

## 三次元遷音速翼の設計

高 梨 進

## A numerical design method for three-dimensional transonic wings

Susumu TAKANASHI

National Aerospace Laboratory

## ABSTRACT

A numerical design procedure for three-dimensional transonic wings is presented. In this method, the boundary value problem is solved for the wing geometry which induces a prescribed pressure distribution subject to additional requirements on trailing-edge closure. The method is based on the transonic small disturbance theory and utilizes a type-dependent relaxation technique. Design results for large aspect ratio supercritical swept wings are also presented.

## 1. まえがき

近年、超高速コンピュータの出現により遷音速流の数値解法が著しく進歩した。特に直接解法の分野ではナセル、パイロン等を含む翼胴結合体のまわりの遷音速ポテンシャル流を計算することもさほど困難ではなくなってきた<sup>1,2)</sup>。またこれに伴い、翼設計のための数値最適化法の研究も盛んに行われるようになった。数値最適化法というのは、直接解法コードと最適値問題解法コードとを結合させて、例えば、ある特定のマッハ数に対して揚力係数一定、翼厚比一定等の拘束条件の下に抵抗係数を最小にする翼形状を見出す手法<sup>3)</sup>であり、今後増々発展することが予想される。しかし、翼形状を規定するパラメータが多くなってくると、計算時間が飛躍的に増大するという難点があり、三次元への応用はかなり限定された翼形状に対してのみ試みられているのが現状である<sup>4)</sup>。

一方、翼設計のもう一つの有力な手段として古く

から知られているものに逆解法がある。これは希望する圧力分布を実現する翼形状を逆算する方法であり、二次元の場合にはいくつかの確立された手法が存在するが、三次元遷音速の場合には、公表された論文はV. Shankar and N. D. Malmuth<sup>5)</sup>とP. A. Henne<sup>6)</sup>によるもののほか数篇を数えるにすぎない。しかもそれらの適用例のほとんどが、直接解法によって計算した既知の圧力分布を部分的に小修正したものを逆解法の入力データとして用いて設計した翼に限定されている。三次元の逆問題は物理的に ill-posed になり易いなどの理由から、直接問題ほどには十分解明されていないのが実情である。

逆問題、あるいは設計問題では翼平面全体に亘って圧力分布ないしは速度分布が予め与えられている。各翼幅位置においてこの速度を流線に沿って積分すれば速度ポテンシャルが得られるから、これを翼面の境界条件として用いることができる。即ち、逆問題は数学的には Dirichlet の境界値問題に帰着するのである。ここでは遷音速微小擾乱理論に基づき、Dirichlet 問題の一解法を示し、更にこの逆解法コードと別の解析コードとを結合した新しい翼設計法

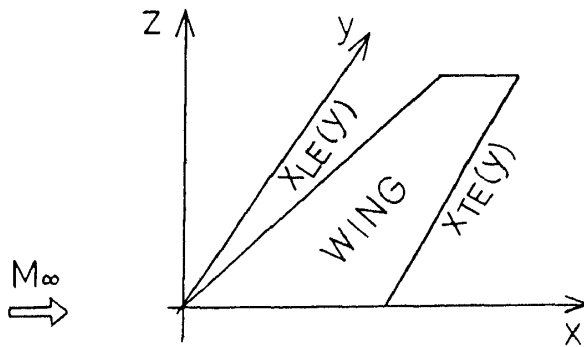
を提案する。テストケースとして縦横比の大きい遷音速後退翼に対して等圧線を直線的に通す問題を取りあげる。

### 2. 設計問題の定式化

遷音速微小擾乱方程式は、

$$(1-M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = (\gamma+1)M_\infty^2\phi_x\phi_{xx} \quad (2.1)$$

と書かれる。ここで $\phi$ は擾乱速度ポテンシャル、 $M_\infty$ は一様流マッハ数、 $\gamma$ は気体の比熱比、 $x, y, z$ は直交座標である(第1図)。



第1図 直交座標系と翼平面形

設計問題では翼の上下面の圧力分布  $C_p(x, y, \pm 0)$  が予め指定されている。薄翼理論によれば  $x$  方向の擾乱速度は、

$$\phi_x(x, y, \pm 0) = -\frac{1}{2} C_p(x, y, \pm 0) \quad (2.2)$$

と近似されるから、擾乱ポテンシャルは前縁におけるポテンシャルを  $\phi_{LE}(y)$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y, \pm 0) &= \phi_{LE}(y) + g(x, y, \pm 0) \\ g(x, y, \pm 0) &= -\frac{1}{2} \int_{x_{LE}(y)}^x C_p(x, y, \pm 0) dx \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

と表わされる。したがって設計問題は翼面上の  $\phi$  を境界条件とする所謂Dirichlet問題に帰着する。

翼断面の形状  $F_\pm(x, y)$  は、翼面上に誘起された垂直方向の速度成分  $\phi_z(x, y, \pm 0)$  を翼弦に沿って積分したものに等しい:

$$F_\pm(x, y) = \int_{x_{LE}(y)}^x \phi_z(x, y, \pm 0) dx \quad (2.4)$$

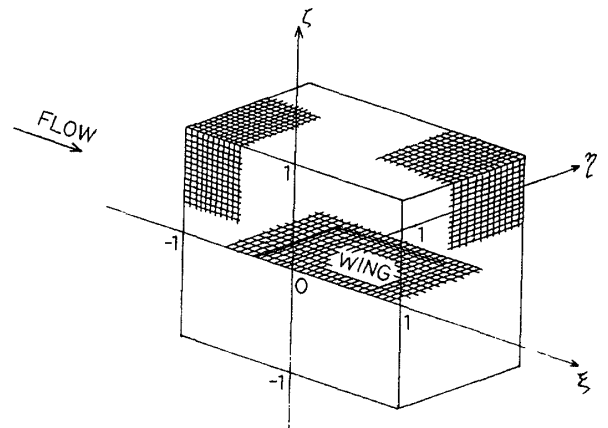
Dirichlet問題の解は存在するとすれば、ただ一つである。しかし、得られた翼断面形が閉曲線になるという保証はない。翼の形状は指定圧力分布  $C_p$  のみでなく  $\phi_{LE}$  の値にも依存するからである。後縁が閉じるためには付加的な条件として各翼幅位置において

$$\int_{x_{LE}(y)}^{x_{TE}(y)} [\phi_z(x, y, +0) - \phi_z(x, y, -0)] dx = 0 \quad (2.5)$$

となる必要がある。

### 3. 座標変換

数値計算の実行を容易にするため、まず後退翼を矩形翼に変換し、次に無限空間を有限の直方体の内部に写像する(第2図)。



第2図 計算空間と計算格子

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(y) \\ \zeta &= \zeta(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

関数  $\xi, \eta, \zeta$  の具体的な表現については文献7を参照されたい。

この変換により基礎方程式(2.1)は、次式のように変形される。

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma+1)M_\infty^2 \xi_x \hat{\phi}_\xi] \cdot [\xi_x^2 \hat{\phi}_{\xi\xi} + \xi_{xx} \hat{\phi}_\xi]$$

$$\begin{aligned}
 & + \xi_y^2 \hat{\phi}_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y \hat{\phi}_{\xi\eta} + \eta_y^2 \hat{\phi}_{\eta\eta} + \xi_{yy} \hat{\phi}_{\xi\xi} + \eta_{yy} \hat{\phi}_{\eta\eta} \\
 & + \zeta'' \hat{\phi}_{\zeta} + (\zeta')^2 \hat{\phi}_{\zeta\zeta} = 0 \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

ここで  $\phi$  に付した記号 "  $\hat{\phantom{x}}$  " は  $\phi$  が合成関数であることを意味する。即ち  $\hat{\phi}(\xi, \eta, \zeta) \equiv \phi\{x(\xi, \eta), y(\eta), z(\zeta)\}$ 。以下に現われる他の変数についても同様である。

また、境界条件 (2.3), 式 (2.4), 式 (2.5) はそれぞれ次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0) &= \hat{\phi}_{LE}(\eta) + \hat{g}(\xi, \eta, \pm 0) \\
 \hat{g}(\xi, \eta, \pm 0) &= -\frac{1}{2} \int_{\xi_{LE}}^{\xi} x_{\xi} \hat{C}_p(\xi, \eta, \pm 0) d\xi
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

$$\hat{F}_{\pm}(\xi, \eta) = \zeta' \int_{\xi_{LE}}^{\xi} x_{\xi} \hat{\phi}_{\zeta}(\xi, \eta, \pm 0) d\xi \tag{3.4}$$

$$\int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_{\xi} [\hat{\phi}_{\zeta}(\xi, \eta, +0) - \hat{\phi}_{\zeta}(\xi, \eta, -0)] d\xi = 0 \tag{3.5}$$

計算空間  $(\xi, \eta, \zeta)$  を等間隔の格子に分割し、翼面は  $\zeta$  分点の中間に、その前縁は  $\xi$  分点の中間に、後縁は  $\xi$  分点上におく。微分方程式 (3.2) は Murman の非保存型差分法により有限個の  $\hat{\phi}$  に関する代数方程式に置換され、SLOR (Successive line over-relaxation) により数値的に解かれる。これら数値解法の基本的な手順は文献 7 と同一であるのでここでは省略する。

#### 4. 前縁ポテンシャルと閉結条件の関係

この節では翼面境界条件に含まれるパラメータ  $\hat{\phi}_{LE}(\eta)$  と閉結条件との関係を明らかにする。このため、まず翼面近傍のポテンシャルの  $\zeta$  方向の分布を放物線で近似することからはじめる。即ち翼面  $\zeta = \pm 0$  におけるポテンシャル  $\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)$  と翼面近傍の二組の内点  $\zeta = \pm h_1, \zeta = \pm h_2 (0 < h_1 < h_2)$  におけるポテンシャル  $\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_1), \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_2)$  を用いて  $\hat{\phi}(\xi, \eta, \zeta)$  を次のように二次式で表現する。

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(\xi, \eta, \zeta) &= \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0) \pm \frac{h_2^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_1) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)] - h_1^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_2) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} \zeta \\
 &+ \frac{h_1 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_2) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)] - h_2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_1) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} \zeta^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

但し、右辺の複号  $\pm$  は  $\zeta \gtrless 0$  に対応する。上式より

$$\phi_{\zeta}(\xi, \eta, \pm 0) = \pm \frac{h_2^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_1) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)] - h_1^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, \pm h_2) - \hat{\phi}(\xi, \eta, \pm 0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} \tag{4.2}$$

を得る。式 (4.2) に式 (3.3) を代入すると閉結条件 (3.5) は、

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_{\xi} \frac{h_2^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, h_1) - \hat{\phi}_{LE}(\eta) - \hat{g}(\xi, \eta, +0)] - h_1^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, h_2) - \hat{\phi}_{LE}(\eta) - \hat{g}(\xi, \eta, +0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} d\xi \\
 & + \int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_{\xi} \frac{h_2^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, -h_1) - \hat{\phi}_{LE}(\eta) - \hat{g}(\xi, \eta, -0)] - h_1^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, -h_2) - \hat{\phi}_{LE}(\eta) - \hat{g}(\xi, \eta, -0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} d\xi = 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2 &= \text{const.} \\ \int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_\xi \hat{\phi}_{LE}(\eta) d\xi &= \hat{\phi}_{LE}(\eta) \int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_\xi d\xi \\ &= \hat{\phi}_{LE}(\eta) [\hat{x}_{TE}(\eta) - \hat{x}_{LE}(\eta)] \end{aligned} \right\} (4.4)$$

であることに注意すれば前縁ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{LE}(\eta) &= \frac{-1}{2[\hat{x}_{TE}(\eta) - \hat{x}_{LE}(\eta)]} \int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_\xi [\hat{g}(\xi, \eta, +0) \\ &+ \hat{g}(\xi, \eta, -0)] d\xi - \frac{1}{2[\hat{x}_{TE}(\eta) - \hat{x}_{LE}(\eta)] [h_1^2 - h_2^2]} \\ &\int_{\xi_{LE}}^{\xi_{TE}} x_\xi \left[ h_2^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, h_1) + \hat{\phi}(\xi, \eta, -h_1)] \right. \\ &\left. - h_1^2 [\hat{\phi}(\xi, \eta, h_2) + \hat{\phi}(\xi, \eta, -h_2)] \right] d\xi \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。

## 5. 解法の手順

計算の最初の段階では前縁ポテンシャルの値は予め分からない。それ故ここでは、ある適当な既知の解から出発して順次修正を施し乍ら目的とする解に漸近させる手法を提案する。

今、ある翼型  $F_\pm^{(1)}(x, y)$  のまわりのポテンシャル流  $\phi^{(1)}(x, y, z)$  が既知であるとし、これを初期値として用いる。 $\hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm h_1)$ ,  $\hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm h_2)$  を式(4.5)の右辺に代入すると、修正された前縁ポテンシャル  $\hat{\phi}_{LE}^{(2)}(\eta)$  が得られる。これを式(3.3)に代入して求めた  $\hat{\phi}^{(2)}(\xi, \eta, \pm 0)$  を用いて式(4.2)の右辺を計算し、これを便宜上  $\hat{\phi}_c^*(\xi, \eta, \pm 0)$  とおく：

$$\hat{\phi}_c^*(\xi, \eta, \pm 0) = \pm \frac{h_2^2 [\hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm h_1) - \hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm 0)] - h_1^2 [\hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm h_2) - \hat{\phi}^{(1)}(\xi, \eta, \pm 0)]}{h_1 h_2^2 - h_1^2 h_2} \quad (5.1)$$

第二近似として

$$\hat{\phi}_c^{(2)}(\xi, \eta, \pm 0) = \mu \hat{\phi}_c^*(\xi, \eta, \pm 0) + (1 - \mu) \hat{\phi}_c^{(1)}(\xi, \eta, \pm 0) \quad (5.2)$$

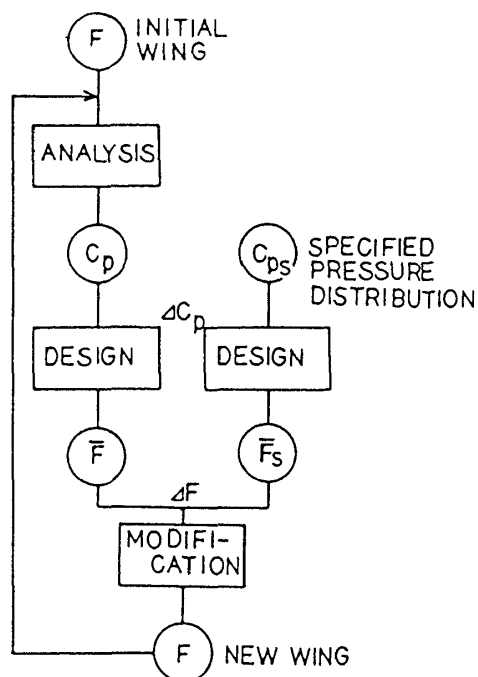
が得られる。 $\mu$ は反復計算の安定化を図るためのパラメータであり、 $\mu < 1$ のように選ぶものとする。次に、翼面上では $\zeta$ 方向の速度成分が $\hat{\phi}_c^{(2)}$ に一致し、流れ場内部で式(3.2)を満足するように差分式を構成して、SLORにより全空間を1回だけ掃査する。こうして更新されたポテンシャル $\hat{\phi}^{(2)}(\xi, \eta, \pm h_1)$ ,  $\hat{\phi}^{(2)}(\xi, \eta, \pm h_2)$ を式(4.5)の右辺に代入して新たな $\hat{\phi}_{LE}^{(3)}(\eta)$ を求める。以後同一の操作を解が収束するまで反復する。最終的な翼型は収束した $\hat{\phi}_c(\xi, \eta, \pm 0)$ から式(3.4)を使って求められる。

初期値に用いる解として何を選ぶかが問題であるが、ここでは簡単のため  $F_\pm^{(1)}(x, y) = 0$ ,  $\phi^{(1)}(x, y, z) = 0$  を用いた。これは厚さのない三次元翼が一樣流に平行におかれたときの流れを表わしている。

## 6. 逐次修正法に基づく翼設計の一般的方法

任意圧力分布を与えて、それに対応する翼形状を算出する一つの方法については既に述べた。この設計コードと任意の解析コードとを交互に使用することによって、より広汎な翼設計が可能となる。

説明の便宜上、設計コードをDESIGN、解析コードをANALYSISと呼ぶことにする。ANALYSISは完全ポテンシャル流解析であってもよいし、境界層修正を含んでもよい。但し微小擾乱近似が成立する程度に翼は薄いものと仮定する。第3図に翼設計の手順を図式的に示す。 $C_{ps}$ は実現しようとする圧力分布である。まず適当な翼 $F$ を仮定し、ANALYSISにより $F$ のまわりの流れを解く。その圧力分布を $C_p$ とする。次に $C_{ps}$ と $C_p$ をDESIGNに入力させて得た翼をそれぞれ $\bar{F}_s$ ,  $\bar{F}$ とすると、圧力差  $\Delta C_p = C_{ps} - C_p$  を補正するためには、 $\Delta F = \bar{F}_s - \bar{F}$  だけ翼を变形させなければならないから、第二近似



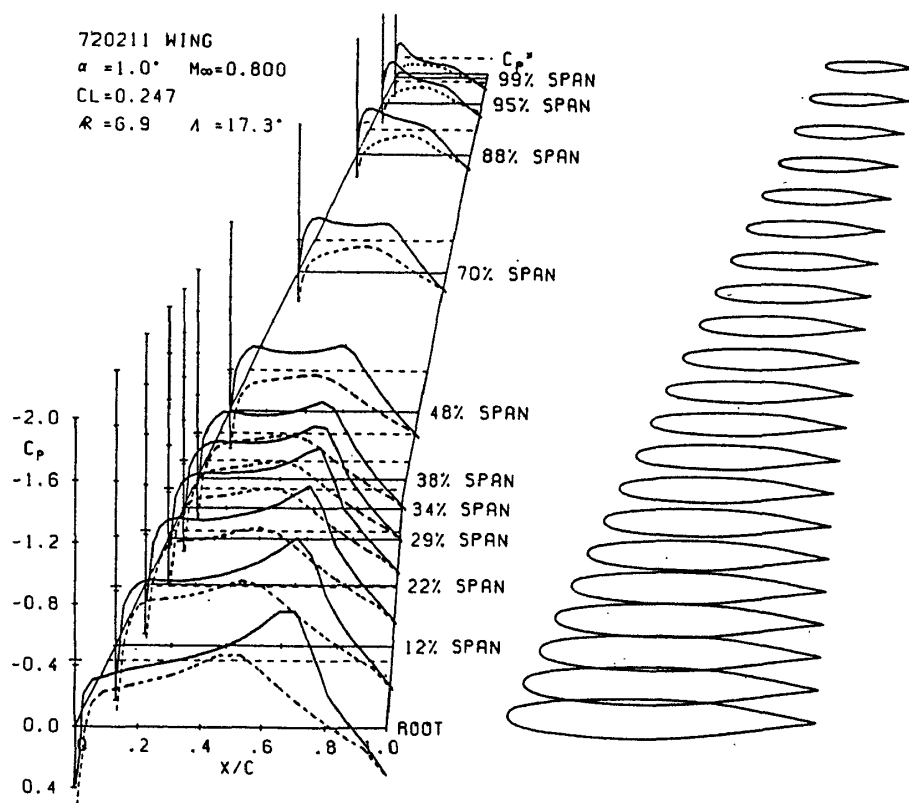
第3図 翼設計手順の図式

解は元の翼  $F$  に  $\Delta F$  を加えたものとなる。この新たな翼を再び ANALYSIS に入力させて同様の手順を踏めば第三近似解を得る。以下同様の操作を  $\Delta C_p$  が許容値以下になるまで繰り返す。

### 7. 数値設計例

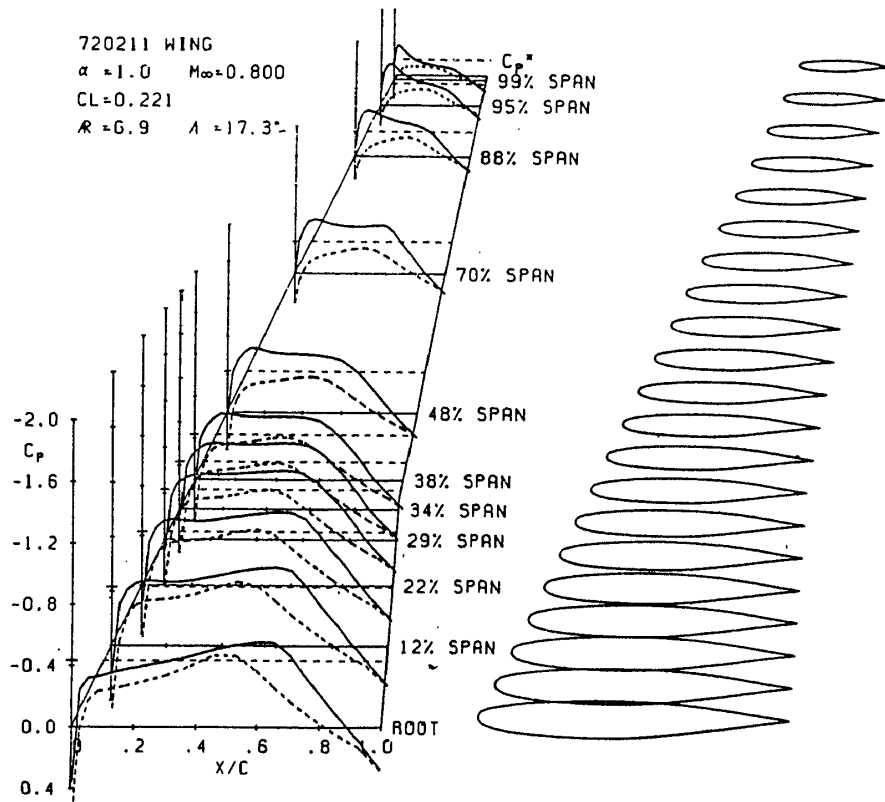
逆解法で最も問題となるのが圧力分布の与え方である。全く勝手に与えたのでは実用に供し得ないような奇妙な形状の翼が現われる恐れがある。特に前縁近傍の圧力分布の指定には注意を要する。三次元の設計問題は、たとえ非圧縮流の場合であっても、物理的に ill-posed になり易いからである。遷音速の場合には衝撃波が存在するために、この傾向はますます顕著になる。

最初の試みとして既知の翼のまわりの流れを解析コード\*で計算し、翼の前縁と後縁の付近および下面のすべての圧力分布を変えずに、衝撃波の近傍の圧力分布を平滑化して衝撃波を弱めたものを設計圧力分布として選んだ。第4図は原翼に対する解析結



第4図 720211 翼に対する解析結果

\* ここでは微小擾乱方程式に基づく解析コード SPWING<sup>8)</sup>を用いた。



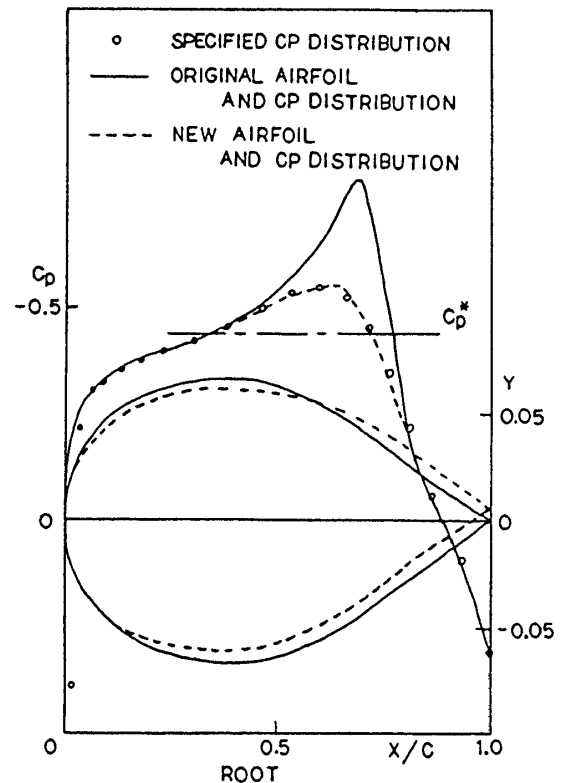
第5図 滑らかな圧力分布に対する設計翼

果を，第5図は設計圧力分布とその翼断面形を示す。設計翼は第二近似解であるが，第6図に見られるように指定圧力分布がほぼ完全に実現されている。

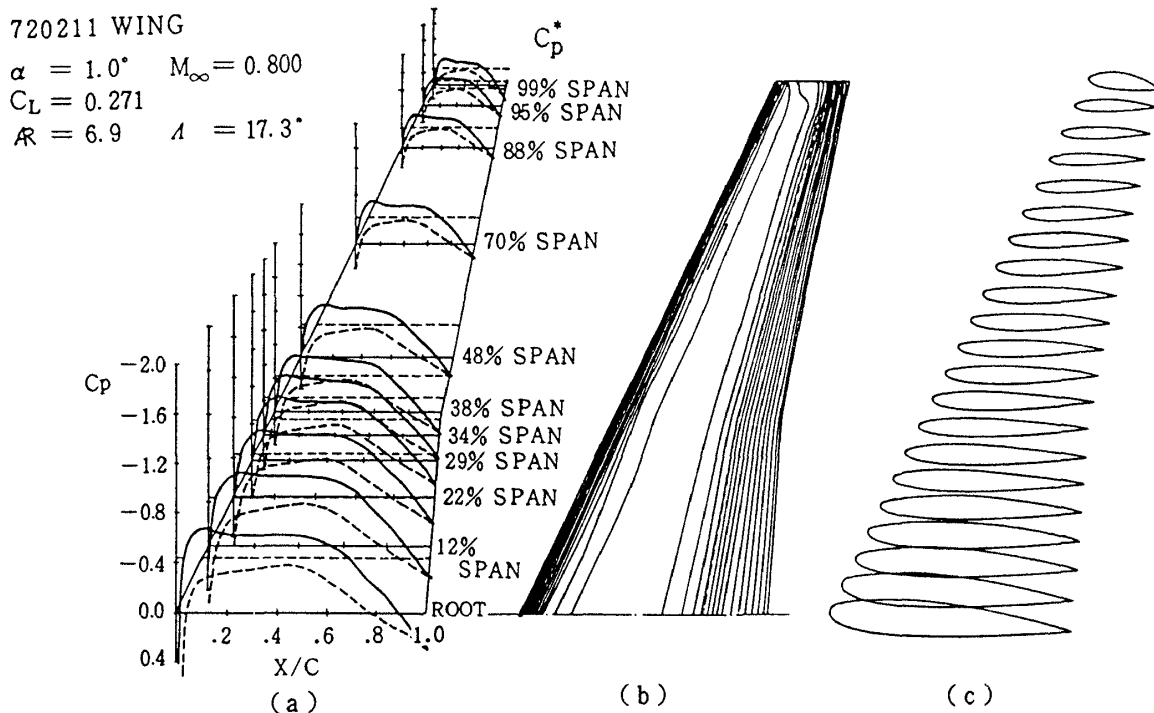
第二の例として，翼平面形は最初の例題と同じであるが，すべての翼幅位置において全く同一の圧力分布を選んだ。第7図にその結果を示す。この例では第三近似解まで求めた。このように遷音速において等圧線を直線的に通すことも可能である。

### 8. むすび

遷音速Dirichlet問題を数値的に解く一つの方法を示した。前縁ポテンシャルを自由パラメータに選び，その値をSLORの各掃査の段階で自動的に決定していくことにより後縁閉結問題を解決した。設計の適用範囲を拡大するために，設計コードと任意の解析コードとを結合した新たらしい設計法を提案し，そのテストケースとして直線的な等圧線を有する遷音速後退翼を設計した。完全ポテンシャル流の解析コードを用いた場合の収束性，精度等を調べていくことは今後に残された課題である。



第6図 翼根部における原翼と設計翼の比較



第7図 同一の圧力分布を与えて設計した後退翼の一例

(a) 圧力分布 (b) 等圧線 (c) 翼断面形状

### 9. 謝 辞

設計コードの開発には次の方々のご協力を得た。  
 ここに記して感謝の意を表します。

塚本広孝氏 (元) 富士通株式会社  
 伊沢隆男氏 日本タイムシェア株式会社  
 栗山好夫氏 三向ソフトウェア株式会社

### 参 考 文 献

1. Boppe, C.W. and Stern, M.A., "Simulated Transonic Flows for Aircraft with Nacelles, Pylons, and Winglets," AIAA paper No. 80-0130, 1980.
2. Shankar, V. and Malmuth, N.D., "Computational and Simplified Analytical Treatment of Transonic Wing-Fuselage-Pylon-Store Interactions," AIAA paper No. 80-0127, 1980.
3. Hicks, R.M. and Vanderplaats, G.N., "Ap-  
plication of Numerical Optimization to the Design of Supercritical Airfoils without Drag-Creep," SAE paper 770440, 1977.
4. Haney, H.P., Waggoner, E.G. and Ballhaus, W.F., "Computational Wing Optimization and Wind Tunnel Test of a Semi-Span Wing Model," AIAA paper No. 78-102, 1978.
5. Shankar, V. and Malmuth, N.D., "Computational Transonic Inverse Procedure for Wing Design," AIAA Journal Vol. 20, No. 8, 1980.
6. Henne, P.A., "Inverse Transonic Wing Design Method," Journal of Aircraft Vol. 18, No. 2, 1981.
7. 神谷信彦；後退翼まわりの遷音速流の数値計算，第9回流体力学講演会講演集 昭和52年10月。
8. 神谷信彦ほか；遷音速後退翼解析の汎用プログラム SPWING，航技研汎用ソフトウェアライブラリー 昭和54年11月。

