

# Implicit Factored Methodによる二次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式の計算

児 玉 良 明\*

## Computation of the Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations Using an Implicit Factored Method

Yoshiaki KODAMA  
Ship Research Institute

### ABSTRACT

An implicit factored scheme was used for solving the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. Pseudo compressibility was introduced in the continuity equation.

The non-conservation form was chosen for stability. Von Neumann stability analysis with a model scalar equation showed that the present scheme remains stable under arbitrary coordinate transformations, without adding any numerical dissipation term.

Calculation was made for a backward-facing step flow with the Reynolds number  $Re = \frac{U_{peak} \cdot H}{\nu} = 58$ , where H is a step height. Convergence was obtained after about 300 iterations, using a non-dimensional time step  $\Delta t = 1.0$ . The calculated results show a reasonable tendency, except that small oscillations appear in the pressure distribution near the corner point. This phenomenon needs to be further investigated.

### 1. 緒 言

Implicit Factored Method<sup>1),2)</sup>(以下 IFM)は圧縮性 Navier-Stokes (以下 NS)方程式の有力な計算法である。その特徴を列挙すると、(1)従属変数がベクトル形であるため、二次元流から三次元流への拡張や乱流モデルの導入等、従属変数量の拡張が容易であること、(2)ベクトルプロセッサを用いての高速演算に適していること、(3)物体適合座標と組み合わせることにより境界条件の適用が容易となること、(4)差分オペレータが factorize されるため計算量が

次元数にほぼ比例すること、等である。

この IFM を非圧縮性流体(たとえば水)の計算に応用したい、というのが本研究の動機である。また、研究の目標最終ゴールは誰にでも使える汎用性のある計算プログラムの開発であるが、その線に沿って本計算法では物体適合座標を用いた場合の計算スキームの安定性について改良が加えられている。

### 2. 定 式 化

#### (1) 支配方程式

二次元非圧縮粘性流体の支配方程式は無次元化した形で、

\* 運輸省船舶技術研究所

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-3)$$

この方程式系は楕円型で、このままで IFM を適用できない。そこで (2-3) 式に擬似圧縮性<sup>3)</sup>を導入する。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (2-4)$$

ここで  $\beta$  は正の定数である。左辺に付加された  $\partial p / \partial t$  の項は定常状態ではゼロになるので定常流の計算精度に影響しない。右辺は圧力  $p$  の "spurious error" を小さくするために付加した項で、実際の計算では左辺の連続条件の精度を損わないように係数  $\gamma$  の大きさは  $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$  となるよう定められる。

(2-1), (2-2), (2-4) 式が解かれるべき方程式系であり、これをベクトル形で書くと、

$$q_t + Fq_x + Gq_y = C_R(q_{xx} + q_{yy}) \quad (2-5)$$

ただし

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad C_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_e} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

圧縮性流体の差分形式として保存形が専ら用いられている。保存形の最大のメリットは差分化された方程式上でも Gauss 定理および Stokes の定理が成り立つ<sup>4)</sup> ことであり、また保存形の差分形式が Rankine-Hugoniot の jump relation を含むために "shock-capturing" の性質をもつことである。

これに対して本計算法では (2-5) 式に示すように非保存形を用いた。これは非保存形が物体適合座標を用いた場合の数値安定性にすぐれているため

ある (第3章参照)。

(2) 物体適合座標 ( $\xi, \eta$ )

実際の流場を計算するためには物体適合座標を用いる方が境界条件の設定等の点で好ましい。そこで (2-5) 式を ( $\xi, \eta$ ) 座標に変換する。

( $x, y$ ) 座標と ( $\xi, \eta$ ) 座標の関係は、

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}, \quad \begin{cases} \partial_x = a \partial_\xi + b \partial_\eta \\ \partial_y = c \partial_\xi + d \partial_\eta \end{cases} \quad (2-7)$$

ただし

$$\begin{cases} a = J \cdot y_\xi, & b = -J \cdot y_\eta, & c = -J \cdot x_\eta, \\ d = J \cdot x_\xi \\ J = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{cases} \quad (2-8)$$

このとき (2-5) 式は次式に変換される。

$$q_t + Aq_\xi + Bq_\eta = C_R(\hat{a}q_{\xi\xi} + \hat{b}q_{\xi\eta} + \hat{c}q_{\eta\eta} + \hat{d}q_{\xi\xi} + \hat{e}q_{\eta\eta}) \quad (2-9)$$

ただし

$$\begin{cases} A = aF + cG \\ B = bF + dG \\ \hat{a} = a^2 + b^2 \\ \hat{b} = 2(ab + cd) \\ \hat{c} = b^2 + d^2 \\ \hat{d} = aa_\xi + ba_\eta + cc_\xi + dc_\eta \\ \hat{e} = ab_\xi + bb_\eta + cd_\xi + dd_\eta \end{cases} \quad (2-10)$$

(3) Approximate Factorization

時間差分は implicit な Padé 差分を用いる<sup>5)</sup>

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta}{1 + \theta \Delta} \cdot q^n + O\left[\left(\theta - \frac{1}{2}\right) \Delta t \cdot \Delta t^2\right] \quad (2-11)$$

ただし  $\Delta q^n = q^{n+1} - q^n$

$q^n$ ; time step  $n$  における  $q$

上式で  $\theta = 1$  のとき Euler implicit,  $\theta = \frac{1}{2}$  のとき Trapezoidal,  $\theta = 0$  のとき Explicit である。

非線形項に局所線形化を行い、 $\xi, \eta$  の mixed derivative の項を右辺に移動し、 $\xi$  微分オペレータと  $\eta$  微分オペレータについて approximate factorization を行うと、解くべき方程式は結局、

$\xi$  - sweep

$$\left\{ [I + h\hat{A}] + h \left[ A \frac{\partial}{\partial \xi} - C_R (\hat{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \hat{d} \frac{\partial}{\partial \xi}) \right] \right\} \Delta q^* = -\Delta t [A q_\xi + B q_\eta - C_R (\hat{a} q_{\xi\xi} + \hat{b} q_{\xi\eta} + \hat{c} q_{\eta\eta} + \hat{d} q_\xi + \hat{e} q_\eta)]^n + h \hat{b} C_R \Delta q_{\xi\eta}^{n-1} \quad (2-12)$$

$\eta$  - sweep

$$\left\{ [I + h\hat{B}] + h \left[ \hat{B} \frac{\partial}{\partial \eta} - C_R (\hat{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \hat{e} \frac{\partial}{\partial \eta}) \right] \right\} \Delta q^n = \Delta q^* \quad (2-13)$$

ただし

$$h = \theta \cdot \Delta t, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} au_\xi & cu_\xi & 0 \\ av_\xi & cv_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} bu_\eta & du_\eta & 0 \\ bv_\eta & dv_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

(2-12), (2-13)式はそれぞれ  $\xi$ ・ $\eta$  方向の連立常微分方程式と見ることができ、空間差分に共に2次の精度の中央差分を用いると block tridiagonal solver を用いて効率的に解くことができる。

### 3. von Neumann 安定性解析

前章で触れたように本計算法の特徴はすぐれた数値安定性にある。以下にモデル方程式を用いて説明する。

(2-5)式のモデル方程式として線形のスカラー方程式を考える。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -L_{(x,y)} U \quad (3-1)$$

ただし

$$L_{(x,y)} \equiv F \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y} - R \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3-2)$$

ここで  $F$ ,  $G$ ,  $R$  は定数であり、粘性項に対応して  $R > 0$  と仮定する。

(1)  $(x, y)$  平面での安定性

時間差分として(2-11)式の Padé 差分を用いると(3-1)式は、

$$[1 + \theta \Delta t L_{(x,y)}] \Delta U = -\Delta t \cdot L_{(x,y)} U \quad (3-3)$$

$x$  方向差分として以下の中央差分を用いる。 $y$  方向についても同様。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (E_x^{+1} - E_x^{-1}), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \cdot (E_x^{+1} - 2E_x^0 + E_x^{-1}) \quad (3-4)$$

ただし  $E_x^{+m} U(x, y) \equiv U(x + m\Delta x, y)$   
 $\Delta x$ ;  $x$  方向の離散間隔

time step  $n$  における  $U$  の値  $U^n$  として次の形を仮定する。

$$U^n \equiv U_0(x, y) + u^n \quad (3-5)$$

ただし 
$$\begin{cases} u^n \equiv v^n \cdot e^{i(k_1 \Delta x j + k_2 \Delta y k)} \\ v^{n+1} = \zeta \cdot v^n = \zeta^2 \cdot v^{n-1} = \dots \\ L_{(x,y)} U_0 \equiv 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

上式中で  $U_0$  は定常解、 $u^n$  は仮定された periodic disturbance、 $\zeta$  は time step 幅  $\Delta t$  毎の disturbance の増幅率である。

(3-3), (3-5)式を用いると微分オペレータの作用として、

$$\Delta t \cdot L_{(x,y)} U^n = (R_e + i I_m) u^n \quad (3-7)$$

ただし

$$\begin{cases} R_e \equiv \Delta t \cdot R (k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2) > 0 \\ I_m \equiv \Delta t (F k_1 \alpha \cos \theta_x + G k_2 \beta \cos \theta_y) \\ \alpha \equiv \sin \theta_x / \theta_x \\ \theta_x \equiv k_1 \Delta x / 2 \end{cases} \quad (3-8)$$

上式を(3-3)式に代入すると増幅率  $\zeta$  は、

$$\zeta = \frac{1 - (1 - \theta)(R_e + i I_m)}{1 + \theta(R_e + i I_m)} \quad (3-9)$$

安定条件  $|\zeta| < 1$  をみたま  $\theta$  の範囲は上式より、

$$\theta > \frac{1}{2} - \frac{R_e}{R_e^2 + I_m^2} \quad (3-10)$$

(3-8)式より常に  $R_e > 0$  であるから結局、

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad (3-11)$$

のとき任意の  $\Delta t (> 0)$  に関して安定、すなわち無条件安定である。

(2) 座標変換された方程式の安定性

(3-1)式に(2-7)式で示される座標変換を行

うと,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -L_{(\xi, \eta)} U \quad (3-12)$$

ただし

$$L_{(\xi, \eta)} \equiv A \frac{\partial}{\partial \xi} + B \frac{\partial}{\partial \eta} - R \left( \hat{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \hat{b} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \hat{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \hat{d} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{e} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

上式の係数は(2-10)式で与えられる。上式と(3-1)式との主な違いは、 $\xi \cdot \eta$ の cross derivative 項がある点にある。

時間差分に(2-11)式の Padé 差分を用いると上式は,

$$(1 + \theta \Delta t L_{(\xi, \eta)}) \Delta U = -\Delta t L_{(\xi, \eta)} U \quad (3-13)$$

$\xi, \eta$  方向の空間差分として(3-4)式と同様の中央差分を用い, time step  $n$  での  $U$  の値  $U^n$  の形として(3-5)式と同様なものを仮定すると, 微分オペレータ  $L_{(\xi, \eta)}$  の寄与として,

$$\Delta t \cdot L_{(\xi, \eta)} U^n = (R_e + i I_m) u^n \quad (3-14)$$

ただし

$$\begin{cases} R_e \equiv \Delta t R (\hat{a} k_1^2 \alpha^2 + \hat{b} k_1 k_2 \alpha \beta \cos \theta_\xi \cos \theta_\eta + \hat{c} k_2^2 \beta^2) \\ I_m \equiv \Delta t \{ (A - R \hat{d}) k_1 \alpha \cos \theta_\xi + (B - R \hat{e}) k_2 \beta \cos \theta_\eta \} \end{cases} \quad (3-15)$$

このとき disturbance の増幅率  $\zeta$  の式は(3-9)式と同一になる。さらに(3-15)式の実部  $R_e$  は(2-10)式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{R_e}{\Delta t \cdot R} &= (a^2 k_1^2 \alpha^2 + 2abk_1 \alpha k_2 \beta \cos \theta_\xi \cos \theta_\eta + b^2 k_2^2 \beta^2) \\ &+ (c^2 k_1^2 \alpha^2 + 2cdk_1 \alpha k_2 \beta \cos \theta_\xi \cos \theta_\eta + d^2 k_2^2 \beta^2) \\ &\geq (a^2 k_1^2 \alpha^2 - 2|abk_1 \alpha k_2 \beta \cos \theta_\xi \cos \theta_\eta| + b^2 k_2^2 \beta^2) + (\dots) \\ &\geq (a^2 k_1^2 \alpha^2 - 2|abk_1 \alpha k_2 \beta| + b^2 k_2^2 \beta^2) + (\dots) \\ &= (|ak_1 \alpha| - |bk_2 \beta|)^2 + (|ck_1 \alpha| - |dk_2 \beta|)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

上式で  $\Delta t > 0, R > 0$  であるから  $R_e \geq 0$  である。ゆえに安定条件  $|\zeta| < 1$  をみたす  $\theta$  の範囲は  $(x, y)$  座標における値と同一になる。すなわち, 与えられたモデルスカラー方程式(3-1)の差分方程式は, 任意の座標変換  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  について

$$\theta \geq \frac{1}{2}$$

のとき無条件安定である。

#### 4. 計算例

具体例として backward-facing step flow を計算した。流場形状を図1に示す。ある下流位置で流路幅がステップ状に拡大される流れである。

(1) 計算条件

グリッドを図2, 図3に示す。このグリッドは斜交性が強く(最大  $45^\circ$ ), コーナー部は丸められていない。

境界条件は,

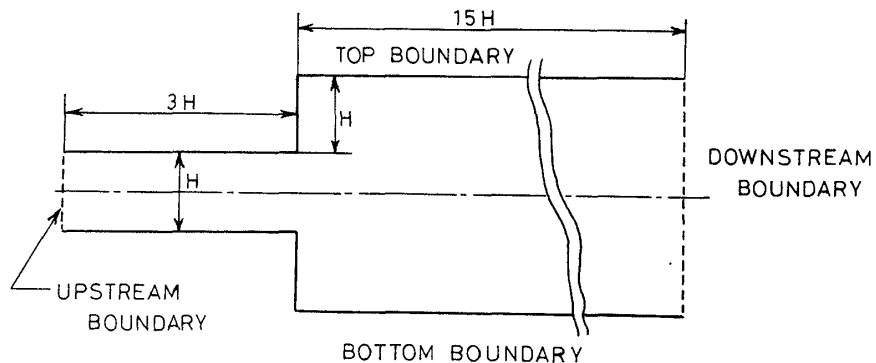


図1 Backward-facing step flow

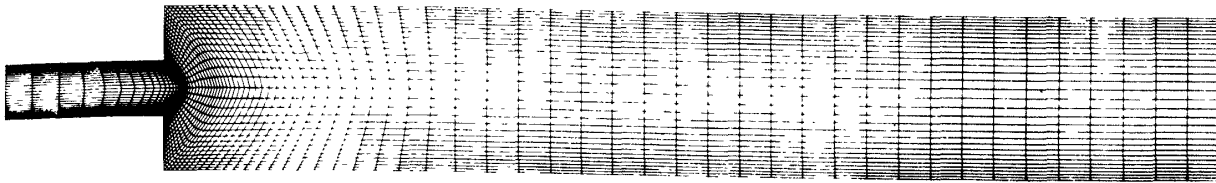


図2 グリッド(全体)

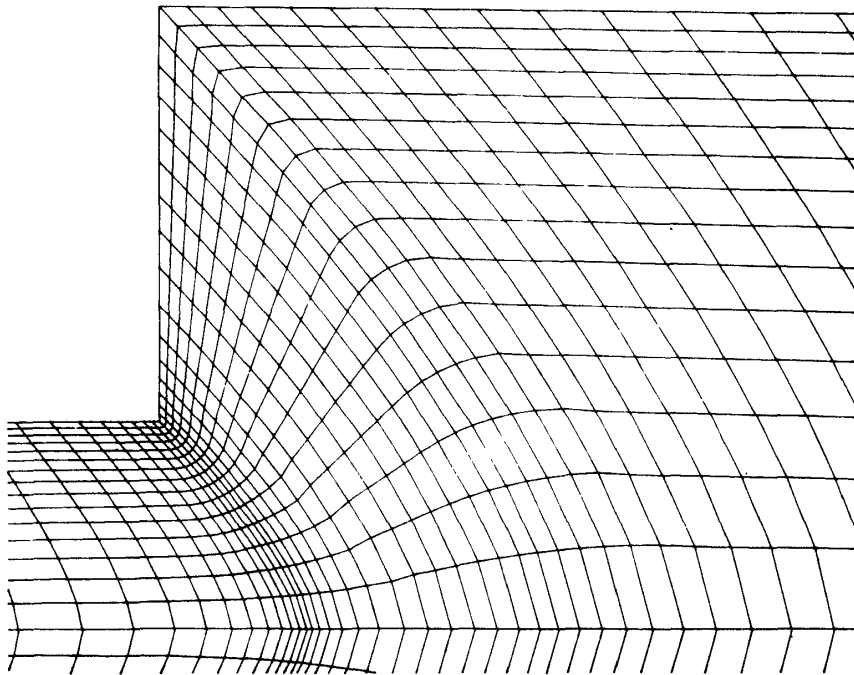


図3 グリッド(コーナー部拡大)

i) 上下流端で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{given} \quad (4-1)$$

ii) 剛体壁面で

$$\begin{cases} u = v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = r \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (4-2)$$

上下流端では流れは平衡状態すなわち Poiseuille 流であると仮定し、その圧力勾配の値を  $\partial p / \partial x$  として与えた。剛体壁面では圧力  $p$  の条件として連続の式(2-4)を用いた。

初期条件は、上下流端で  $\partial p / \partial x = \text{given}$  に対応した圧力差を与える以外は、流場のいたるところで  $u = v = p = 0$  である。

諸パラメータは、

$$R_e (\text{レイノルズ数}) = 58, \quad \beta = 1.0, \quad r = \frac{1}{J} \quad (4-3)$$

ただし  $J$  は(2-8)式で与えられる Jacobian である。このように  $r$  を選べば、差分化された(2-4)式の左辺の打ち切り誤差と右辺とが同一 order となる。

無次元化はステップ高さ  $H$  と、上流端での Poiseuille 流の peak 速度  $U_{\text{peak}}$  を用いて行った。

計算は(2-11)式で  $\theta = 1$  とし、 $H$  と  $U_{\text{peak}}$  とで無次元化された time step 幅  $\Delta t = 1.0$  を用いて約 300 回の iteration で収束した。収束判定条件は、

$$\text{Max} \left\{ \frac{\text{Max} (\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2})}{\text{Max} (\sqrt{u^2 + v^2})}, \frac{\text{Max} (|\Delta p|)}{\text{Max} (p) - \text{Min} (p)} \right\} < 1.0 \times 10^{-4} \quad (4-4)$$

(2) 計算結果

速度ベクトルを図4、図5に、また速度成分  $u$  を高さにとり、立体的に表示したものを図6に示す。

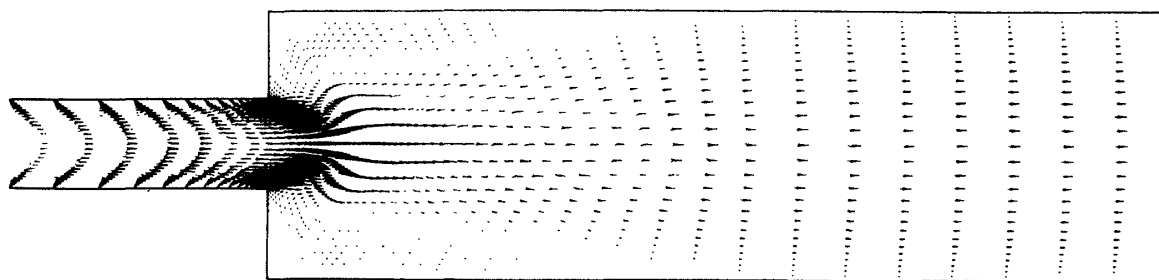


図4 速度ベクトル

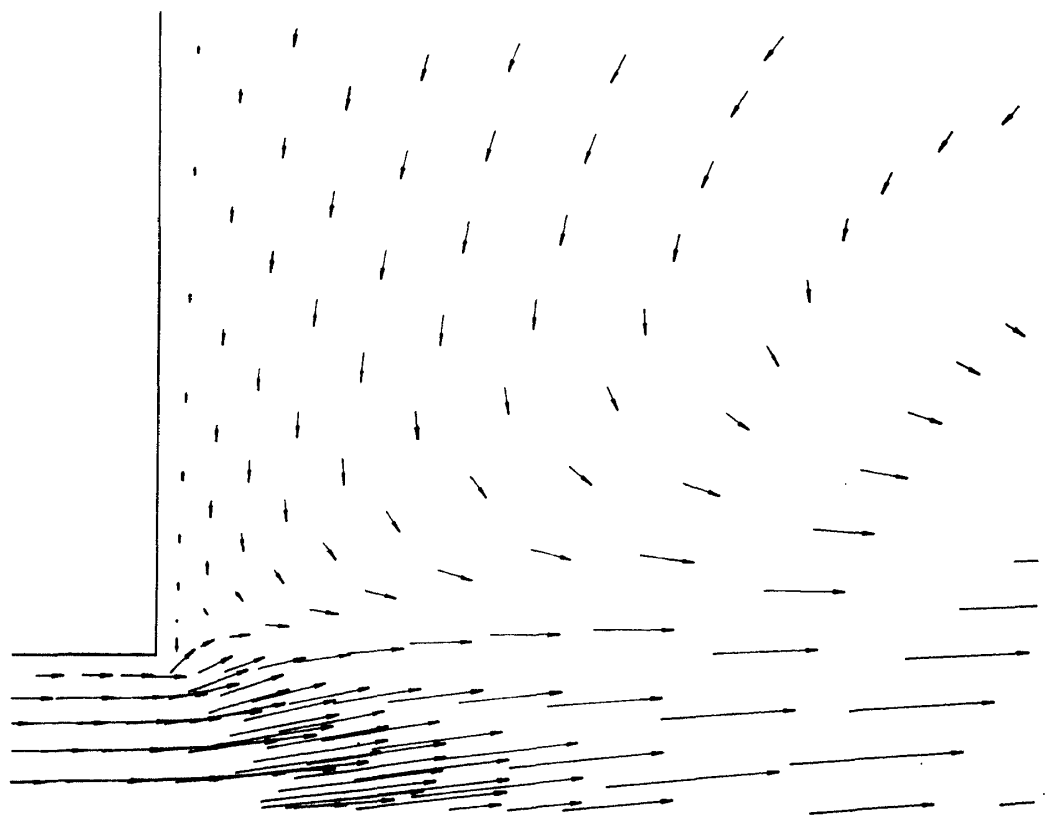
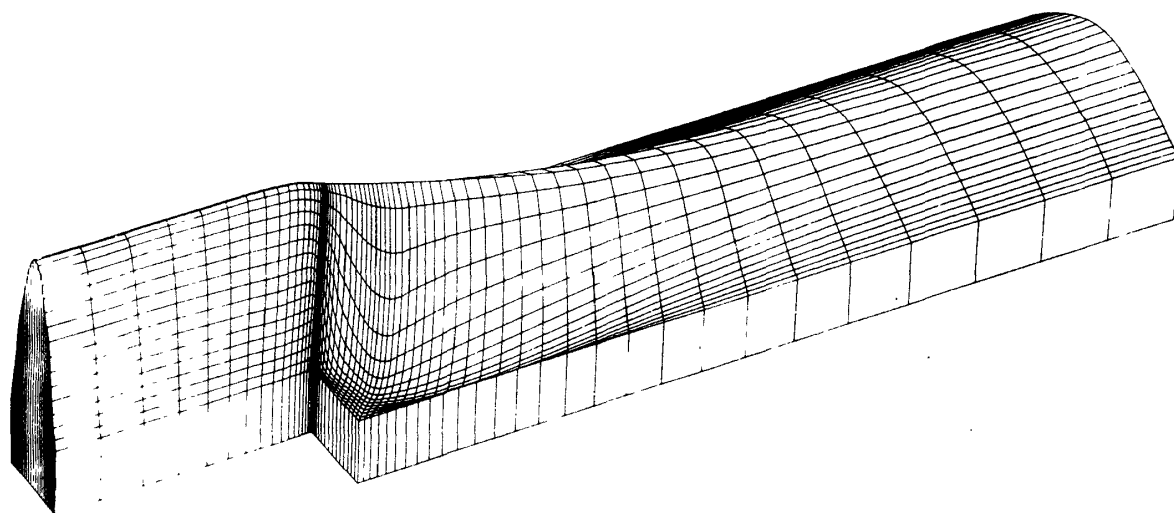
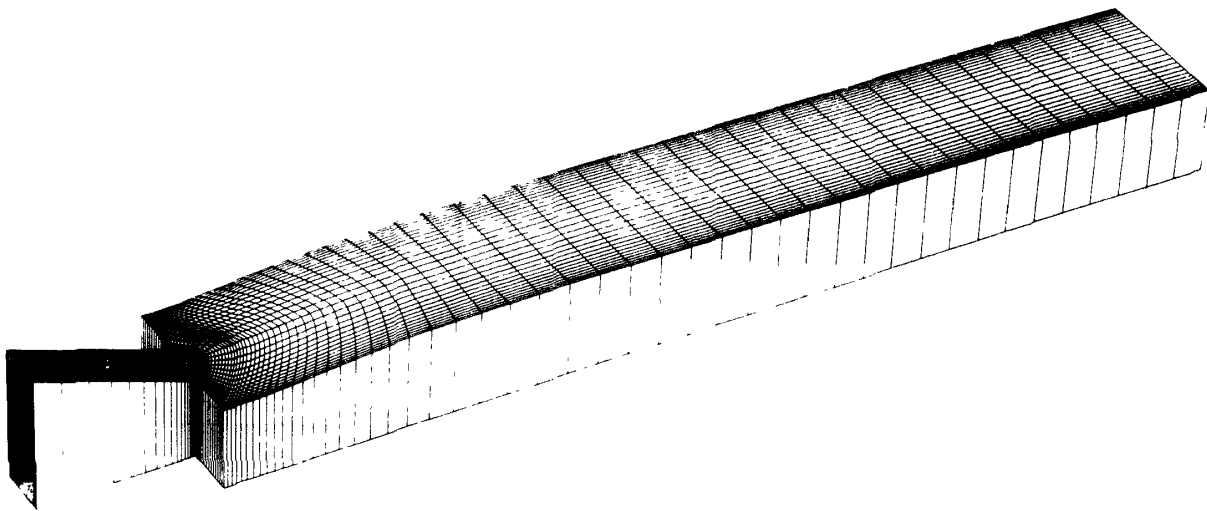


図5 コーナー部拡大

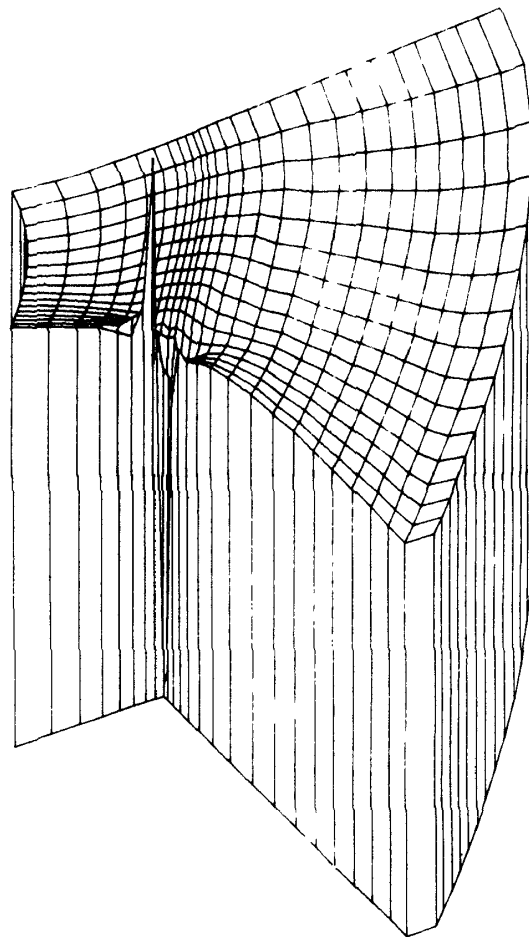
図6 速度成分  $u$

図7 圧力  $p$ 

流れは上下流端で放物形分布で，ステップ下流にステップ高  $H$  の3倍程度の長さの剝離域が存在する。

圧力分布を高さ方向にとり立体的に表示したのが図7である。Poiseuille流に対応して上流端で一定な負の圧力勾配を示し，ステップ下流では剝離域のために全体として拡大流となり正の圧力勾配を示す。

コーナー部の圧力分布を部分的に切り出して拡大表示したのが図8である。圧力はコーナーで極めて低く，その1つ上流の点で逆に正のピークを生じており局所的ながら振動的である。そこで対症的に壁面にコーナーの両側1メッシュ分だけ丸みをつけた(図9)。このグリッドを用いて計算した圧力分布を図10に示す。正のピークがかなり低くなっており改善の方向にある。これは，本計算法で空間差分に用いた中央差分が暗黙のうちに滑らかに変化する物体形状を仮定しており，角のある部分には不向きであることを示していると思われるが，一層の検討が必要である。

図8 圧力  $p$  (コーナー部)

## 5. 結 言

ある物体まわりの流場に関するNS方程式をIFMを用いて実際に解く場合，物体適合座標に変換してから解くことになるが，従来の保存形による定式化ではグリッドの形状によっては解が発散して求まらないことがしばしば起きる。すなわち grid generation にかなりの熟練が要求され，初心者が予備知識なしに計算プログラムを使用することを困難にしている。

この点の改善を目指したのが本計算法である。これを用いれば多少問題のあるグリッドでも計算は安定に収束する。求まった解を用いて誤差評価を行えばグリッドの問題個所が明らかになるので，その部分についてさらに細かくする等の改善を行って再計

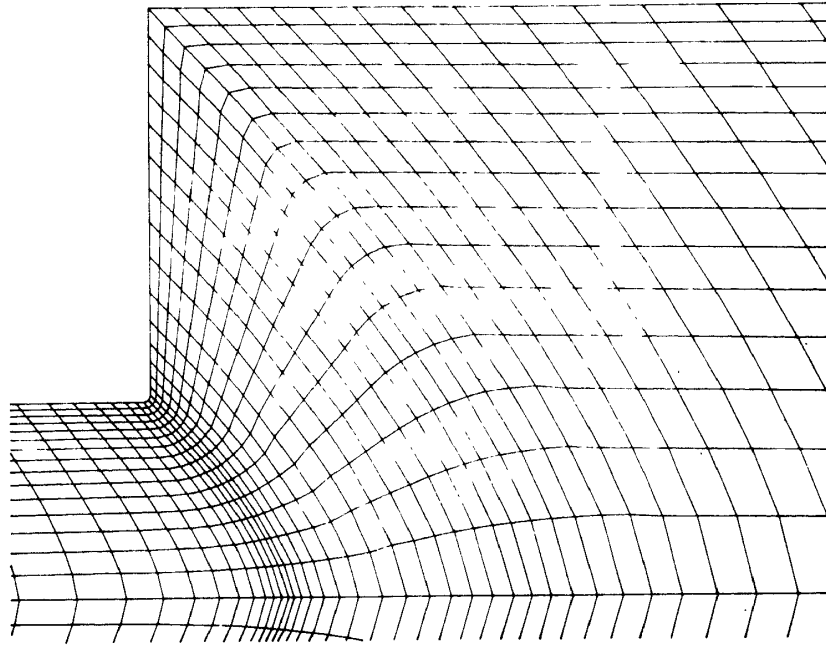
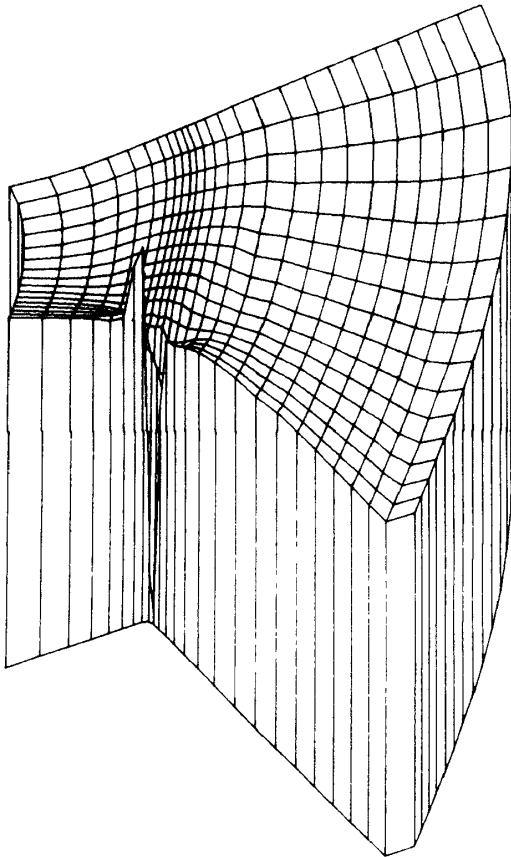


図9 コーナーを丸めたグリッド

図10 圧力  $p$  (コーナー部)

算すれば、初心者でも容易に満足できる解に到達できるであろう。

ただし本計算法は他の部分に若干の問題点を残し

ているので、今後は誤差評価も含めてその方面の検討を行う必要がある。

#### 参考文献

- 1) Beam, R.M. and Warming, R.F.; "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA J. Vol. 16, No. 4, April 1978.
- 2) Steger, J.L.; "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries", AIAA J. Vol. 6, No. 7, July 1978.
- 3) Steger, J.L. and Kutler, P.; "Implicit Finite Difference Procedures for the Computation of Vortex Wakes", AIAA J. Vol. 15, No. 4, April 1977.
- 4) Cheng, S.I.; "Errors in Finite Difference Solutions of Navier-Stokes Equations", 6th ICNMF 1978, Lecture Notes in Physics 90, Springer Verlag.
- 5) Warming, R.F. and Beam, R.M.; "On the Construction and Application of Implicit Factored Scheme for Conservation Laws", SIAM-AMS Proceedings, Vol. 11, 1978.