

軸対称物体まわりの超音速流

西川進栄* 佐久間理一* 井上幸彦*

Supersonic Flow on Axisymmetric Blunt Body

Nobuhide NISHIKAWA

Riichi SAKUMA and Yukihiro INOUE

Chiba University

ABSTRACT

Inviscid supersonic flows around axisymmetric indented bodies are numerically analyzed by the Implicit MacCormack scheme. The scheme has been developed for the strong conservative form of Euler equation. Grid generation by elliptic P.D.E. has been employed for relatively complicated body-shapes. The free stream Mach number ranged from 1.8 to 8.0. Various body shapes are treated in this paper such as a sphere, an indented body, and a hemisphere cylinder. Some details of the formation of the scheme are described and it is observed that the method is highly efficient except for the region near the stagnation point.

1. はじめに

計算機の演算機能の発達にもかかわらず、圧縮性流れの数値手法は1978年¹⁾のBeam・Warming法以降、大きな発展があったとは思われない。その中でMacCormackの陰的方法²⁾に見られる二点差分法の一連の発展³⁾と、陽的差分法ではMethod of Lineに似た構造の有理ルンゲクッタ法による構成と発展⁴⁾が我が国でも見られる。このような差分法の選び方の他に、スキームの中の重要な部分である格子生成技術も、とくに三次元流に対しての発展が期待されている。ただ現在のところ、楕円形偏微分方程式による生成法⁵⁾がかなり支配的で広範に使用されているものの、写像をはじめかなり多種多様な方法で格子生成が行われている。⁶⁾すなわち偏微分方程式による生成法は近年の先端的方法としても、写像を用い

る方法もMoretti⁷⁾などはかなり複雑な形状に用いている。

本報告ではMacCormackの陰解法が以下の理由により適用を試みられた。すなわちこの陰解法はBeam-Warming法のように格子数に対応した次元のブロック行列を取り扱わないため、一計算平面あたりの演算数はおそらく後者の2/3以下になると思われる。またそれに対応してプログラム開発上の簡便さが生じるものと期待される。また二点差分法という形に対する興味があること、プログラム・ノートが原論文中²⁾に示されていることなどの上、このような二点差分法が発展性をもつと思われることもあり、この陰的マコーマック法が選ばれた。なお研究の過程で、半球一円柱給合体に近い形を扱った数値例⁸⁾や、再突入物体での例⁹⁾を参考にした。

2.1 基礎方程式

ここでは非粘性流を扱い、気体は理想気体で、熱

* 千葉大学工学部

的かつ熱量的に完全気体とする。これらに基づき軸対称圧縮性非粘性流に対しての基礎方程式は保存形表示で以下のように書ける。座標 x は対称軸, y は半径方向に選んだ。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{H}{y} = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(E+p) \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ v(E+p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

解ベクトルから導かれる諸量を用いて圧力 p は下式で与えられる。ただし軸対称性より周方向速度はゼロである。

$$p = (r-1) \left\{ E - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right\} \quad (3)$$

以下この報告では諸量の無次元化は主流〔衝撃波前方〕の諸量により行われ p, ρ, T はそれぞれの主流値, 速度は $(RT)^{1/2}$, 時間 t は主流音速 $/r^{1/2}R$ を参照量とし, $r = 1.4$ とした。

2.2 格子生成

古典的な写像に代わって近年用いられている偏微分方程式による写像のうち Thompson らによる, 楕円型偏微分方程式を用いる方法⁷⁾を適用する。生成された格子が境界面に直交する状態を常に実現するには, 特殊なわき出し項を付加しない限り双曲型の方が適しているともいわれるが, 格子生成の解過程の収束性に問題があると思われ, 楕円型が選ばれた。

物体まわりの x, y 面を ξ, η に変換するが, そのための Jacobian を以下のように導入する。

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (4)$$

基礎方程式 (1) を, ξ, η 平面での変数を用いて以下のように書き変える。

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\hat{H}}{y} = 0 \quad (5)$$

$$\hat{U} = JU \quad (6a)$$

$$\hat{F} = (x_\eta y_t - y_\eta x_t)U + y_\eta F + x_\eta G \quad (6b)$$

$$\hat{G} = (y_\xi x_t - x_\xi y_t)U - y_\xi F + x_\xi G \quad (6c)$$

$$\hat{H} = JH \quad (6d)$$

3.1 マコーマックの陰解法

この解法は, 1969 年のマコーマック陽解法にサルーフの方法の利点を加え, 1980 年に提案されたものである。マコーマック自身は格子生成と併用していないが, ここでは生成された $\xi - \eta$ 平面の格子上で (1) 1969 年型解法による陽的増分 ΔU 算出, (2) その解を用いて陰的増分 δU を予測子, 修正子の両段階ともで評価するもので, 時間ステップ Δt が CFL 限界より小なら陰的段階は経ず, そのような領域では ΔU 自体を増分とするものである。 ξ, η 各方向の格子番号を各々 I, J で表わすと陰解法の構成は以下のように書ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{U}_{i,j}^n = -\Delta t \left(\frac{\Delta + \hat{F}_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \frac{\Delta + \hat{G}_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \frac{\hat{H}}{y} \right) \end{array} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{予} \\ \text{測} \\ \text{子} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left(I - \Delta t \frac{\Delta + \tilde{A}}{\Delta \xi} \right) \left(I - \Delta t \frac{\Delta + \tilde{B}}{\Delta \eta} \right) \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} \\ = \Delta \hat{U}_{i,j}^n \end{array} \right. \quad (7b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{i,j}^{n+1} = \hat{U}_{i,j}^n + \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} \end{array} \right. \quad (7c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} = -\Delta t \left(\frac{\Delta - \hat{F}_{i,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\Delta - \hat{G}_{i,j}^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{\hat{H}}{y} \right) \end{array} \right. \quad (8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{修} \\ \text{正} \\ \text{子} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left(I + \Delta t \frac{\Delta - \tilde{A}}{\Delta \xi} \right) \left(I + \Delta t \frac{\Delta - \tilde{B}}{\Delta \eta} \right) \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} \\ = \Delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} \end{array} \right. \quad (8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\hat{U}_{i,j}^n + \hat{U}_{i,j}^{n+1} + \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1}) \end{array} \right. \quad (8c)$$

ここで Δ_+, Δ_- は各方向の前進分, 後進差分を示し, \tilde{A}, \tilde{B} は下の \hat{A}, \hat{B} を相似変換することにより得られる。すなわち

$$\hat{A} = \xi_t I + \xi_x \frac{\Delta \hat{F}}{\Delta U} + \xi_y \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{U}}$$

$$\hat{B} = \eta_t I + \eta_x \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{U}} + \eta_y \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{U}} \quad (9)$$

と定義し、 \hat{A} , \hat{B} の対角化に際し文献2と異なる点を記す。

$$\hat{A} = T_\xi \lambda_\xi T_\xi^{-1} \quad \hat{B} = T_\eta \lambda_\eta T_\eta^{-1} \quad (10)$$

λ_ξ , λ_η は \hat{A} , \hat{B} の固有値行列で T_ξ , T_η は例えば, Chaussee & Pulliam の論文¹⁰⁾に示されている。すなわち文献2の MacCormack とのちがいは座標の変換にともなって $T_\xi^{-1} \rightarrow S_y$, $T_\xi \rightarrow S_y^{-1}$ と置き変えてある点であり, ここで導く \tilde{A} , \tilde{B} に用いる N_ξ , N_η はそれぞれ MacCormack の D_A , D_B に対応して定義は,

$$N_\xi = D(\lambda_{\xi 1}, \lambda_{\xi 2}, \lambda_{\xi 3}, \lambda_{\xi 4}) \quad (11)$$

で, D は対角要素記号で

$$\lambda_{\xi 1} = \lambda_{\xi 2} = \max\left[\bar{u} - \frac{\Delta \xi}{2\Delta t}, 0\right] \quad (12a)$$

$$\lambda_{\xi 3,4} = \max\left[\bar{u} \pm C(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2} - \frac{\Delta \xi}{2\Delta t}, 0\right] \quad (12b)$$

であり $\lambda_{\eta,i}$ は上式で $\xi \rightarrow \eta$ とて得る。結局

$$\tilde{A} = T_\xi N_\xi T_\xi^{-1}, \quad \tilde{B} = T_\eta N_\eta T_\eta^{-1} \quad (13)$$

であるが, $\lambda_{\xi,i}$ の定義からわかるように Δt が安定限界以下なら $N_\xi = 0$ で以下に示す過程からも判るように増分は陽的増分そのものとなる。

陰的マコーマック法の基幹である, ある方向のスweepに際し一つの格子点で行われる計算を示すと, $I+1 \rightarrow I$ のスweepについては以下ようになる。

$$\delta U_{IJ}^* = \left(I - \Delta t \frac{\Delta + \tilde{B}}{\Delta \eta}\right) \delta \hat{U}_{IJ}^{N+1} \text{ として}$$

$$1) \quad W = \Delta \hat{U}_{I,J} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \tilde{A}_{I+1,J} \delta \hat{U}_{I+1,J}^*$$

$$2) \quad X = T_\xi^{-1} W$$

$$3) \quad N_\xi \text{ 算出}$$

$$4) \quad Y = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} N_\xi\right)^{-1} X$$

$$5) \quad \delta \hat{U}_{I,J}^* = T_\xi Y$$

$$6) \quad Z = N_\xi Y$$

$$7) \quad \tilde{A}_{I,J}^N \delta \hat{U}_{I,J}^* = T_\xi Z$$

第7ステップでの右辺は次の $I-1$ 格子点での第一ステップの右辺に用いられる。本報告での軸対称流では上記各段階に表われる係数マトリックスは 4×4 の行列である。

3.2 全体的手順

式(7, 8)に示したように, 予測子段階で前進差分 (Δ_+), 修正子段階で後退差分 (Δ_-) が用いられることに対応して以下の解手順が必要となる。すなわち1つの時間ステップについての作業は以下の4回のスweepよりなる。

スweep I : 流出境界 \rightarrow よどみ点

スweep II : Shock Wave \rightarrow 物体表面

スweep III : よどみ点 \rightarrow 流出境界

スweep IV : 物体表面 \rightarrow Shock Wave

壁からのスweepの始点すなわち壁の隣接点では, 壁での $\delta \hat{U}$ を知っておくことが必要であるが, それには次節に示す境界条件算出手順での解の前回からの差を $\delta U_{I,1}$ とした。

以上のスキームより CFL 条件境界の Δt よりかなり大きい Δt で計算を行おうと試みるわけであるが, 半経験的に各方向三点(中心)差分の $1/8$ に対応する陽的な人工粘性項を付加して解を得た。

3.3 境界条件

ここでは衝撃波は不連続面として衝撃波適合法を用いる。よどみ点是对称条件を用い, 流出境界は外挿で算出するようにした。物体表面は Kentzer に元来発想され Kutler や Steger¹¹⁾により一般座標に用いられた算出法で圧力の時間微分を示す式 ($\eta_x \times \xi$ 方向運動方程式 + $\eta_y \times \eta$ 方向運動方程式) より台形法で壁面圧力を算出し等エントロピー条件を物体表面流線に課し密度を算出, 各方向速度成分も算出された。

4. 結果と計算例

陰的マコーマック法を用いる限り, かなり大きい時間ステップ Δt で Time Marching 法が良好に進行するわけであるが, 前節の壁面条件がよどみ点付近で問題を起すのか, よどみ点付近では Δt_{CFL} の2倍程度の Δt でしか March できないことが多かった。したがってよどみ点から下流へ3~4ステップまでの領域は $\Delta t = 2\Delta t_{CFL}$, それより下流では $\Delta t = 20\Delta t_{CFL}$ で統一し, その境い目の諸量分布は t について直線内挿して上流を計算した。

4.1 格子配置

図1, 2, 3に各々 Indented Body, 同様の物体で表面近くに格子線の ATTRACTION を起こさせた場合および半球円柱結合体まわりの格子配置を示す
 図3は図1の配置を徐々に変えて後半部を直線形状にしたために肩のあたりの格子が歪んでいる。この

点を避けるため半球上の格子配置と円柱上のそれを合わせたのが、図4である。また、ATTRACTIONとは格子生成用の偏微分方程式に Source 項をつけ加え、指定した領域に格子線を集中させることを指し、本報告では示さなかったが表面に沿う境界層をカバーして粘性流を扱う場合に用いられる予定である。

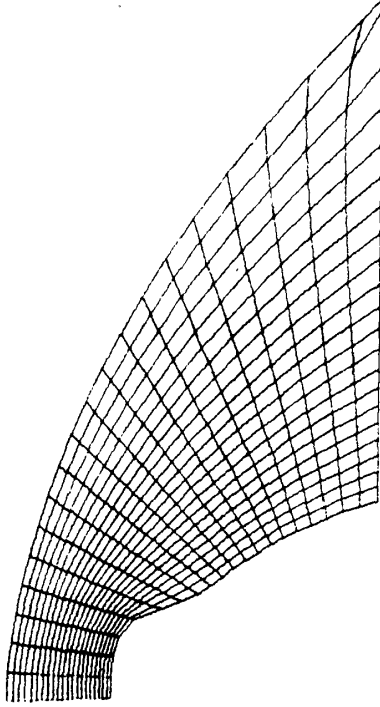


図 1

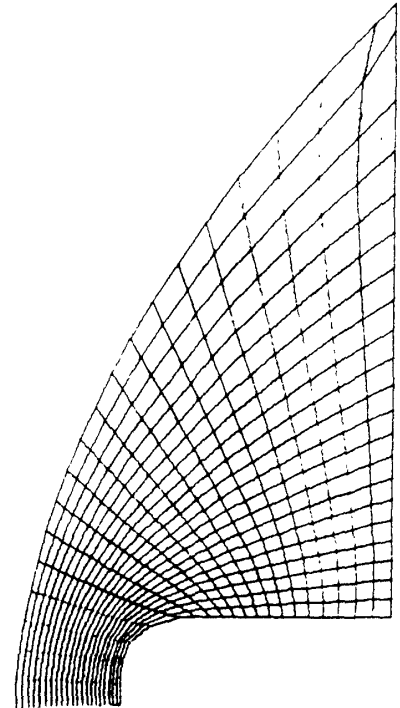


図 3

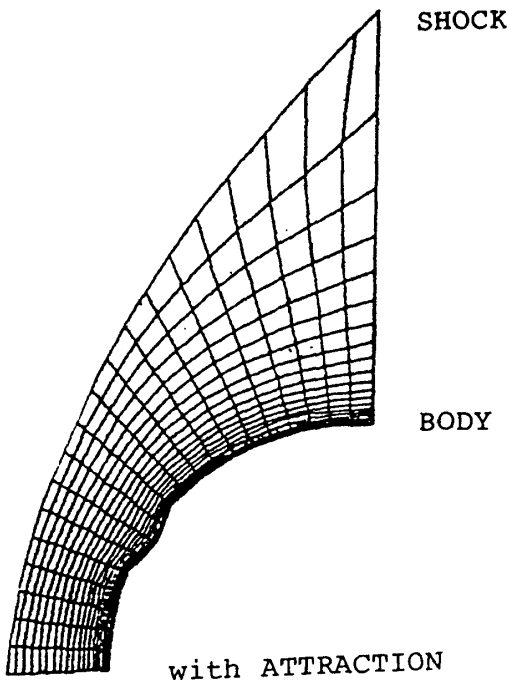


図 2

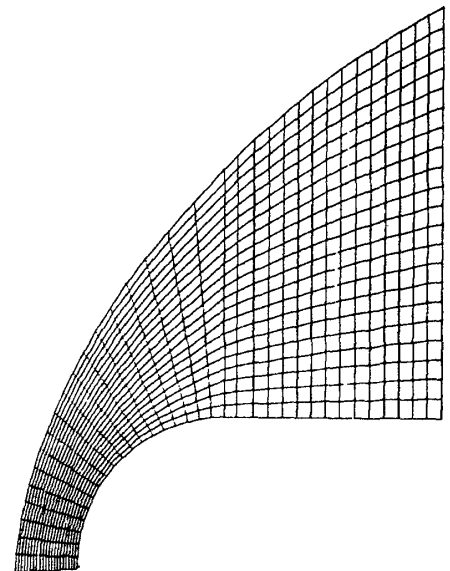


図 4

4.2 諸変量の分布

スキームの検証は球について、よどみ点前方の衝撃波離脱距離を Hsieh などの諸実験と比較し妥当性を確認して行った。

Indented Body の表面曲線は球から、Moretti が $M_\infty = 12$ で扱った形状まで凹み度合を5段階に分け、

図5での $ID=5$ は Moretti の扱った例に対応している。図6, 7に中程度の凹みの物体と球前半部の等圧線を主流マッハ数 $M=2$ について示した。図の下流端(流出境界)と Shock 面の交点近くに等圧線が密になっており一つの改良すべき点である。これらの図で特徴的なのは Indent な度合が強い (ID が大)

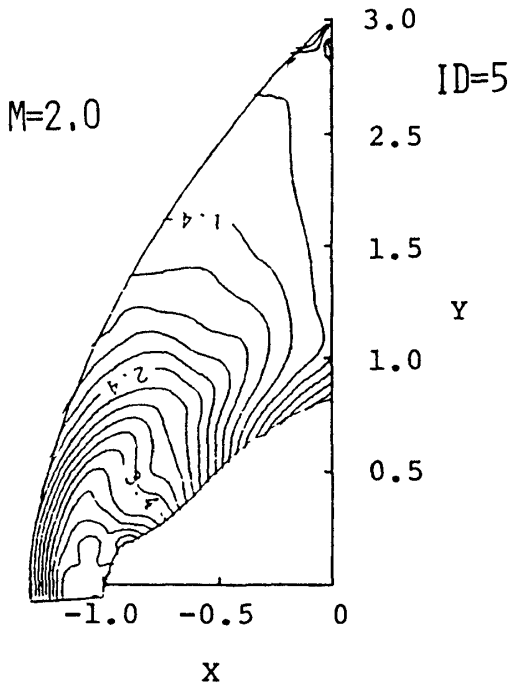


図5

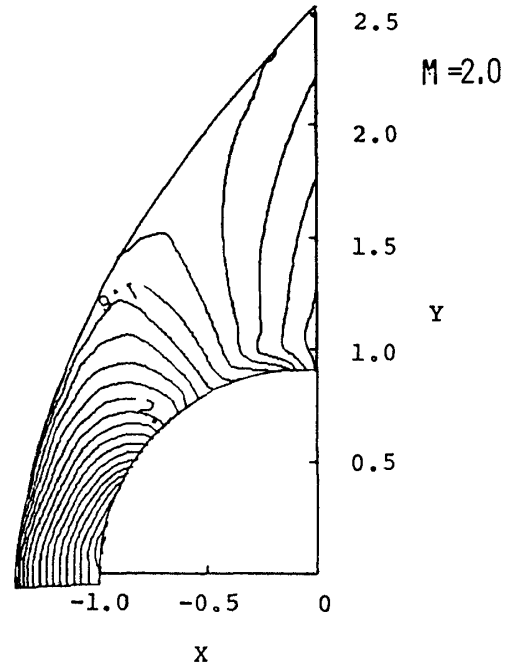


図7

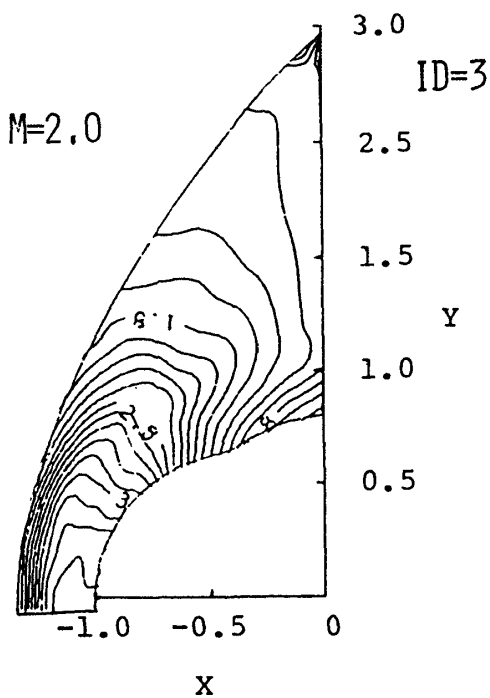


図6

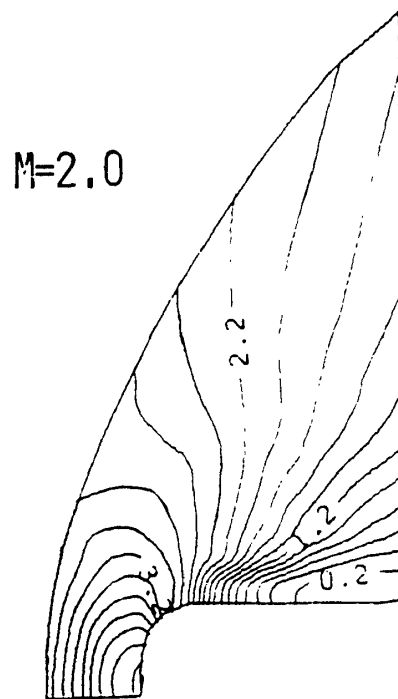


図8

である，または肩の曲率変化の急激さに対応して肩から下流へと等圧線の袋状の領域が回り込み下流へ伸びる傾向が強まることであろう。図8に半球-円柱結合体まわりの等圧線を示す。格子配置の歪みに起因してか，上述の袋状領域がそれほど顕著でない。図9には諸形状での等マッハ線を示す。Indentな度合に対応して Sonic line の位置が移動することが見出せる。

主流マッハ数 M を大きく上げていった場合の速度ベクトルを図10, 11, 12に示す。 $M=8$ では美観上他の M 数でのベクトル長と異なる係数を掛けて図示されている。各図とも凹部で，速度ベクトルが物体内部に伸びているが，表面では接線条件を課しているのでこのような形になった。図13に $M=8$ での等圧線図を示した。

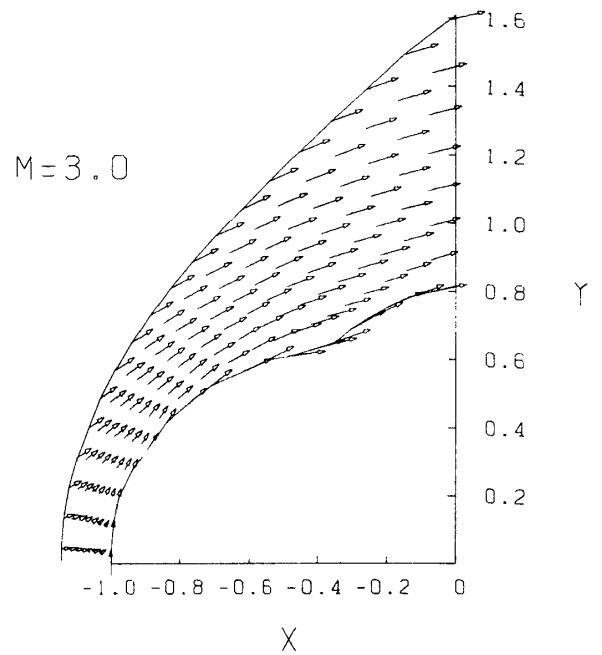


図 11

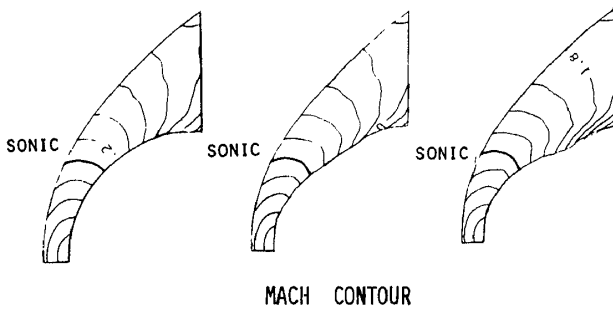


図 9

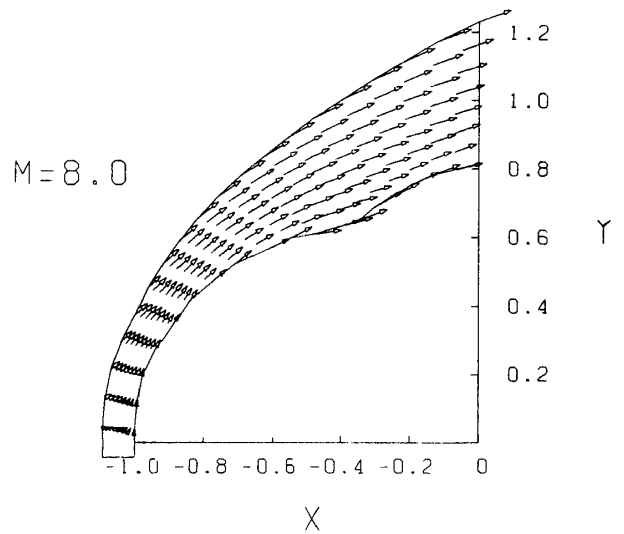


図 12

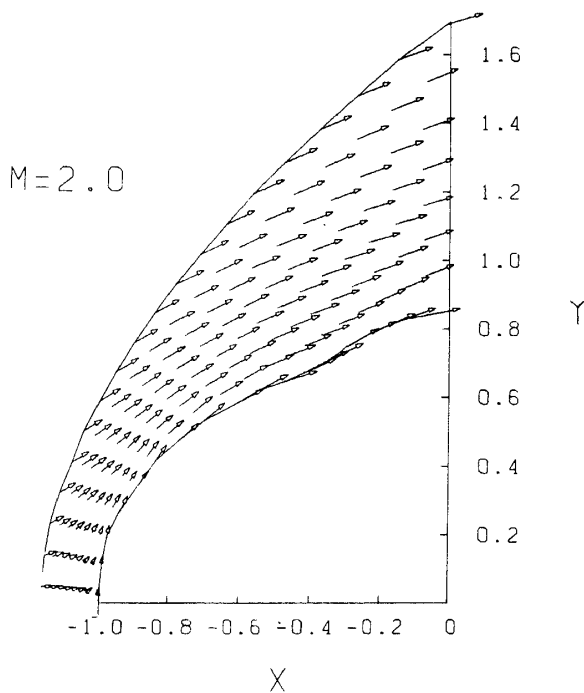


図 10

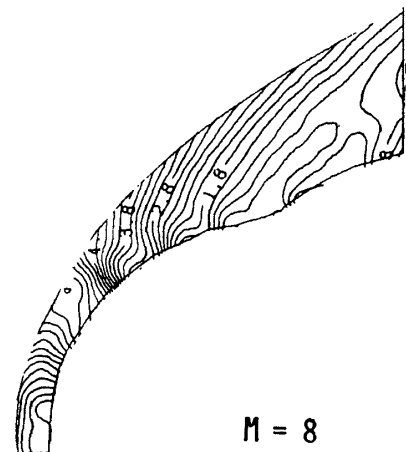


図 13

5. ま と め

非粘性流に対し陰的マコーマック法のプログラムを開発し、高い計算効率を得られたが、今後境界条件、とくによどみ点付近での扱い方や、粘性項のとり入れに目を向ける必要がある。

参 考 文 献

- 1) Beam, R, and Warming, R.F., AIAA-paper 77-645 (1977).
- 2) MacCormack, R.W., AIAA J. Vol. 20 (1982), pp. 1275-1281.
- 3) 大林 茂, 桑原邦郎, 吉沢能政; 日本航空宇宙学会第15期年会講演集(1984) pp42-43.
- 4) 里深信行; 第一回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航技研特別資料 SP-1 (1983) pp 131-139.
- 5) Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.W., J. of Computational Physics, Vol. 15 (1974), pp. 299-319.
- 6) 内田茂男; 航空宇宙学会誌 347号(1982年12月) p688.
- 7) Moretti, G. extracted from "Computational Methods for Fluid Flow, Springer Peyret, R., & Taylor, T.d. p. 276 Springer (1983).
- 8) 谷 喬, 細谷昌宏, 渡辺晋也, 広瀬直喜; 衝撃波の干渉と伝播に関するシンポジウム講演集(1984)pp20-25.
- 9) 山本行光; 第一回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航技研特別資料 SP-1 (1983) pp 109-122.
- 10) Chaussee, D.S. and Pulliam, T.H., AIAA J. Vol. 19 (1981), pp. 153-159.
- 11) Steger, J.L., AIAA Paper 77-665 (1977).

