

固一気混相流における粒子径分布の効果

石井 隆次*

Flows of Gas-Particle Mixtures with Size-Distribution

Ryuji ISHII

Department of Aeronautics, Kyoto University

ABSTRACT

In this paper, the nozzle flow of gas-particle mixtures is treated by assuming a continuous distribution of particle sizes. A distribution function for the particle radii is introduced in order to take into account the continuous distribution of particle sizes. The flow regimes of interest include continuum, slip, transition and free-molecular flows. The rarefaction effect on the nozzle performance is also investigated in detail.

1. ま え が き

実際の固一気混相流においては、固体微粒子は非常に多くの粒子径を持っている。しかし従来の解析のほとんどは、固体微粒子に対しては一律単一径の仮定あるいは近似が用いられている。この単一径モデルはある程度まで実際の流れを近似することができるが、その近似の精度にはおのずから限界がある。

本論文では、固体粒子の粒子径分布を考慮して、固体ロケットノズル内の固一気混相流の解析を行い、従来の単一径粒子近似の結果に対して実際の粒子径分布がどのような効果をもたらすかを明らかにする。流れは準一次元流とし固体粒子としては Al_2O_3 を考える。

2. 粒子の定義

固一気混相流における「粒子」は明らかに「分子」とは異なる。粒子も分子の集合体であるから、分子と粒子の物理的境界は必ずしも明確でない。ここでは粒子とは比熱、弾性率等巨視的な物理量を有する

分子の集合体と定義する。水滴についての実験結果は、その表面張力が巨視的な値を有するためには少なくとも水滴の半径方向に H_2O 分子が10個程度必要であることを示している。固体粒子の場合は必ずしも液体粒子の場合と対応するとは言えないが、ここでは一応水滴の表面張力の結果から類推して固体粒子の最小直径を分子直径の10倍とする。 Al_2O_3 の分子直径は約 2.3 \AA であるから、 Al_2O_3 粒子の最小直径は約 23 \AA となる。この 23 \AA という値は通常の流れの代表的長さに比べて十分に小さく、ほとんどの場合実質的にゼロと考えてよい。

3. 粒子径分布関数

気体と粒子の干渉は抗力による運動量および熱伝達によるエネルギーの伝達の形で行われる。気体から粒子へのこれらの伝達速度は粒子の表面積、すなわち粒子半径 r_p の二乗に比例するが、粒子の持つ運動量および熱エネルギーは粒子の体積、すなわち r_p の三乗に比例する。これらのことは流れの中における粒子の速度および温度はその粒子の r_p に依存することを示している。従って半径の異なる分子間にはその相対速度にもとづく直接衝突 (inter-

* 京都大学工学部

particle collision)の可能性が存在する。この粒子間の直接衝突は当然粒子群 (particle cloud) の挙動、さらには固-気混合体 (gas-particle mixture) 全体の流れの挙動にも影響を与える。

しかしながら通常の固体ロケットの場合には粒子群の気体に対する流量比 (loading ratio) がたかだか1以下であり、そのためこの粒子間の直接衝突の効果は十分小さい¹⁾。それ故本研究では粒子間衝突は無視する。

さて、粒子はすべて球形で各粒子内の温度は一樣であると仮定する。このとき粒子径分布関数 $\phi(x, r_p)$ を次のように定義する。半径が r_p と $r_p + dr_p$ の間にある粒子 (r_p -粒子) の数密度を

$$n_p(x)\phi(x, r_p)dr_p \quad (1)$$

とする。ただし n_p : 粒子全体の数密度, x ノズル軸に沿う距離。このとき $\phi(x, r_p)$ は次の条件を満足する。

$$\int \phi(x, r_p)dr_p = 1 \quad (2)$$

分布関数 ϕ を用いると、粒子の体積平均半径 l_p は次で与えられる。

$$l_p^3 = \int \phi r_p^3 dr_p \quad (3)$$

なお $r_p \rightarrow \infty$ に対して $\phi \rightarrow 0$ と定義しておけば(2), (3)式における積分の上, 下限は形式的にそれぞれ ∞ および 0 と置ける。

4. 基礎方程式

r_p -粒子の連続の式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_p \phi dr_p V_p A) = 0$$

ここに $V_p = V_p(x, r_p)$ は r_p -粒子の速度, A はノズルの断面積である。両辺を dr_p で割ると

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_p \phi V_p A) = 0$$

$$\text{あるいは } n_p \phi V_p A = \Delta M_p(r_p) \quad (4)$$

となる。ただし $\Delta M_p(r_p)$ は r_p のみの関数。次に r_p -粒子の運動方程式およびエネルギー式はそれぞれ

$$V_p \frac{\partial V_p}{\partial x} = A_p (V - V_p) \quad (5)$$

$$V_p \frac{\partial T_p}{\partial x} = B_p (T - T_p) \quad (6)$$

ただし V, T は気体の速度および温度であり, $T_p =$

$T_p(x, r_p)$ は粒子の温度である。また A_p, B_p はそれぞれ

$$A_p = \frac{4.5 \mu}{\rho_{mp} r_p^2} \frac{C_D}{C_{D\text{stokes}}}, \quad B_p = \frac{3 \mu}{\rho_{mp} r_p^2} \frac{C_{pg}}{C_{pp}} \frac{N_u}{N_{ustokes}} \quad (7)$$

で与えられる。ただし ρ_{mp} : 粒子の物質密度, μ : 気体の粘性係数, C_D : 抗力係数, N_u : ヌッセルト数, P_r : プラントル数, C_{pg} : 気体の定圧比熱, C_{pp} : 粒子物質の比熱。

さらに(2)と(4)から

$$n_p = \frac{1}{A} \int \frac{\Delta M_p}{V_p} dr_p \quad (8)$$

気体および固-気混合体については次が成立する。

$$\rho V A = M_g \quad (9)$$

$$\rho V \frac{dV}{dx} + \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \pi \rho_{mp} n_p \int A_p (V - V_p) \phi r_p^3 dr_p = 0 \quad (10)$$

$$\rho V \frac{d}{dx} \left(C_{pg} T + \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{4}{3} \pi \rho_{mp} n_p \int [A_p V_p (V - V_p) + C_{pp} B_p (T - T_p)] \cdot \phi r_p^3 dr_p = R \rho T \quad (11)$$

ただし ρ : 気体密度, p : 気体圧力, R : 気体定数。最後に質量流比 (loading ratio) ν は次で与えられる。

$$\nu = \frac{1}{M_g} \frac{4}{3} \pi \rho_{mp} n_p A \int \phi V_p r_p^3 dr_p \quad (12)$$

以上8個の未知量 $n_p, V_p, T_p, \phi, \rho, V, T, p$ に対して8個の方程式(4)~(6), (8)~(12)が得られたことになる。

5. 貯気槽条件と臨界流量

下流側から貯気槽に近づく極限を

$$\lim_{x \rightarrow x_0} () = ()_{-0} \quad (14)$$

と表わす。ただし添字 0 : 貯気槽。気体および粒子は

$$V_{p-0} = 0, \quad T_{p-0} = T_0, \quad n_{p-0} = n_{p0}, \quad \phi_{-0} = \phi_0, \quad V_{-0} = 0, \quad T_{-0} = T_0, \quad \rho_{-0} = \rho_0 \quad (15)$$

の条件を満足する。しかし

$$\left(\frac{V_p}{V}\right)_{-0} = K_p(\tau_p), \quad \left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_p}\right)_{-0} = L_p(\tau_p) \quad (16)$$

となり、 $K_p(\tau_p)$ 、 $L_p(\tau_p)$ は必ずしも1とはならず、一般には τ_p の関数となる。(16)式の関係は固-気混相流ノズル流れの最も重要な特徴の一つである。

有限長さのノズルを考える。 $x - x_0 = \xi$ とおき $\xi = 0$ の近傍でノズル断面積が

$$A = \text{const } \xi^{-m} \quad (m > 0) \quad (17)$$

で表わされるようなノズルを考えると次のような関係が得られる。

$$\left(\frac{V_p}{V}\right)_{-0} = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < m < 1 \\ K_p(\tau_p) & \text{for } m = 1 \\ 1 & \text{for } m > 1 \end{cases} \quad (18)$$

一方(4)、(9)式より

$$\frac{\Delta M_p(\tau_p)}{M_g} = \frac{n_{p0} \phi_0}{\rho_0} \left(\frac{V_p}{V}\right)_{-0} \quad (19)$$

従って

$$\frac{\Delta M_p(\tau_p)}{M_g} = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < m < 1 \\ n_{p0} \phi_0 K_p(\tau_p) / \rho_0 & \text{for } m = 1 \\ n_{p0} \phi_0 / \rho_0 & \text{for } m > 1 \end{cases} \quad (20)$$

$0 < m < 1$ の場合は貯気槽内の気体は粒子より先に流れ出てしまい、すべての粒子は貯気槽内にとり残されることになる。また $m = 1$ では $\Delta M_p(\tau_p) \propto n_{p0} \phi_0 K_p(\tau_p)$ となり各粒子の流出量は粒子径により異なり、しかもそれぞれの粒子の貯気槽における数密度 $n_{p0} \phi_0$ に比例しない。一般的には粒子径の小さな粒子は粒子径の大きな粒子よりも相対的に速い割合で流出してしまう。これらの関係は、固-気混相流では $m > 1$ の場合以外には定常流モデルが成立し得ないことを示している。

しかし実際の固体ロケットの場合には燃焼室で種々の大きさの Al_2O_3 粒子および気体がほぼ定期的生成されている。従って理想的な貯気槽モデルは成立していない。

6. Constant-lags 近似

岐点(貯気槽)で与えられた粒子径分布関数 ϕ は x と共に変化する。ところがある特別な流れでは

$\phi(x, \tau_p) \equiv \phi_0(\tau_p)$ で ϕ が x に対して不変となる。このような流れに対しては解析的な解が存在する²⁾(4)と(9)より $\phi \equiv \phi_0$ となるためには

$$\frac{V_p}{V} = f(x) \cdot g(\tau_p) \quad (21)$$

であればよい。ここに $f(x)$ 、 $g(\tau_p)$ はそれぞれ x および τ_p のみの適当な関数である。特に $f(x) \equiv 1$ とすると(16)式から $g(\tau_p) = K_p(\tau_p)$ となり

$$\frac{V_p}{V} = K_p(\tau_p) \quad (22)$$

となる。この関係式は単一径粒子近似に対してKliegelにより提案された constant-lags 近似の拡張である³⁾。換言すれば拡張された constant-lags 近似とは粒子径分布関数を x に対して不変とするような近似モデルと言える。一般にノズルスロート近傍の流れに対しては、この constant-lags 近似はその有効性についてある程度理論的根拠を持っており³⁾、ここでは貯気槽から音速点までの領域は $m = 1$ に対応する constant-lags 近似の解を用い、超音速領域のみを数値的に厳密に解く。

7. 数値解の例

粒子の挙動は粒子回りの気体の流れの条件に大きく依存している。粒子の挙動を支配する重要なパラメータは次で定義される粒子レイノルズ数と粒子マッハ数である。

$$R_p = \frac{2\rho\tau_p|V - V_p|}{\mu}, \quad M_p = \frac{|V - V_p|}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (23)$$

ただし γ : 気体の比熱比。粒子回りの気体の希薄度を示すクラセン数 K_n は上の二つのパラメータを用いて次のように定義される。

$$K_n = 1.26 \sqrt{\gamma} \frac{M_p}{R_p} \quad (24)$$

超音速ノズル流では K_n は x の単調増加関数である。ミクロンサイズの粒子に対しては K_n は必ずしも1に比べて十分に小さくはない。このことは粒子の挙動に関しては気体の希薄化の効果が重要であることを意味している。図1には典型的なノズル内粒子の挙動が $M_p - R_p$ 平面上に示されている。

計算に使用したノズル形状は

$$A = \pi L_t^2 \left[1 + K \left(\frac{x}{L_t} \right)^2 \right] \quad (25)$$

ただし L_t : スロート半径。岐点条件, 物理量およびノズル定数は表 1 に, また貯気槽での粒子径分布関数は図 2 に与えられている。

図 3 は気体および粒子の速度分布である。図には粒子回りの気体の流れの希薄度にもとづく領域 (flow regime) が示されている⁶⁾。明らかにスロート後方では粒子回りの気体の流れは連続体流領域 (continuum flow regime) にはないことがわかる。また粒子速度については, いわゆる凍結の現象が現れており, しかもこの凍結現象は粒子回りの気体の流れが自由分子流領域 (free-molecular flow regime) に入る位置から比較的急激に起こっている。

図 4 は気体および粒子の温度分布を示している。

表 1

Physical constants of gas and Al_2O_3 particles

$$\gamma = 1.29, \quad C_{pg} = 2008.0 \text{ J/kg K}, \quad P_r = 0.75$$

$$\mu = 7.98 \times 10^{-5} (T/3200)^{0.6} \text{ kg/s m}$$

$$C_{pp} = 1686.0 \text{ J/kg K}, \quad \rho_{mp} = 4.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Reservoir conditions

$$p_0 = 14.26 \text{ atm}, \quad T_0 = 3200 \text{ K}, \quad \rho_0 = 1.0 \text{ kg/m}^3$$

Nozzle constants

$$L_t = 0.075 \text{ m}, \quad k = 0.2$$

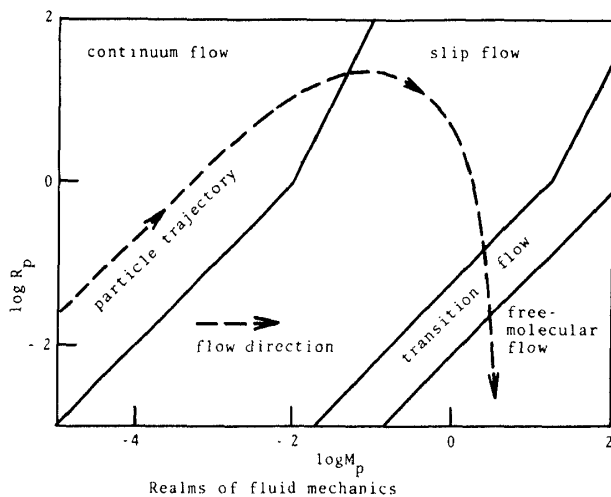


図 1 $M_p - R_p$ 平面上の粒子径路

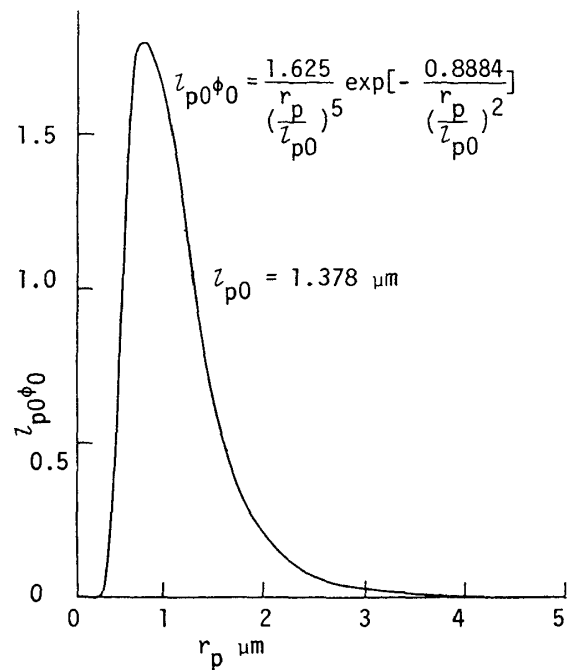


図 2 粒子径分布関数

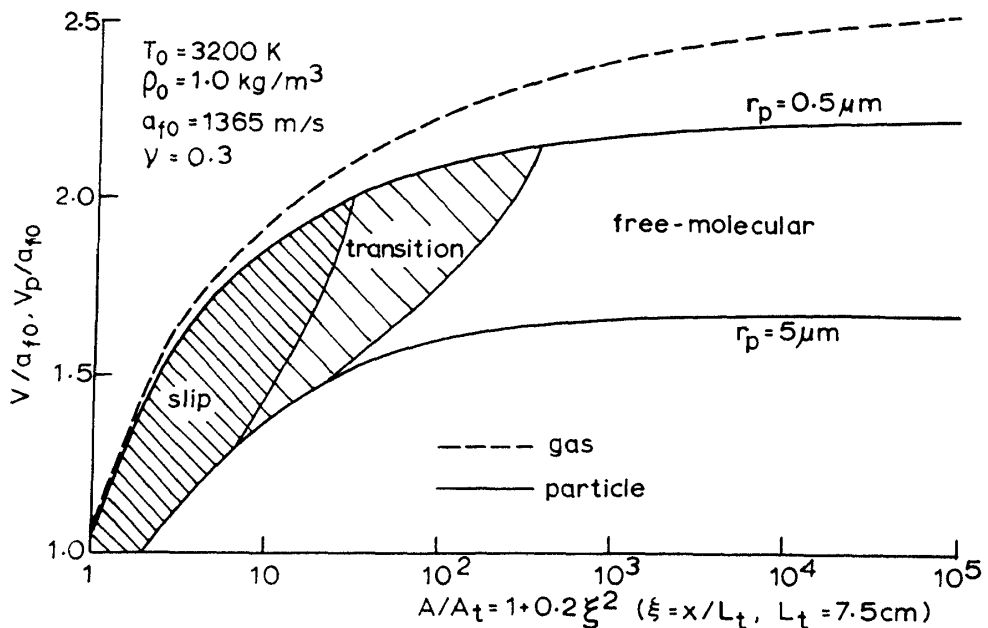


図 3 気体および粒子の速度

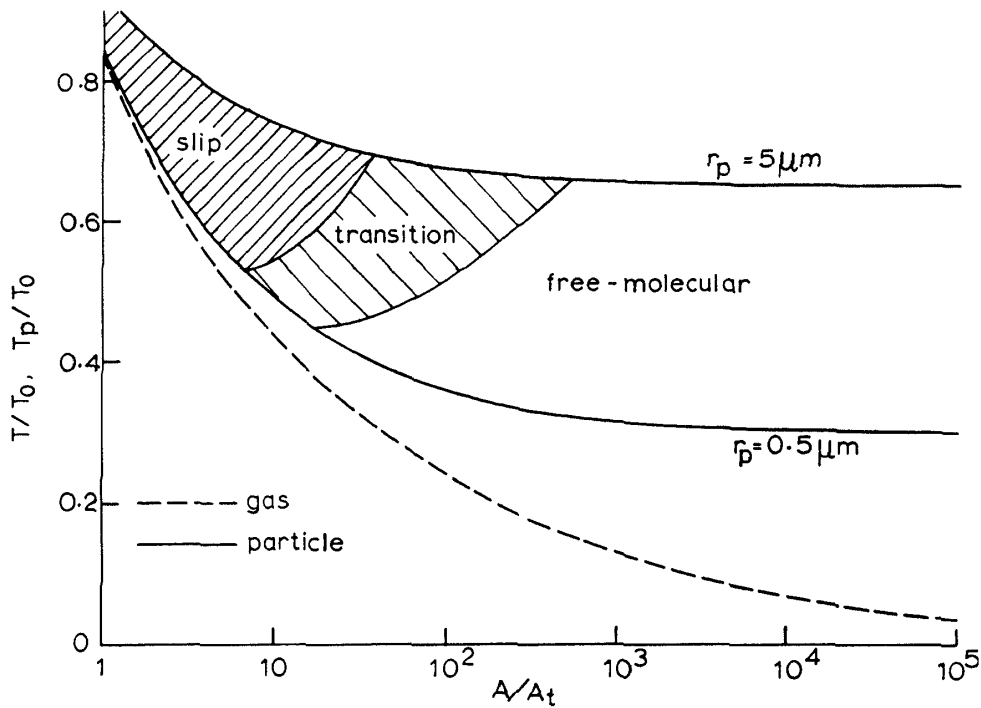


図4 気体および粒子の温度

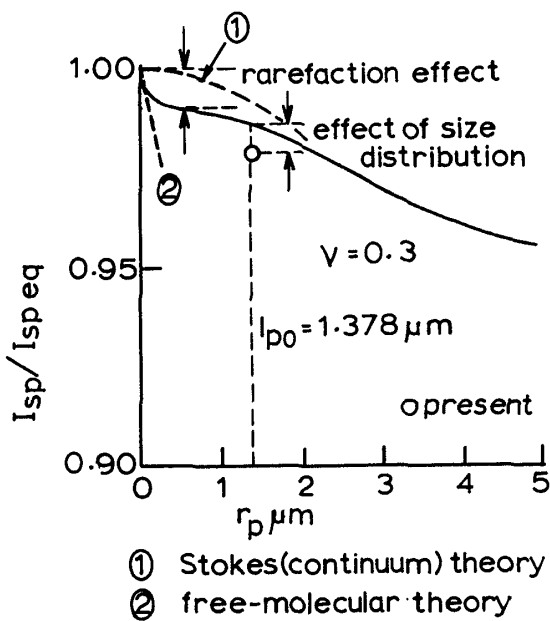


図5 比推力 I_{sp}

速度分布の場合とほとんど同じ傾向を示している。

図5にはノズルの長さが $x_e = 10L_t$ の場合の比推力 (specific impulse) I_{sp} の計算結果が (体積平均粒子径に対して) 白丸で示されている。 I_{speq} は平衡流に対する値である。比較のため単一径粒子近似の結果が実線で示されている。点線は粒子径が十分小さい場合 (nearly equilibrium flow) の単一径粒子近

似解を示している。この場合の解は連続体流と自由分子流の二つの極限的な場合について求められている。

これらの結果から、単一径粒子近似に対する粒子径分布の効果は約0.5%程度であり、希薄気体効果も0.5%程度である。

8. 結 論

固-気混合体のノズル流れにおいては、気体のみのノズル流れと異なる二、三の重要な特徴がある。その一つは貯気槽から出発する準一次元流については必ずしも定常流が存在しないことである。しかしこの困難は貯気槽内に粒子源を導入することによりある程度解決することができる。

ノズル内の粒子の挙動を予測するためには、粒子径分布および気体の希薄化の効果を考慮することが不可欠である。特に粒子速度および温度の凍結現象には、この希薄化の効果は極めて重要である。

参 考 文 献

- 1) R. Ishii: Rarefaction Effect on Flow Behavior of Gas-Particle Mixtures, to be published in Proceedings of fourteenth

- International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 1984.
- 2) R. Ishii: Effect of Particle-Size Distribution on Flow Behavior of Gas-Particle Mixture, International Symposium on Gas-Solid Flows, ASME, 1984, pp. 61-69.
 - 3) J.K. Kliegel: Gas-Particle Nozzle Flows, Ninth International Combustion Symposium, Academic Press, New York, 1963, pp. 811-826.
 - 4) C.B. Henderson: Drag Coefficient of Spheres in Continuum and Rarefied Flows, AIAA J., Vol. 14, No. 6, 1976, pp. 269-271.
 - 5) D.J. Carlson and R.F. Hoglund: Particle Drag and Heat Transfer in Rocket Nozzle, AIAA J., Vol. 11, No. 2, 1980, pp. 1980-1984.
 - 6) H-S. Tsien: Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 13, 1946, pp. 653-664.