

非定常ナビエ・ストークスの数値シミュレーション

小川 哲* 石黒 登美子*

Numerical Simulation of Unsteady Flow around an Airfoil by
Finite Difference Solution of Navier-Stokes EquationsSatoru OGAWA and Tomiko ISHIGURO
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

A numerical procedure for solving the flow field generated by a moving body is presented based on a finite difference solution of Navier-Stokes equations. A conservation-law form of the equations in a general time-varying coordinate system is derived from the Cartesian expression by applying the concept of Lie derivatives. Specifically, a moving coordinate expression of the streamfunction-vorticity formulation is derived, and is used for the analysis of the dynamic-stall phenomenon of an oscillating airfoil in incompressible flow. A computation example is given for an NACA 0012 airfoil oscillating in pitch at an amplitude of 10° about a mean angle of attack of 15° with a reduced frequency of 0.4π and a Reynolds number of 2×10^4 based on the chord length and the uniform advance speed of the airfoil.

はじめに

計算機の急速な性能向上にともない、今まで近似的にしか解くことができなかつた諸問題が数値実験的方法により次々と解かれるようになってきた。流体力学の分野においても計算機実験が解析的研究の主流になりつつあるのは近似を多く入れた方程式系に対する厳密な解析解より厳密な方程式系に対する数値解の方が有用になる場合が多いからであり、今後こうした傾向は増々強くなるであろう。なまの実験にかわるものとして数値実験が重要視される日はそう遠くない。

通常の流体现象に多く見られる問題のうち、現在ほとんど解かれていないものに、境界が時間と

ともに運動する場合の流れ場を求める問題がある。そうした非定常境界問題に対し、現象が準定常であるとして各時刻ごとに定常問題を解きその積み重ねとして非定常境界をとらえるのが今まで一般的であった。境界の運動速度が流れ場の代表的速度に比べ無視しうる程度に小さい場合準定常は良い近似解法となるが、非定常境界問題の多くは、とりわけ非線形性の強い流体力学において、非定常として解かなければその意味を喪失してしまうであろう。計算機の発達した現段階において、非定常境界をとまなう流れ場を非定常のままに解く事は可能となりつつあり、今後この分野の研究が数値実験を通じて革命的に進歩するのは自明でさえある。

ここでは、境界が任意に動くことにより生じる流れ場の計算法を考える。境界の運動は given であるとし、ステファン問題の様に境界の運動が固有値的

* 航空宇宙技術研究所

に決まる様な場合は現在のところ考慮しない。非定常境界をとまなう流れ場を計算する場合に、時間 t をパラメータとし境界とともに運動する座標系を導入し、その座標系上で計算すれば良いと考えるのは普通であり、Viviani¹⁾らがその定式化を行っている。しかしながら彼らの導き方は物理空間 (x, y, z) 上で表現された保存式に t の関数である変数変換をほどこすことにより計算空間上の表現を得るものであり、極めて煩雑であるとともに見通しも悪い。我々はテンソル解析の手法に従い任意に動く座標系上の諸方程式が極めて簡潔かつ系統的に導き出せることを示す。

以下本論文において、流体力学における保存則の動座標表現を導き、例題として翼型まわりの非圧縮 2次元流れを $\phi - \omega$ 法で計算しようとする。

1. 基礎方程式

流体力学にあらわれる保存方程式を一般座標系で表わすと、(エネルギー保存式は現在のところ考えない)

質量保存式

$$\partial \tilde{\rho} / \partial t + \nabla_k (\tilde{\rho} v^k) = 0 \quad (1)$$

運動量保存式

$$\partial (\tilde{\rho} v^i) / \partial t + \nabla_k (\tilde{\rho} v^i v^k - \tilde{\sigma}^{ik}) = \tilde{\rho} F^i \quad (2)$$

となる。ここで \sim は座標系の単位ます目あたりの諸量を示し、 ∇_k は共変微分、 $\tilde{\sigma}^{ij}$ 、 F^i はそれぞれ応力テンソル、外力を示す。また、繰返し指標に対する総和便法が用いられている。

Newton 流体の構成方程式²⁾は

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & -\tilde{P} g^{ij} + \tilde{\zeta} g^{ij} \nabla_k v^k + \tilde{\mu} (\nabla_j v^i + \nabla_i v^j \\ & - 2/3 g^{ij} \nabla_k v^k) \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられるので、非圧縮 Newton 流体の基礎方程式は、

$$(1) \rightarrow \nabla_k (\tilde{v}^k) = 0 \quad (1)'$$

$$(2) \rightarrow \partial \tilde{v}^i / \partial t + v^k \nabla_k \tilde{v}^i = -g^{ik} \nabla_k \left(\frac{\tilde{P}}{\rho} \right) + \nu \nabla_k (g^{km} \nabla_m \tilde{v}^i) \quad (2)'$$

となる。ここで $\nu \equiv \mu / \rho$ 、及び g^{ij} は反変計量テンソルである。なお計量テンソル g_{ij} に対し、 $\sqrt{g} \equiv \sqrt{D_{et}(g_{ij})}$ はます目の大きさを表わす量であることから (\sim) をつけた諸量は、通常の見込みに \sqrt{g} を掛けた

ものであると考えれば良い(例、 $\tilde{v}^i = \sqrt{g} v^i$)。

(1)' 及び (2)' の解法に $\phi - \omega$ 法と呼ばれるものがあり、2次元流れにしか適用されないが安定に解ける利点等が知られている。ここでは $\phi - \omega$ の方程式に対する動座標表現を導く。流れ関数 ϕ を

$$\tilde{v}^1 = \partial \phi / \partial x^2, \quad \tilde{v}^2 = -\partial \phi / \partial x^1 \quad (4)$$

で定義する。(4)の関係は $\nabla_k \tilde{v}^k = \partial \tilde{v}^k / \partial x^k$ であることから(1)'を自動的に満足していることに注意する。渦度 ω_j を

$$\omega_j \equiv \epsilon_{jli} g^{lh} \nabla_h \tilde{v}^i \quad (5)$$

で定義する。(2)'に $\epsilon_{jli} g^{lh} \nabla_h \cdot$ を作用させると、(5)の関係から(2)'の運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial \omega_j / \partial t + \epsilon_{jli} (g^{lh} / \sqrt{g}) \nabla_h \tilde{v}^k \nabla_k \tilde{v}^i \\ + (1/\sqrt{g}) \tilde{v}^k \nabla_k \omega_j = \nu \nabla_k (g^{km} \nabla_m \omega_j) \end{aligned} \quad (6)$$

と表わされる。(5)の関係において ω_j は共変ベクトルである事に注意する³⁾。

一般に、動座標表現を導く場合時間微分の項を Lie 微分⁴⁾におきかえれば良い。重さ k のテンソル密度 \tilde{P}_j^i の Lie 微分は

$$\begin{aligned} \partial \tilde{P}_j^i / \partial t^* = \partial \tilde{P}_j^i / \partial t + V^k \nabla_k \tilde{P}_j^i - \tilde{P}_j^k \nabla_k V^i \\ + \tilde{P}_k^i \nabla_j V^k + k \tilde{P}_j^i \nabla_k V^k \end{aligned} \quad (7)$$

となることから、共変ベクトル ω_j の式(6)を動座標表現にすると、

$$\begin{aligned} \partial \omega_j / \partial t^* + \frac{1}{\sqrt{g}} [(\tilde{v}^k - \tilde{V}^k) \nabla_k \omega_j - \omega_k \nabla_j \tilde{V}^k \\ + \epsilon_{jli} g^{lh} \nabla_h \tilde{v}^k \nabla_k \tilde{v}^i] \\ = \nu \nabla_k [g^{km} \nabla_m \omega_j] \end{aligned} \quad (6)'$$

となる。なお V^i は座標系の運動を表わす反変ベクトル場である。

(6)' は 3次元空間における表現で、2次元的表現を導くには、一方向に関して変化がないということから計量テンソル g_{ij} を

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

とおき、かつ $\nabla_3 (*) = 0$ とすれば良い。すなわち 2次元的場において ω_j は ω_3 のみ値を持ち、他は零となる。(5)式に(4)式を代入すると若干の計算の後に

$$\begin{aligned} -\omega_3 = A \partial_1 \partial_1 \phi + B \partial_1 \partial_2 \phi + C \partial_2 \partial_2 \phi \\ + D_1 \partial_1 \phi + D_2 \partial_2 \phi \end{aligned}$$

$$A \equiv g^{11}, \quad B \equiv 2g^{12}, \quad C \equiv g^{22} \quad (9)$$

$$D_\alpha \equiv -[g^{11}\{\alpha_{11}^i\} + 2g^{12}\{\alpha_{21}^i\} + g^{22}\{\alpha_{22}^i\}]$$

となる。なお $\partial_1 \equiv \partial/\partial x_1$, 及び $\{^i_{jk}\}$ は Riemann 接続で $\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \{^i_{km}\} v^m$ なる関係があることに注意する。(6)'式より(4)式及び(1)'式を使って ω_3 の式を導くと、

$$\begin{aligned} \partial \omega_3 / \partial t^* + \frac{1}{\sqrt{g}} [(\partial_2 \phi - \tilde{V}^1) \partial_1 \omega_3 \\ - (\partial_1 \phi + \tilde{V}^2) \partial_2 \omega_3] \equiv \nu L \cdot \omega_3 \quad (10) \end{aligned}$$

$$L \cdot \equiv A \partial_1 \partial_2 + B \partial_1 \partial_2 + C \partial_2 \partial_2 + D_1 \partial_1 + D_2 \partial_2$$

となる。すなわち $\phi - \omega$ 法においては(9)及び(10)式を適当な境界条件のもとに解けば良い。

2. 差分スキーム

$\phi - \omega$ 法の数値計算の手順は古くから良く知られており、例えば、川口らの論文を参照されたい。⁵⁾ (9)式は ϕ に対するポアソン方程式であり、ここでは以下の様な SLOR法を用いて解く。(')を付けたものを更新項とすると、(9)式の差分は

$$\begin{aligned} (g^{11}/(\Delta x^1)^2)(\phi'_{i+1,j} - 2\phi'_{i,j} + \phi'_{i-1,j}) \\ + (2g^{12}/(4\Delta x^1 \Delta x^2))(\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j-1} \\ - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1}) + (g^{22}/(\Delta x^2)^2)(\phi_{i,j+1} \\ - (2/\Omega)\phi'_{i,j} - 2(1-1/\Omega)\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) \\ + (D_1/(24x^1))(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \\ + (D_2/(24x^2))(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) = -\omega_{3i,j} \quad (11) \end{aligned}$$

である。ここで Ω は緩和係数で場合によって異なるが数値実験の結果から $\Omega \sim 1.4$ 程度とする。なお差分の格子点を (i, j) で表わしており、前章における添字と違う点に注意する。(11)式を i 方向について3重対角行列を解くことにより更新項が計算され、値の変化があらかじめ決められた値以下になるまで繰返し計算を行う。(10)式はSOR法を用いて解くが、輸送項に対し河村ら⁶⁾の風上差分スキーム

$$\begin{aligned} \left[f \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \right]_{i,j} = f_{i,j} [8(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) - \phi_{i+2,j} \\ + \phi_{i-2,j}] / (12\Delta x) + |f_{i,j}| [\phi_{i+2,j} - 4\phi_{i+1,j} \\ + 6\phi_{i,j} - 4\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}] / (4\Delta x) \quad (12) \end{aligned}$$

を用いる。(12)の差分は3次精度であり、右辺の第2項が人工粘性となっており高レイノルズ数においても安定に解が求められる。

時間方向の積分については Euler implicit scheme :

$$\begin{aligned} (\omega_3^{(n+1)} - \omega_3^{(n)}) / \Delta t + \frac{1}{\sqrt{g}} [(\partial_2 \phi - \tilde{V}^1)^{(n)} \\ \cdot \partial_1 \omega_3^{(n+1)} - (\partial_1 \phi + \tilde{V}^2)^{(n)} \partial_2 \omega_3^{(n+1)}] \\ = \nu L \cdot \omega_3^{(n+1)} \quad (13) \end{aligned}$$

を用いるが、この輸送項に(12)式を用いると五対角行列の式となるので、ここではそれを解く代りにSOR法で反復計算を行い $\omega^{(n+1)}$ を求めた。

3. 計算格子

計算格子の生成に関して数多くの方法が提唱されておりそれぞれ一長一短がある。いずれの方法によっても、良い格子とは流れの変化が大きい所で密になっており格子のメトリックが場全体でなめらかに変化するものであると考える。ここでは非定常問題を扱うことから格子生成の計算時間がわずかで済む Gordon ら⁷⁾の方法を使う。彼らの方法は極めて簡単で2次元の場合を例にとると、計算空間 $J = \{(s, t)\}$, $s \in [s_0, s_1]$, $t \in [t_0, t_1]$ から物理空間 $R \in E^2$ への写像 φ を、境界の対応づけ F ; $\partial T \rightarrow \partial R$ が与えられている時に

$$\begin{aligned} \varphi \equiv P_s[F] + P_t[F] - P_s P_t[F] \quad (14) \\ P_s[F] \equiv \alpha_0(s)F(s_0, t) + \alpha_1(s)F(s_1, t) \\ P_t[F] \equiv \beta_0(t)F(s, t_0) + \beta_1(t)F(s, t_1) \\ P_s P_t[F] \equiv \sum_i \sum_j \alpha_i(s) \beta_j(t) F(s_i, t_j) \end{aligned}$$

とするものであり、 α_i, β_j は

$$\alpha_i(s_k) = \delta_{ik} \quad \beta_j(t_l) = \delta_{jl}$$

を満足する適当な関数 (blending function) である。この方法は簡単に述べると、計算すべき領域を $[s_1, s_2] \times [t_0, t_1]$ にうつし内部の点を補間により求めるもので計算領域が複雑な形状をしている場合においても拘束条件を加えたり、blending function を工夫することにより望ましい格子へいくらかでも近づけることが可能である。又、拘束条件に流れ場の諸量を用いることにより計算に適合した格子をそのつど作成していくこともできよう。

4. 数値計算

前章まで述べた数値解析の方法は、境界の運動が与えられればほとんどいかなる問題に対しても適用

可能である。我々は同じ方法によりいくつかの問題について数値計算を行ったが、ここでは振動翼型のダイナミックストールの計算を行う。境界が単に周期的運動を行うだけの本計算は我々の定式化のなかで最も単純な問題の一つであると言えよう。

翼型としては数値計算に良く使われる NACA0012 を選び、前縁から 25% の位置に振動の中心を置き、 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega t)$ の振動を行わせている。振動のパラメータは $\alpha_0 = 15^\circ$ 、 $\alpha_1 = 10^\circ$ 及び $k = \omega C / 2U = \pi/5$ としている (C は翼弦長、 U は翼の一樣前進速度)。

我々の定式化において“物体が動く”ことに注意する。したがって物体に付着した計算格子も運動しなければならない。通常の $\phi - \omega$ を使った翼型まわりの計算において、遠方における ϕ の値を与え、翼型上の ϕ の値を圧力・価の条件により決定する方法が用いられているが、本定式化においてはそうした煩雑なことを行う必要がない。物体上の ϕ の値は、物体上の一点においてそれを指定すれば、(4)を用いて物体の運動の積分から決定され、物体から遠く離

れた外部境界においては、流体がポテンシャル流であるとし $\Delta\phi = 0$ を満足するようにしてやれば良いのである。通常行われている物体を固定し外部において一樣速度を与える解析法は、循環の大きな問題に対し、とりわけ非圧縮性流体の場合、良い解を与えないはずである。あたかも循環のつけを後流だけにおわせているかのようであるから。

前章で簡単に述べた代数的方法によって生成された計算格子を図 1 に示す。格子点数は 171×61 であり翼上に 91 点とってある。翼近くの最小格子間隔は 10^{-5} である。翼型が周期的運動を行う本計算において計算の各時刻に格子を生成する必要はなく、振れの最大及び中間の 2 つを生成し、他はその 2 つから補間して求めれば良い。補間において注意すべき点は、翼の剛体的運動を保証すること、及び格子のメトリックは単純に補間してはいけないことであり、我々は 2 つの格子の各点の振動中心からの距離を求めておき、補間される点の振動中心からの距離がその間に入るようにし、メトリックは補間された格子を使いそのつと計最することにしてている。

計算手順を簡単に図示すると次の様に表わされる。

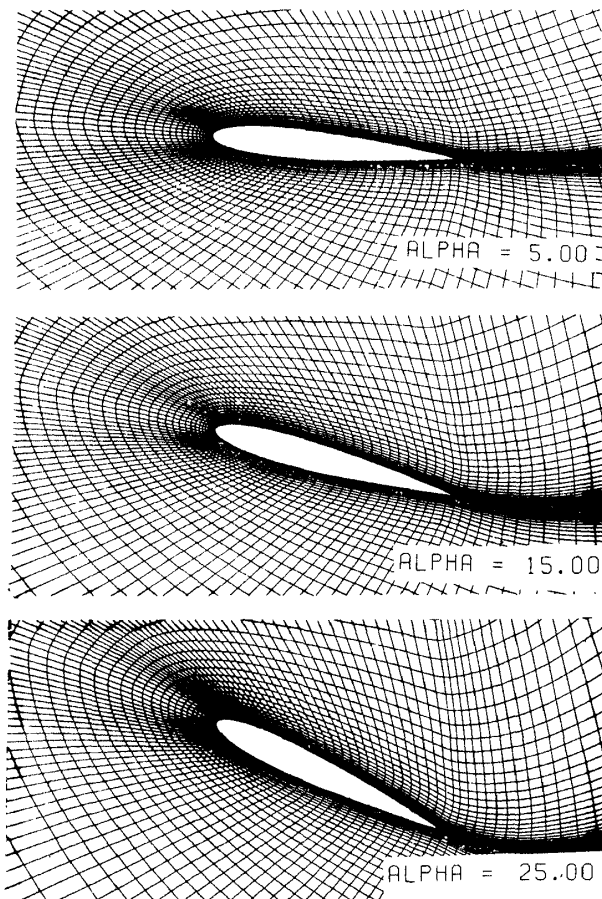
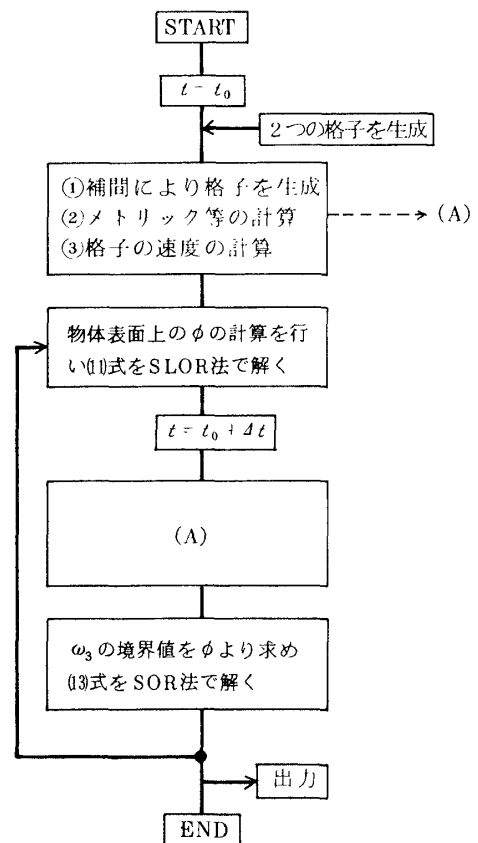


図 1 GRID NACA0012



5. 計算結果

計算はFACOM M-380を使って行われた。レイノルズ数は20000とし、5周期後の値を出力している。最小格子間隔を若干小さくとりすぎた為、1周期の計算に約4~5時間程度かかっている。

図2に流線の時間的変化が約1周期にわたって示されている。時間は振動の平均位置を始まりとし、 C と U とで無次元化した値で示され、 α は $15^\circ \rightarrow 25^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 5^\circ \rightarrow 15^\circ$ と変化する。図からわかる様に剥離が後縁近傍から始まり、迎角が大きくなるにつれて前縁近傍から大きな渦が生成され始める。そう

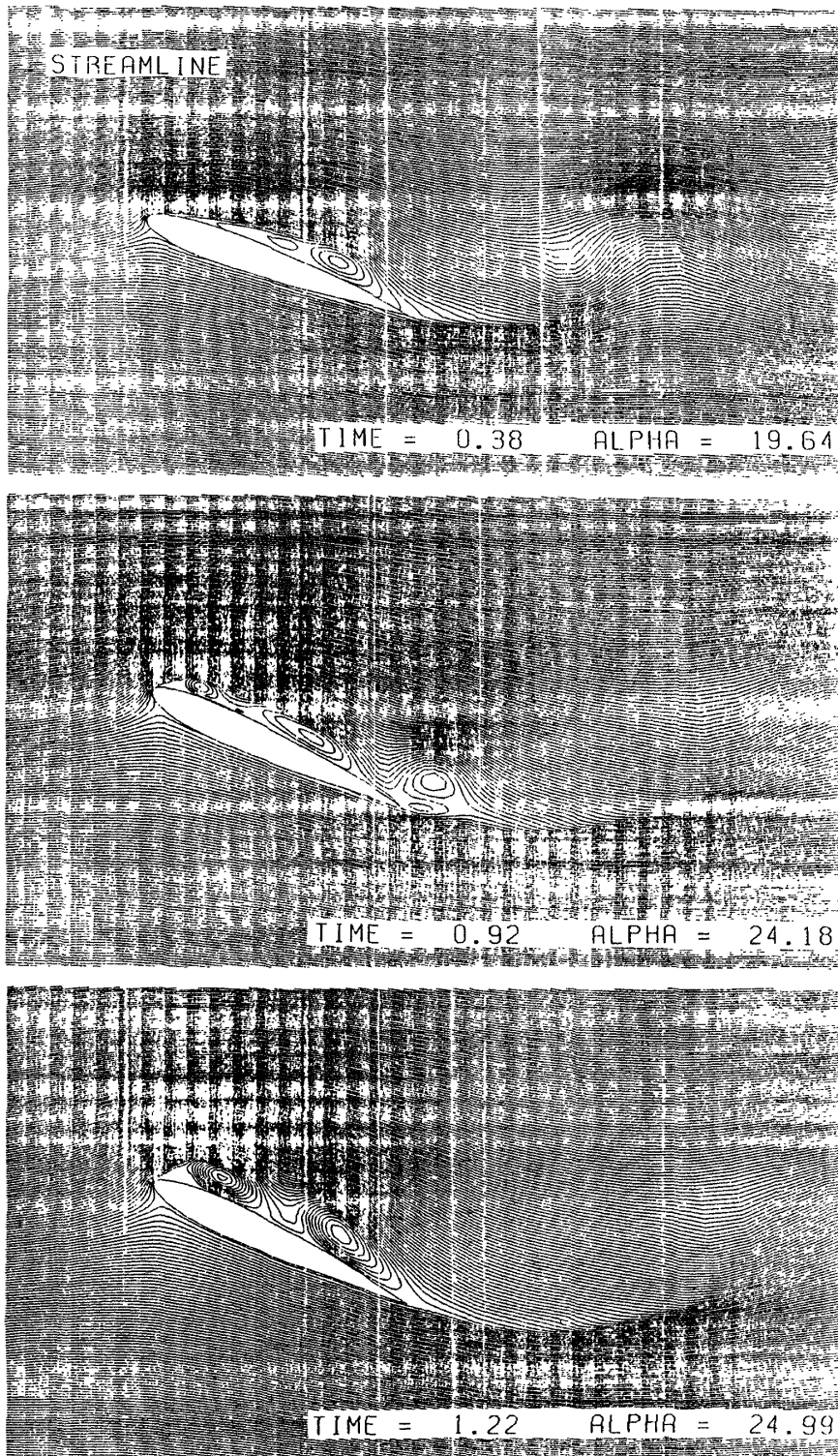
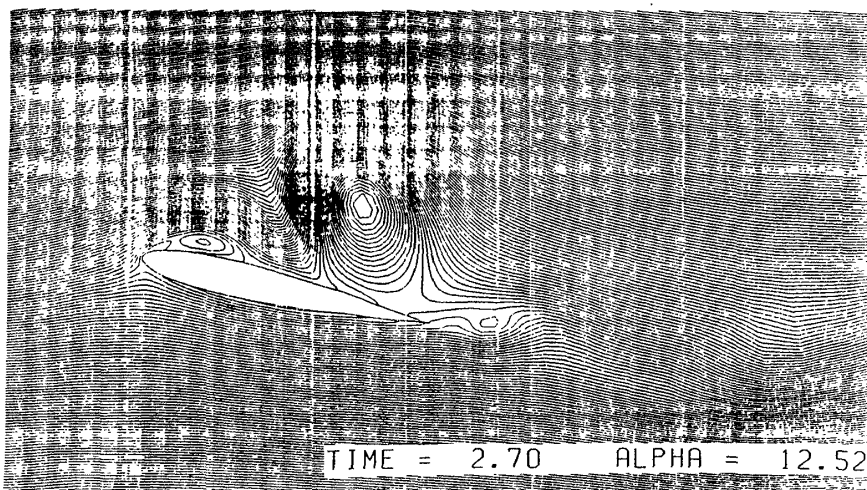
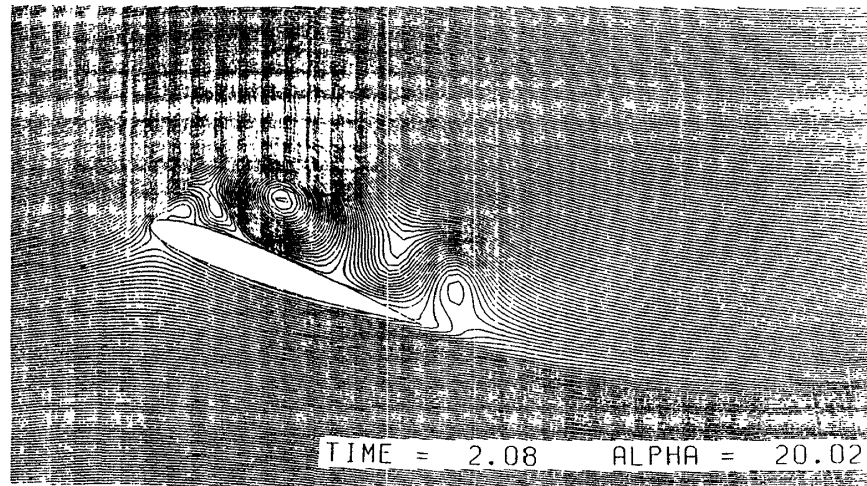
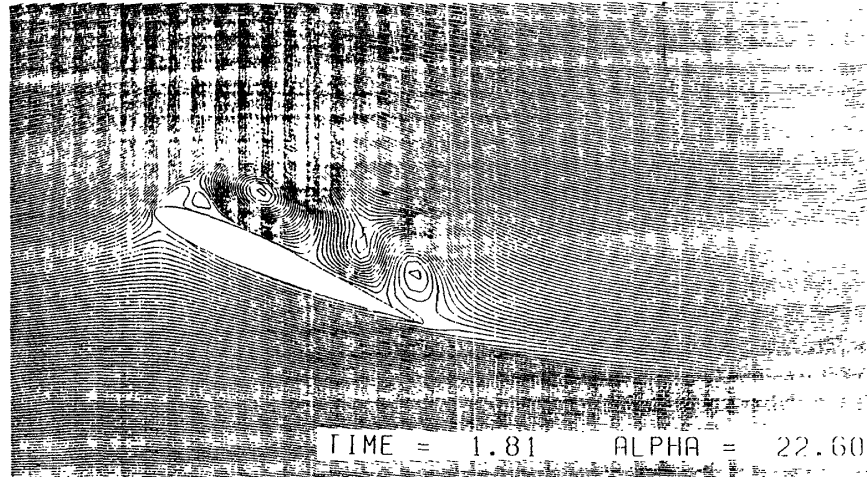


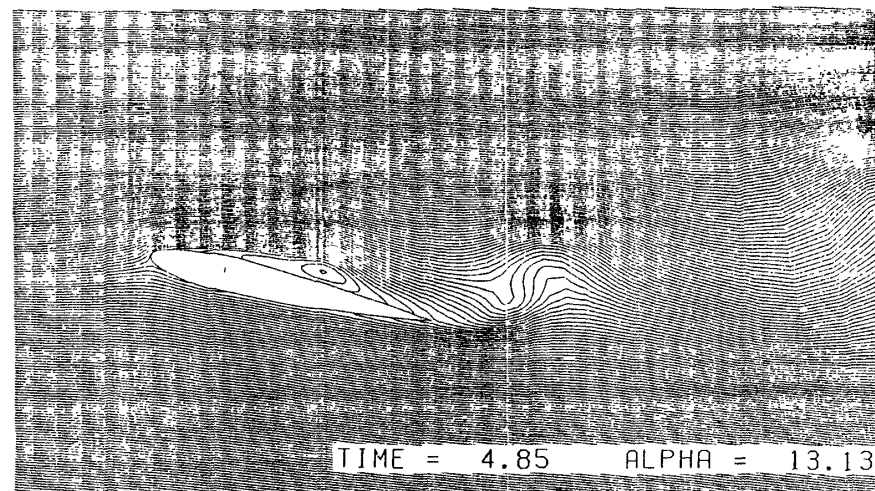
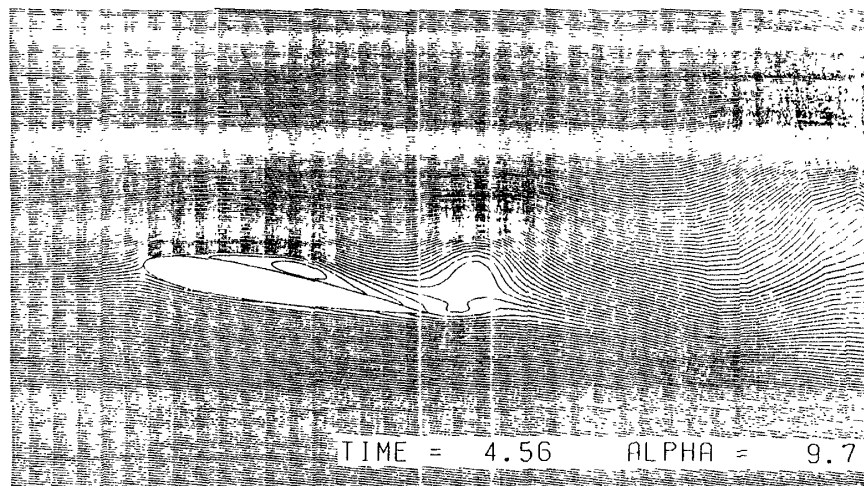
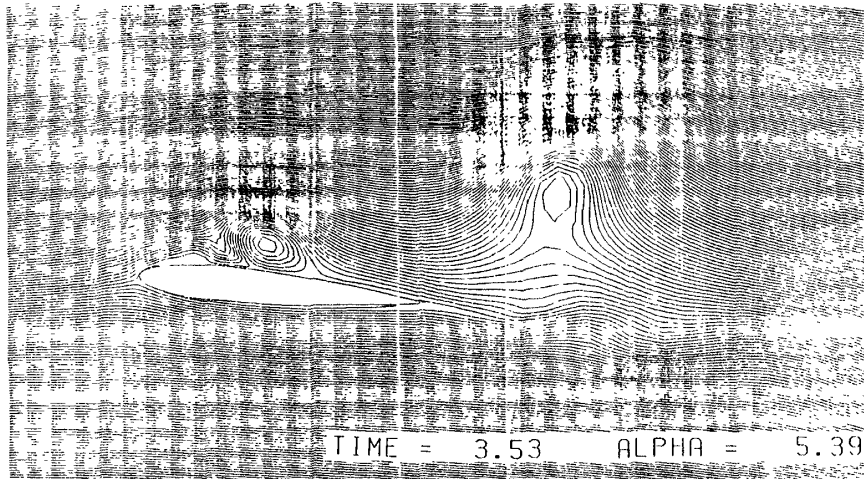
図2 Streamline (1)

した様子は図3の渦度の時間的変化においてより鮮明であり、迎角が減少するにつれて生成された渦は後上方へ飛び去る。本計算は $\phi-\omega$ 法で行われており、 C_p 曲線等実験⁸⁾との定量的な比較はなされてい

ないが、ダイナミックストールにおける渦の生成及び運動に対する定性的な諸傾向に良く適合していると考えられよう。



Streamline (2)



Streamline (3)

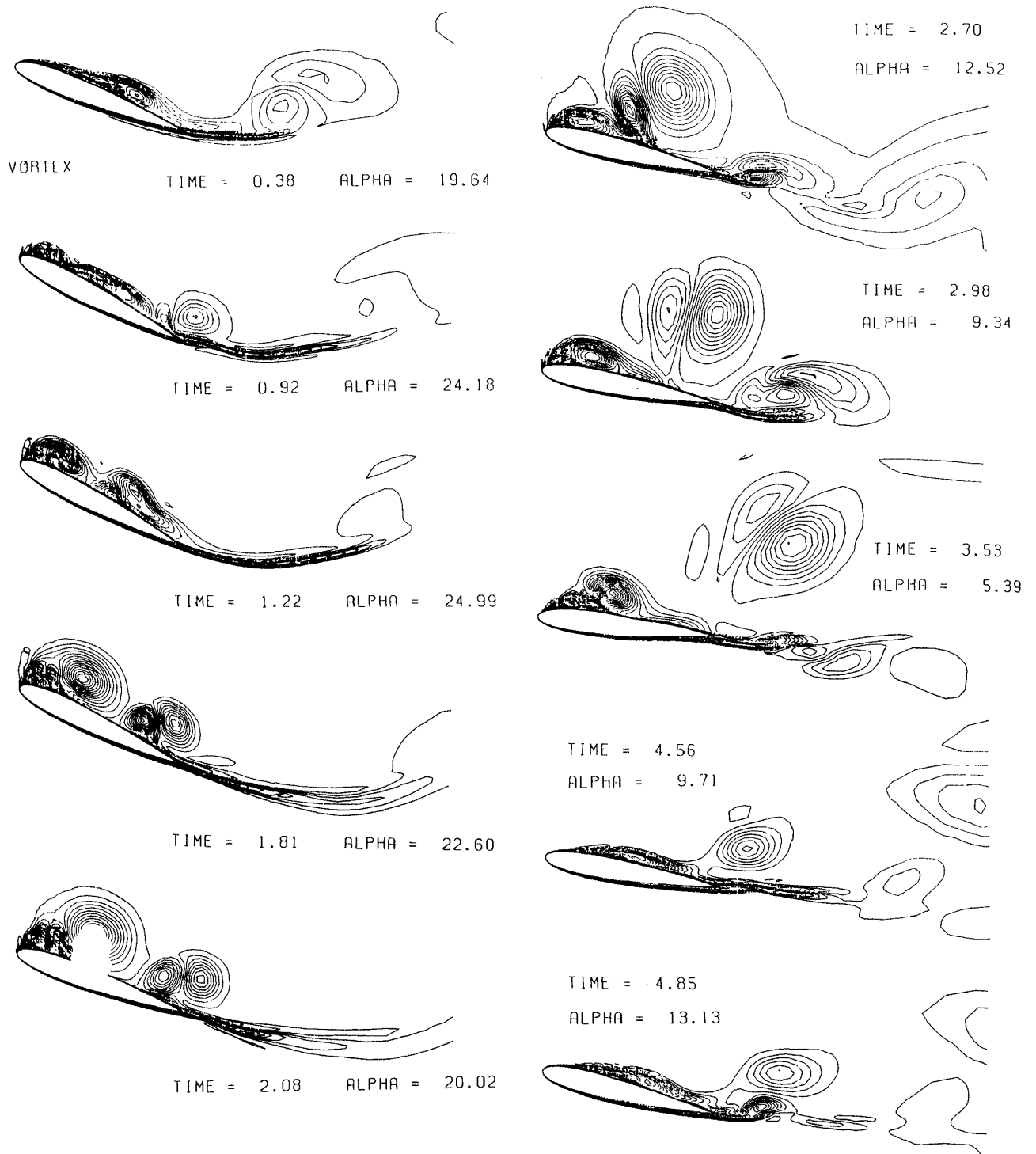


図3 Vortex

おわりに

計算機が速くなってきたため、こうした非定常計算も、計算機に数十時間働いてもらえばなんとか出来るようになった。しかしながら格子点数をより多くし、乱流的現象まで計算でとらえようと考えるとき、現在の計算機の計算速度にいらだちを覚える。

ダイナミックストールの問題に限っても、より多くの例に対し計算され、実験との比較検証が必要である。かって難解であり、そして現在も難解でありつづける流体のひねくれた性格の解明は近い将来我々人間という愚かな存在によっても可能であると考えるのは1つの思い上がりであろうか？

最後に、本研究において、航技研三好甫氏、なら

びに宇宙研桑原邦郎氏から有益な助言をいただいたことに感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) Viviand, H., *La Recherche Aerospatiale*, n° 1, pp. 65-68, 1978.
- 2) Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., "Fluid Mechanics", Academic Press, 1964.
- 3) Oshima, N., *Lecture Note in University of Tokyo*, 1978.
- 4) Schutzen, J.A., "Ricci Calculus", Springer, 1954.
- 5) Kawaguchi, M. & Jain, P., *J. Phys. Soc. Japan*, 21, pp. 2055-62, 1966.
- 6) Kawamura, T. & Kuwahara, K., AIAA-84-0340.
- 7) Gordon, W.J. & Hall, C.A., *Int. J., Num. Meth. Eng.*, Vol. 7, pp. 461-477, 1973.
- 8) McCroskey, W. & Pucci, S., AIAA-81-0051.

