1}^1$  を仮定すれば、内壁から  $j$  一定線に沿って外壁まで圧力を簡単に積分することができる。すべての  $j$  について積分をそれぞれ実施すれば、断面全体の圧力場が定まる。次に求められた圧力を用いて、(16), (15)さらには(17)から所定の境界条件を満すよう  $(\phi_3)_{i,j,k+1}, (\phi_2)_{i,j,k+1}$  および  $(T)_{i,j,k+1}$  の近似解が求められる。さて次に最も重要な手続きとして、連続の式(19)をもう一度  $\xi_1$  で微分して  $\phi_1$  に関する二階微分方程式(20)を導入する。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho \phi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho \phi_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho \phi_3) \right\} \right] = 0 \quad (20)$$

(20)は  $\text{div } \rho \mathbf{q} = C_j$  となるように  $\phi_1$  に関する両壁の条件を使って  $(\phi_1)_{i,j,k+1}$  を決定することになる。以上のプロセスを  $P, \phi_1, \phi_2, \phi_3, T$  が収束する迄くり返せば、最初に仮定したダクト内壁の圧力  $P_{1,j,k+1}^1$  に対する(21)で表わされる  $C_j^1$  が確定する ( $j=1,2,\dots$ )。

$$\begin{aligned} \text{div } \rho \mathbf{q} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho \phi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho \phi_2) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho \phi_3) \right\} = C_j \quad (21) \end{aligned}$$

次に内壁の圧力を  $P_{1,j,k+1}^2$  に仮定し直し、上と同様のプロセスを経て、 $P_{1,j,k+1}^2$  に対応する  $C_j^2$  が確定する。これらの  $C_j^1, C_j^2$  は  $i$  によらず  $j$  のみに依存す

る定数で、物理的には連続の式からの逸脱量を表わし、仮定された  $P_{1,j,k+1}^1, P_{1,j,k+1}^2$  と linear に近い関係を保つ。この性質を利用して、 $(P_{1,j,k+1}^1, C_j^1) : (P_{1,j,k+1}^2, C_j^2)$  のセットから Newton-Raphson 法によって  $C_j$  が 0 となるような  $P_{1,j,k+1}^3$  を求め仮定した内壁の圧力を改良する。このようにして  $C_j^M$  が充分小さくなるまで上のプロセスをくり返せば、 $C_j^M \in$ , 即ち  $\text{div } \rho \mathbf{q} = 0$  となり、すべての方程式と境界条件を満す解が得られる。なお始めに仮定される二セットの内壁の圧力の近似値  $P_{1,j,k+1}^1$  と  $P_{1,j,k+1}^2$  は、断面が進めば過去の断面の線形外そうと二次式による外そうで近似値を与えることができ、入口直後の断面では、これらの近似値は、入口の圧力及び、ポアズイユ流を仮定した圧力降下を与えてスタートさせることができる。

さて次に各方程式の離散化とその解法にふれることにする。今直交曲線座標系  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  において、図3のように、 $\xi_1$  軸方向に内壁から  $i=1, 2, 3 \dots \text{IM}$ , 又  $\xi_2$  軸方向に  $j=1, 2, 3 \dots \text{JM}$ , 断面方向に  $k=1, 2, 3 \dots$  とし、格子間隔  $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \Delta \xi_3$  がいずれも 1 になるよう直交曲線座標系を構成する。放物化された基礎方程式系(14), (15), (16), (17), (18), (20), (21)の主な項の離散化は、Crank-Nicolson 型の中心差分法を採用し次のように与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0.5 (F_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - F_{i-1,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} = F_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - 2F_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\ + F_{i-1,j,k+\frac{1}{2}} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0.5 (F_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - F_{i,j-1,k+\frac{1}{2}}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} = F_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - 2F_{i,j,k+\frac{1}{2}} + F_{i,j-1,k+\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_3} = F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k} \quad (26)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_1} = P_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - P_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (27)$$

特に、 $\text{div } \rho \mathbf{q} = C_j$  を実現するための(20)の離散化は、

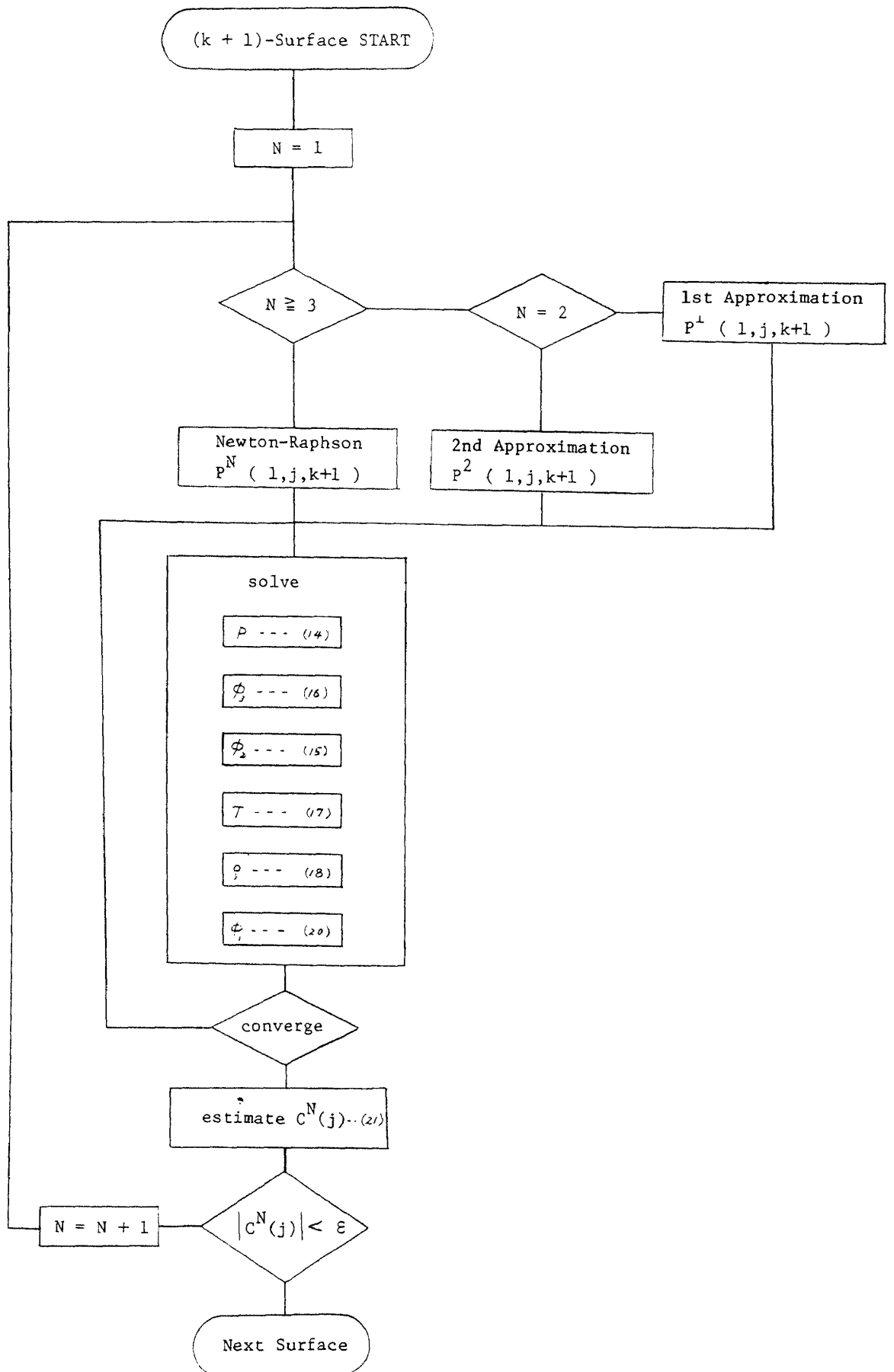


図2 フローチャート

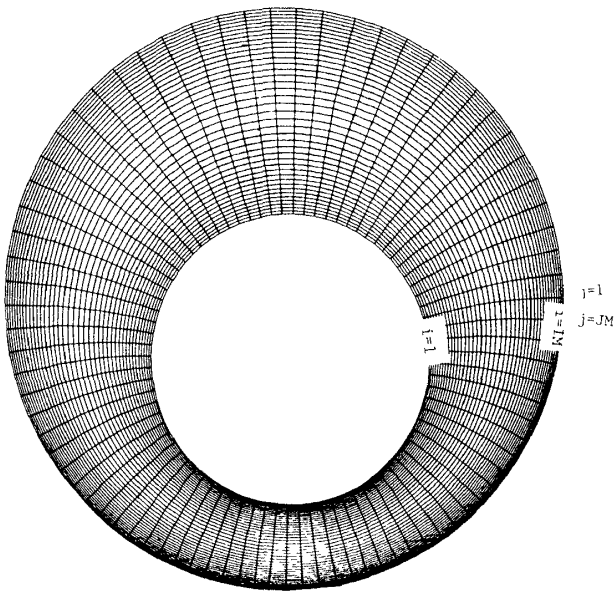


図3 二次流れ面の計算格子

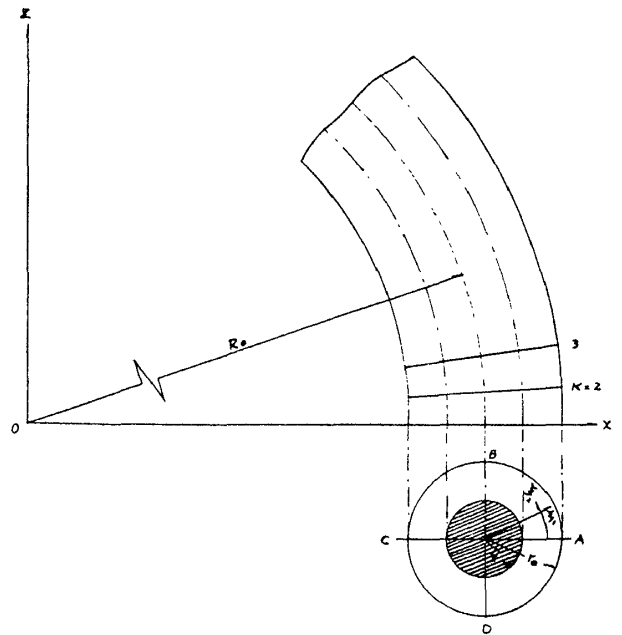


図4 曲り円環ダクト

$$C_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho \phi_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho \phi_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho \phi_3) \right\} \right]_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \quad (28)$$

とにおいて,

$$C_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - C_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = 0 \quad (29)$$

と与えられ、(29)は $\phi_1$ に関する二階微分方程式の離散化した形となる。これらの離散化によって、(15)、(16)、(17)及び(20)は、すべて、それぞれ $\phi_2$ 、 $\phi_3$ 、 $T$ 及び $\phi_1$ について内外壁で境界条件が与えられ、 $i$ 方向に三項方程式となり容易にその解を定めることができる。なお一般直交曲線座標系の生成については、別途ソフトウェアが用意されているのでここではふれないことにする。

### 7. 数値計算例

本解法がどの程度有効であるかを調べるため、初め真直な二重円環内の軸対称流れを計算し安定な解が得られることを確認した後、図4のような曲り円環ダクト内の三次元流れの計算を試みた。簡単のため計算格子は、半径方向にも、円周方向にも等間隔とし、又断面の間隔もその中心軸上で等間隔となるようにとった。半径方向、円周方向の格子点数はそれぞれ、 $IM=17$ 、 $JM=36$ である。本来ならばダ

クト壁近くの境界層の分解能をよくするため、壁際の格子を細かくとるべきであるが、今回の場合、解法の安定性のテストであるため、等間隔でしかもやや粗い格子網とした。曲り円環ダクトの半径 $r_e=0.05$  m、内外径比 $r_i/r_e=0.5$ 、曲率半径 $R_0=20r_e$ の入口に、フラットな入口軸流速度 $5\text{ m/s}$ で流入するものとし、入口の二次流れはなく入口圧力分布は、入口条件の項で述べたように流入速度場を用いて非粘性 $\xi_1 \xi_2$ 運動量の式から算定した。又、内外壁の速度の境界条件は non-slip 条件とし、計算の対象とした流れの $R_e$ 数は入口半径を基準として16553で層流であるものとした。

図5(a)から(f)は入口断面からダクト中心軸上で $5 \cdot r_e$ 間隔の各断面における二次流れの発達の様子を示したもので、図5(a)では半径方向に境界層が発達を始める様うかがわれる。又、(b)、(c)、…と徐々に $\xi_2$ 方向の曲率に依存する流れが生じ、(f)では、上半分の内径側と外径側が同一方向に流れ、中間半径でこれと逆向の流れが発生し、一対の渦場のような曲り円環特有の流れが現れている。ちなみに本計算の各運動量の式の非線形 iteration を含む、 $J$ 方向のくり返しは5回程度で充分収束し、又 $C \rightarrow 0$ とする Newton-Raphson も5回程度で $10^{-9}$ 程度の $C$ となり収束も早く安定であった。断面圧力分布は、入口断面からほとんど直線的に下降し、主流方向速度

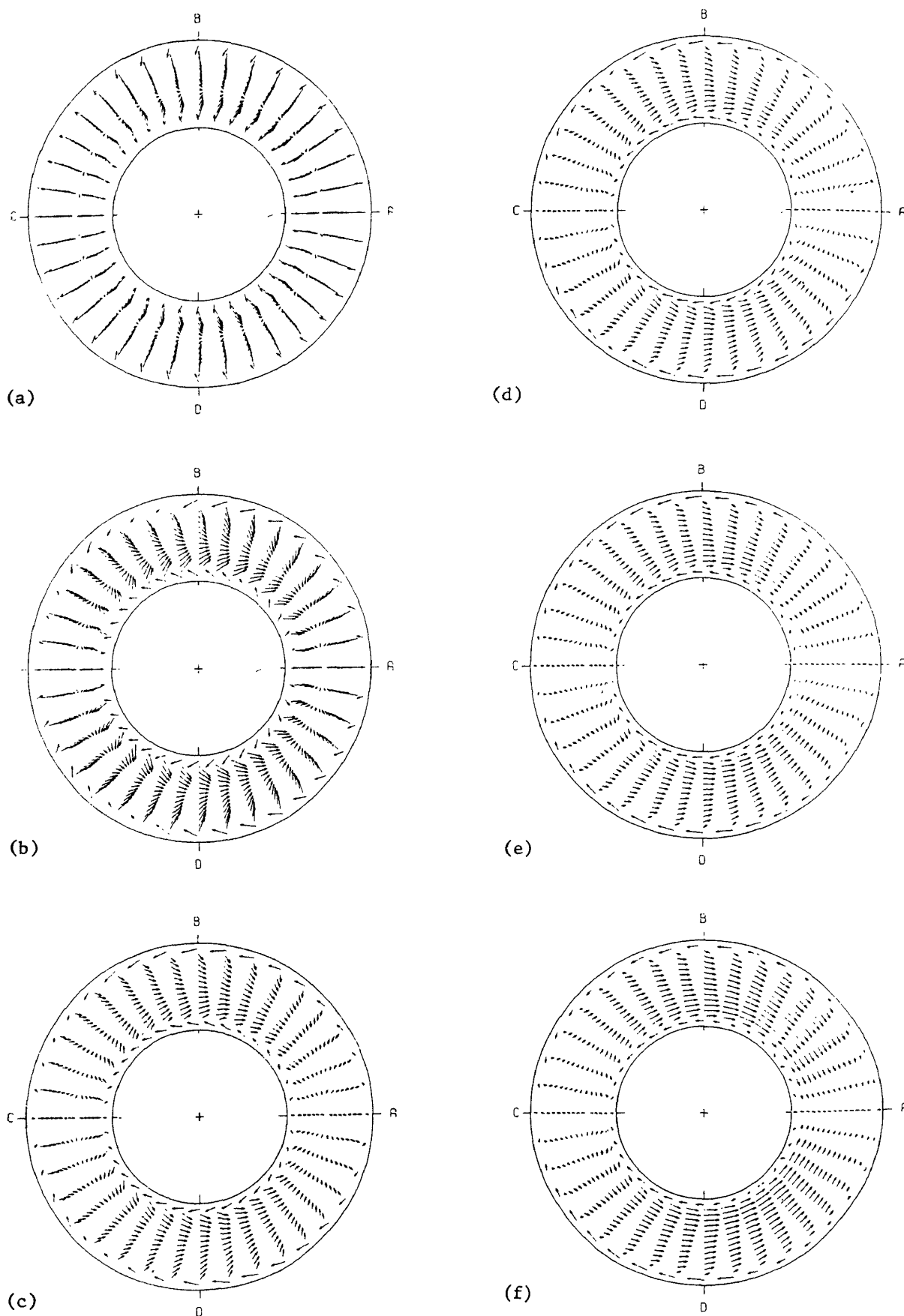


図5 曲り円環ダクト内の二次流れ (coreあり)



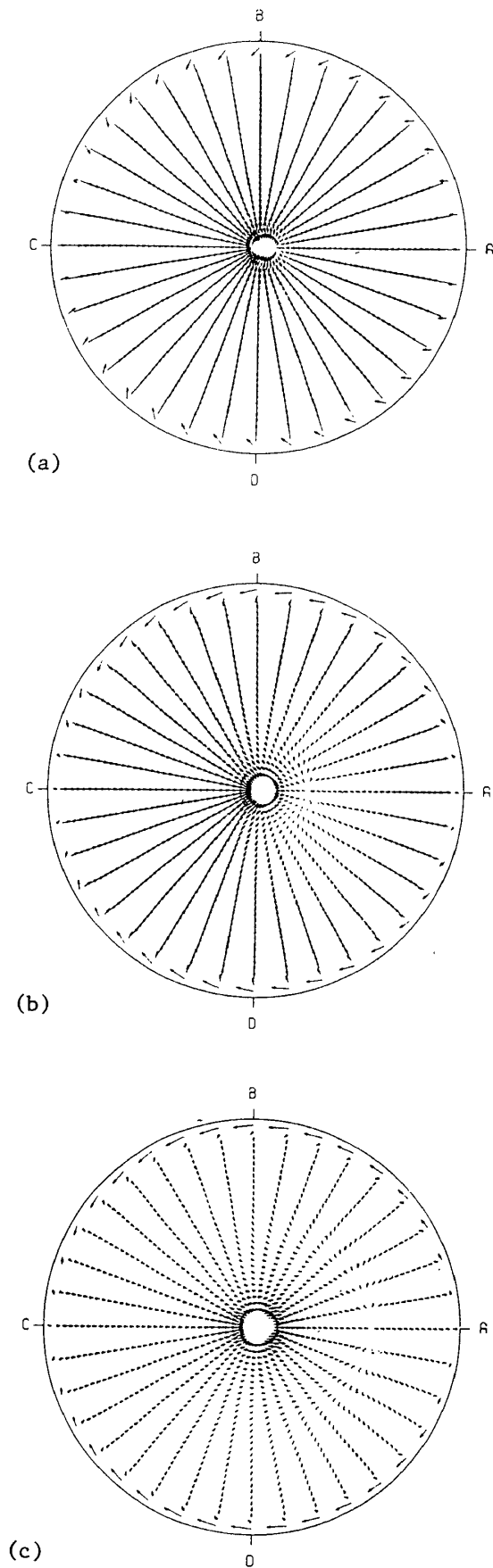


図6 曲り円管ダクト内の二次流れ (core なし)

分布は変化が緩慢できわだった傾向は見られないのでここでは省略する。一方ダクト内にCoreを持たない流路の特異点問題の扱いについては詳しくふれなかったが、特異点近傍で近似的処理をほどこした計算例として図6(a),(b),(c)がある。これは上述の環状ダクトでcoreを0としたもので、入力条件その他はすべて同一である。図6(c)では、円環状流路の場合とは異なり、上半分が一つの渦場のように流れ特徴的な相違を示している。なお特異点の厳密な処理方法は今後の課題の一つとなっている。本計算例では解の収束性、境界条件の満し方を詳しく調べるため、必要以上に高精度の計算を実施し、かつ上下対称の流れにもかかわらず、上下一体の計算領域を採用し特に対称条件などを付さなかった。又本計算結果の定量的議論は、入口条件の妥当性、境界層の発達を適確に捉える細い計算格子の採用と適切な実験例との比較が必要で、十分な資料に乏しく今後の問題としている。

### 8. むすび

連続の関係を relax させた形で仮定された  $P$  に対し  $C$  を生まれ ( $P, C$ ) の関係から Newton-Raphson 法で  $C \rightarrow 0$  とする  $P$  を求めていく本解法は、軸対称流のみならず、三次元流れにも有効なことが判明した。しかしながらいくつかの問題点の解決は今後の研究にまたねばならない。すなわち、放物化の段階での order-estimation を充分現象を把握できる近似とし、本質的でない微小項の省略によって計算の大巾な効率化を計らねばならない。又本稿の解法の場合エンジンの排気混合ノズルのように周回方向の流れの変化が大きい場合に、下流に向って徐々に不安定になる現象が見られる。

これは本解法ではかなり近似された  $\xi_1$  運動量の式のみ依存して圧力場が定められているのがその原因と思われる。そのため圧力場をポアソンの方程式によって定めるよう改良を進めている。いずれにしても  $C \rightarrow 0$  法の本質には変更はない。

ここに示した解法は、ある  $J$  一定線上での  $\text{div } \rho \mathbf{q} = C_j$  を実現させていることから “line  $C \rightarrow 0$ ” と称することとし、解法の問題点の解決を更に追求する。又以前方形ダクトの三次元流れの解法として適用さ

れた“point  $C \rightarrow 0$ ”法による解法も併せて追求している。これは計算断面の全域で共通の  $\text{div } \rho \mathbf{q} = C$  を

持つよう  $\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\text{div } \rho \mathbf{q}) = 0, \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\text{div } \rho \mathbf{q}) = 0$  を

連立させ、これらから  $\phi_1, \phi_2$  を、又  $\xi_3$  運動量の式、エネルギーの式からそれぞれ  $u_3, T$  を定め、圧力場は  $\xi_1, \xi_2$  運動量からポアソンの式を誘導して圧力を決定するものである。ポアソンの式が Neuman 問題となるため断面内の一点の圧力  $P_c$  を基準とした圧力場を求め、この  $P_c$  と上述の  $i, j$  によらない  $C$  とから Newton-Raphson によって、 $C \rightarrow 0$  とするよう  $P_c$  即ち圧力場を改良する方法である。

解法以外のダクト流れ特有の問題として、ダクト入口データの適否の問題がある。今の所実験データを主体とするか、本稿のように、入口断面内で非粘性運動量の式と入力速度分布から入口圧力場を矛盾なく与える方法などがあるが、その妥当性は詳しい実験との検証によることになる。計算格子網としての三次元曲線直交座標を構成する方法については、立体幾何を応用した格子生成法を開発し一部実用に供せられる段階にきている。方程式の近似度を勘案すれば、文献(1)のように座標系の直交系からのずれも同程度と見做されれば必ずしも曲線直交系にこだわる必要はないかもしれない。ダクト流れの解法としては、更にダクト出口背圧を考慮することや、乱流の場合に拡張することも今後の問題となろう。

## REFERENCES

1. S.V. Patankar and D.B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Ist. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 15
2. Donald W. Roberts and Clifford K. Forester, Parabolic procedure for flows in ducts with arbitrary cross sections, *AIAA JOURNAL* Vol. 17, No. 1, Jan. 1979
3. Stanley F. Birch and Gerald C. Paynter, Numerical modeling of three-dimensional flows in turbofan engine exhaust nozzles, *J. AIRCRAFT* Vol. 15, No. 8, August 1978
4. K.N. Ghia and J.S. Sokhey, Laminar incompressible viscous flow in curved ducts of regular cross-sections, *Transactions of the ASME Rec.* 1977
5. G.A. Carlson and R.W. Hornbeck, A numerical solution for laminar entrance flow in a square duct, *Journal of Applied Mechanics* March 1973
6. S.P. Vanka, B.C.J. Chen and W.T. Sha, A semi-implicit calculation procedure for flows described in boundary-fitted coordinate systems, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, 1980
7. V.S. Pratap and D.B. Spalding, Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 19, 1976
8. S. Neti and R. Eichhorn, Computations of developing turbulent flow in a square duct,
9. W. Roger Briley, Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts, *Journal of computational physics* 14, 1974
10. G.S. Beavers, E.M. Sparrow and R.A. Magnuson, Experiments on hydrodynamically developing flow in rectangular ducts of arbitrary aspect ratio, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 13, 1970
11. John Moore and Joan G. Moore, A calculation procedure for three-dimensional, viscous, compressible duct flow. Part 1 — inviscid flow considerations, *Journal of Fluids Engineering*
12. T.J. Barber, Evaluation of an analysis for axisymmetric internal flows in turbomachinery ducts,
13. R. Amit, C.A. Hall and T.A. Porsching, An application of network theory to the solution of implicit Navier-Stokes difference equations, *Journal of Computational Physics* 40 1981

14. Gino Moretti and Maurizio di Torino, Critical study of calculations of subsonic flows in ducts, *AIAA JOURNAL* Vol. 19, No. 14, April 1981
15. K.C. Cheng and Guang-jyh Hwang, Numerical solution for combined free and forced laminar convection in horizontal rectangular channels, *Transactions of ASME Journal of Heat Transfer* Feb. 1969
16. U. Ghia, K.N. Ghia and C.J. Studerus, Three-dimensional laminar incompressible flow in straight polar ducts, *Computer and Fluids* 1977, Vol. 5
17. F.B. Gessner, J.K. Po and A.F. Emery, Measurements of developing turbulent flow in a square duct,
18. Y. Mori, Y. Uchida and T. Ukon, Forced convective heat transfer in a curved channel with a square cross section, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 14 1971
19. John Moore and Joan G. Moore, A calculation procedure for three-dimensional, viscous, compressible duct flow. Part 2 – stagnation pressure losses in a rectangular elbow, *Journal of fluids Engineering* Dec. 1979, Vol. 101
20. T.S. Lungren, E.M. Sparrow and J.B. Starr, Pressure drop due to the entrance region in ducts of arbitrary cross section, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering* Sep. 1964
21. S. Abdallah and A. Hamed, Inviscid solution for the secondary flow in curved ducts, *AIAA Journal* Vol. 19, No. 8, August 1981
22. John J. Adamczyk, An electrostatic analog for cascade grids, *NASA-CP-2166* 1981
23. L.T. Chen and D.A. Caughey, Transonic inlet flow calculations using a general grid-generation scheme

