2－5

代数的及び幾何学的手法による数値的格子生成

松田卓也* 嶋 英志*

Numerical Grid Generation Using Algebraic and Geometrical Techniques

Takuya MATSUDA and Eiji SHIMA
Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

ABSTRACT

Two methods for numerical grid generation are presented in this paper: an algebraic method using Akima's interpolation technique and a geometrical method using the Delaunay network. Since these methods require only a very short computing time compared to techniques based on partial differential equations, it is possible to generate grids interactively even with a small computer.

The algebraic method uses bivariate interpolation based on local procedure, and can be easily extended to three dimensional grid generation. The geometrical method is based on a procedure which draws contour maps for arbitrarily distributed points using the Voronoi tessellation and the Delaunay network. An efficient algolism for the Voronoi tessellation is also presented.

1. はじめに

任意の形状の物体の回りの流れを計算する場合，境界に沿う座標線を持つ一般曲線座標系での差分法を用いることが多いが，そのとき，その生成法が重要である。その手法としては次のようなものがある。[1)]

a) 解析的手法：等角写像

b) 偏微分法：計算面での座標を解とする楕円型や放物型の偏微分方程式を数値的に解く。[2)]

c) 代数的手法：境界での条件や内部の点を与えて，内挿関数からもとめる。

aの手法は物理面から計算面への解析的な写像関数を用い，2次元の場合には古典的な流体力学ではよく知られている。しかし，任意の物体形状に対してうまい解析関数を見つけることの困難さや，3次元の場合への拡張の困難さなどがある。bの手法は原理的には，座標線が交わらない，任意の形状を扱える等の好ましい特徴を持つが，格子を任意の場所に集中するなどのコントロールが直観的でない，計算時間がかかるため繰返し修正するのが容易でないなどの問題がある。また数値的に解く場合には必ずしも座標線が交わらないとは限らない。一方cの手法では，座標の完全さは原理的には保証されないが，計算は速い，形状のコントロールは直観的にできるなどの利点を持ち，修正が容易である。マイコンで対話的に格子を生成することも可能である。ここでは幾つかの代数的格子生成法および筆者の提案する幾何学的手法について議論する。

* 京都大学工学部

2. 代数的格子生成法[3)]

2次元の場合，物理面の座標を (x,y)，計算面での座標を (ξ,η) $(0\leqq\xi,\ \eta\leqq 1)$とする。計算面における格子点の (x,y) 座標，あるいは座標とその微係数が与えられたときに，格子点以外での (x,y) を内挿によって求めることにより，粗い格子から細かい格子を生成することができる。翼断面周りの格子など単純な形状の場合は，翼表面と外部境界の格子点を与えれば十分である。この手法は元々，偏微分法などで生成した格子を，細かくしたり，必要な場所に座標線を集めるなど，格子の修正，編集用として我々は開発を始めたものであるが，この方法だけで充分，格子生成が出来ることがわかった。

内挿法としてはスプライン関数を用いる方法がある。しかしスプライン関数は高次導関数の連続性を満足させるため，ある点の影響が遠くまで伝わりやすく，不必要な凹凸を作り出す。不必要な凹凸を生じにくい内挿法として秋間法を用いた。[4)] この方法は準エルミート補間法の一つであり微係数の決定法に特徴がある。一次元の場合，各点の両側2点から次の様にしてその点の微係数を定める。図1で線分12，23，34，45の傾きをそれぞれ $m1$，$m2$，$m3$，$m4$ と

$$t=\frac{|m1-m2|m3+|m3-m4|m2}{|m1-m2|+|m3-m4|}$$

for $m1\neq m2$ or $m3\neq m4$

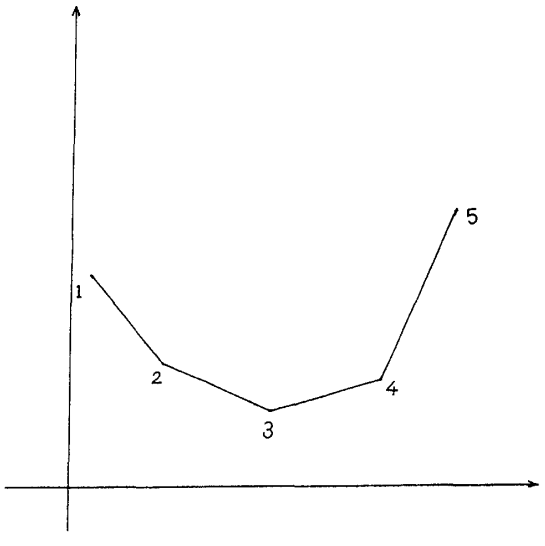


図1 一次元の秋間法における微係数の決定法

$$t=\frac{m2+m3}{2}$$

for $m1=m2$ and $m3=m4$

この様にして得られる微係数 t は，以下の好ましい性質をもつ。

(a) $m1=m2$, $m3\neq m4$, $m2\neq m3$ のとき
$t=m1=m2$

(b) $m3=m4$, $m1\neq m2$, $m4\neq m2$ のとき
$t=m3=m4$

(c) $m2=m3$, $m1\neq m2$, $m3\neq m4$ のとき
$t=m2=m3$

微係数が定まれば，それぞれの区間で両端での値と微係数を満足する3次関数を用いて滑らかな曲線を決定することができる。ただし境界の点では境界の外側に2個の仮想点を設ける必要がある。

二次元の場合は一次元の拡張として各点の微係数を以下の様に求める。f は x または y を表わしている。

$$\Delta_\xi f_{i,j}=(f_{i+1,j}-f_{i,j})/(\xi_{i+1}-\xi_i),$$
$$\Delta_\eta f_{i,j}=(f_{i,j+1}-f_{i,j})/(\eta_{j+1}-\eta_j),$$

の表記を用いると

$$\Delta_\xi(\Delta_\eta f_{i,j})=\Delta_\eta(\Delta_\xi f_{i,j})=\Delta_{\xi\eta} f_{i,j}$$

であり

$$w_{\xi i}=|\Delta_\xi f_{i+1,j}-\Delta_\xi f_{i,j}|,$$
$$w_{\xi i-2}=|\Delta_\xi f_{i-1,j}-\Delta_\xi f_{i-2,j}|,$$
$$w_{\eta j}=|\Delta_\eta f_{i,j+1}-\Delta_\eta f_{i,j}|,$$
$$w_{\eta j-2}=|\Delta_\eta f_{i,j-1}-\Delta_\eta f_{i,j-2}|,$$

として

$$f_{i,j}^{(1,0)}=(w_{\xi i}\Delta_\xi f_{i-1,j}+w_{\xi i-2}\Delta_\xi f_{i,j})/(w_{\xi i}+w_{\xi i-2}),$$
$$f_{i,j}^{(0,1)}=(w_{\eta j}\Delta_\eta f_{i,j-1}+w_{\eta j-2}\Delta_\eta f_{i,j})/(w_{\eta j}+w_{\eta j-2}),$$
$$f_{i,j}^{(1,1)}=\{w_{\eta j}(w_{\xi i}\Delta_{\xi\eta} f_{i-1,j-1}+w_{\xi i-2}\Delta_{\xi\eta} f_{i,j-1})+w_{\eta j-2}(w_{\xi i}\Delta_{\xi\eta} f_{i-1,j}+w_{\xi i-2}\Delta_{\xi\eta} f_{i,j})\}/(w_{\eta j}+w_{\eta j-2})(w_{\xi i}+w_{\xi i-2}),$$

ここで

$$f_{i,j}^{(\alpha,\beta)}=f^{(\alpha,\beta)}(\xi_i,\eta_j)=\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\xi^\alpha\partial\eta^\beta}f(\xi_i,\eta_j)$$

である。

微係数を決定した後，次の内挿関数を用いて格子点以外での値を求める。

$$f(\xi,\eta)=F_{i,j}(s,t)$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{1} a_i^{\alpha} b_j^{\beta}\{f_{i,j}^{(\alpha,\beta)}p_\alpha(s)p_\beta(t)$$
$$+f_{i+1,j}^{(\alpha,\beta)}q_\alpha(s)p_\beta(t)+f_{i,j+1}^{(\alpha,\beta)}p_\alpha(s)q_\beta(t)$$
$$+f_{i+1j+1}^{(\alpha,\beta)}q_\alpha(s)q_\beta(t)\},$$

ここで

$$a_i=\xi_{i+1}-\xi_i,\quad b_j=\eta_{j+1}-\eta_j,$$
$$s=(\xi-\xi_i)/a_i,\quad t=(\eta-\eta_j)/b_j,$$
$$0\leqq s,\ t<1,$$
$$p_0(t)=1-3t^2+2t^3,$$
$$q_0(t)=3t^2-2t^3,$$
$$p_1(t)=t(t-1)^2,$$
$$q_1(t)=t^2(t-1).$$

一次元の場合と同様に，境界での微係数を決定するために各々の境界点の外部に2個の仮想点が必要である。仮想点の配置のしかたによって，境界近くでの座標線の集中の度合や，直交性をコントロールすることができる。また格子点の数が少ないときには，仮想点の選び方が，出来あがった格子の形状を大きく左右する。境界近くで滑らかに変化するような仮想点の決めかたとして次の二とおりの方法を用いた。

(a) 図2 aでp_0を境界点，p_1，p_2をそれに続く領域内の格子点とし，p_{-1}，p_{-2}を仮想点とする。p_0p_1，p_1p_2の距離をd_0，d_1として，p_{-1}，p_{-2}は次の様に定める。

$$\overline{p_0p_{-1}}=\overline{p_{-1}p_{-2}}=d_0\exp\{(d_0-d_1)/d_0\},$$
$$\overline{p_0p_{-1}}/\!/\overline{p_0p_1},\quad \overline{p_{-1}p_{-2}}/\!/\overline{p_0p_1}.$$

(b) 図2 bに示すように(1)と距離の決めかたは同じだが，図に示すように境界にたいしてほぼ垂直方向に仮想点を配置する。

境界近くでの座標の直交性が求められることが多いので(b)の方が有利である。しかし座標線の配置を制御するための格子点を領域内部に設けたときには内部の格子点の方向と境界に垂直な方向との食い違いのため境界近くで急な屈曲が生じることがある。その場合には(a)の方法もしくは(a)と(b)を混合した方法をもちいるのが有利である。

初期データ

$$x_{ij}=x(\xi_i,\eta_j),$$
$$y_{ij}=y(\xi_i,\eta_j),$$
$$\xi=i/i_0\quad 0\leqq i\leqq i_0,\ \eta=j/j_0\quad 0\leqq j\leqq j_0$$

より，内挿関数$x(\xi,\eta)$，$y(\xi,\eta)$が求まれば，生成された格子点の座標は

$$x_{n,m}=x(\xi_m,\eta_n),$$
$$y_{n,m}=y(\xi_m,\eta_n),$$
$$\xi_m=m_0,\ 0\leqq m\leqq m_0,\ \eta_n=n/n_0,\ 0\leqq n\leqq n_0$$

となる。座標線の分布を変え，境界近くに集中させ

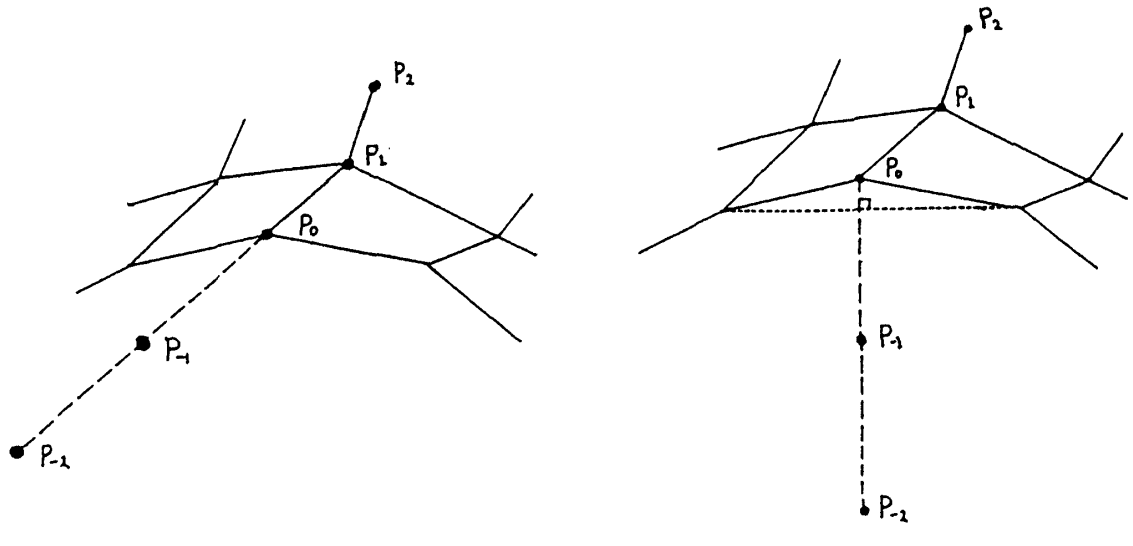


図2 二次元の秋間法の場合の外部仮想点の決定法

るには

$$x_{n,m}=x(f(\xi_m),\ g(\eta_n)),$$

$$y_{n,m}=y(f(\xi_m),\ g(\eta_n)),$$

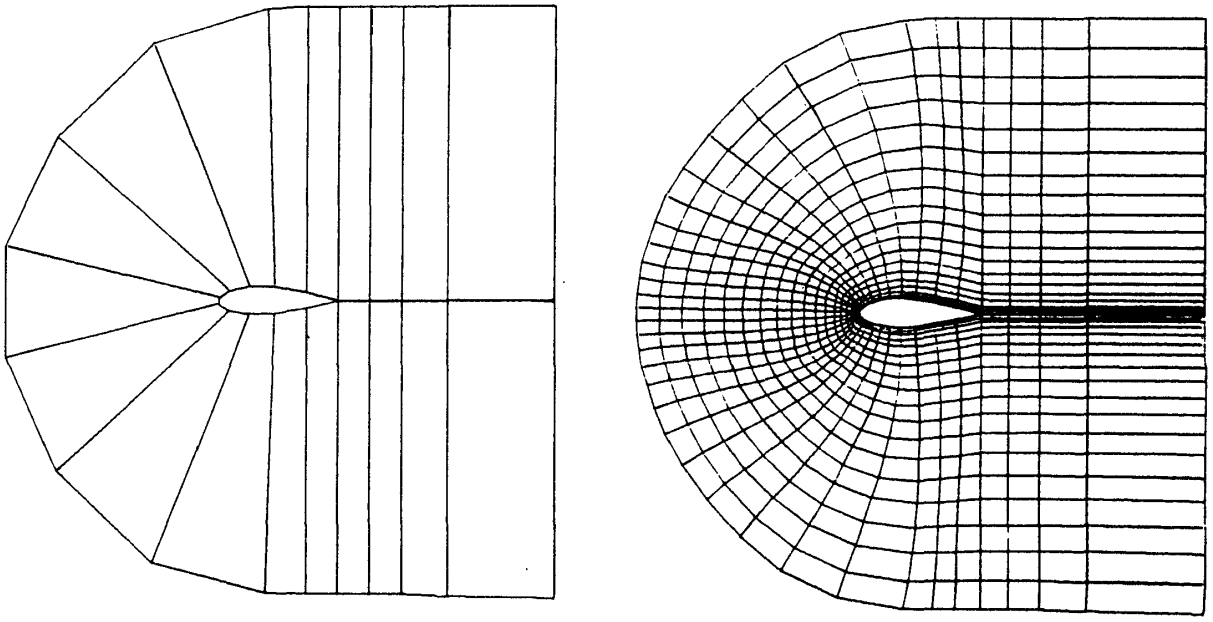
但し，f，gは単調な連続関数で

$$f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1.$$

f，gの与えかたによって集中の度合を変えることができる。f，gを内挿関数を使って作ることにより，その形は自由に決めることができる。f，gの傾きの小さい所に座標線が集まる。

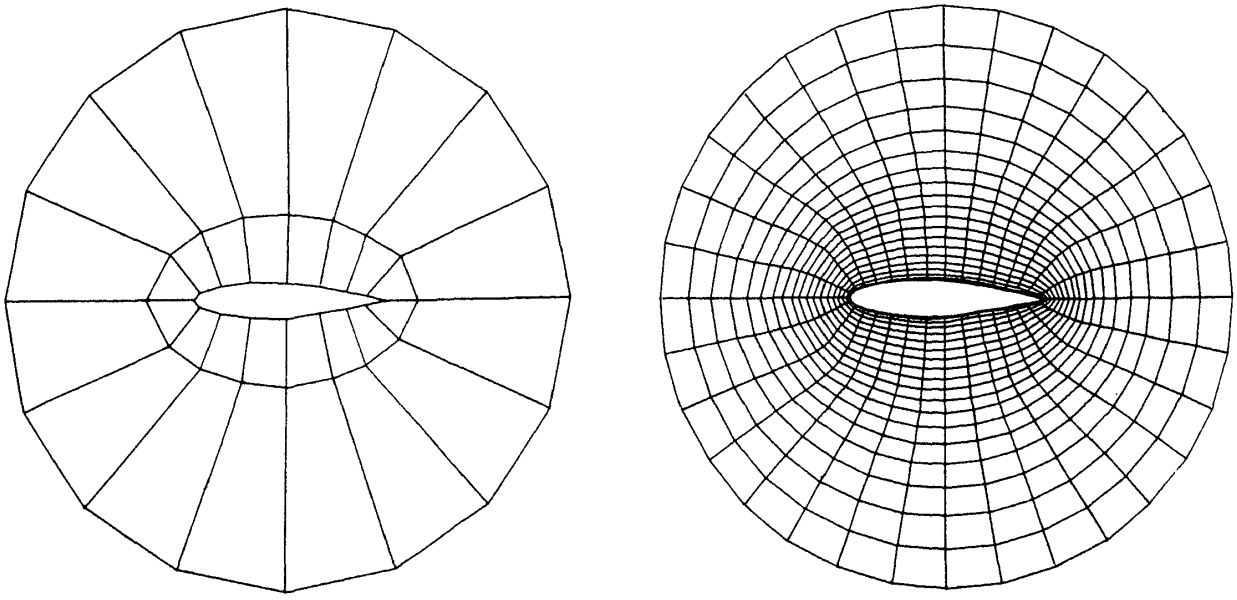
この方法を使って生成した座標の例を示す。初期データは画面上でカーソルで入力した。

図３ａはＣ型格子に対する初期データで，翼断面上と外部境界での格子点を与えている。図３ｂは完成した格子で仮想点(b)の方法で与え，上の方法で，翼表面近くと前縁近くに座標線を集中させている。図４ａはＯ型格子に対する初期データで，翼断面上と外部境界及び格子形状の制御のために，領域内に



(a) 初期データ　　(b) 完成した格子

図３　秋間法によって生成したＣ型格子



(a) 初期データ　　(b) 完成した格子

図４　秋間法によって生成したＯ型格子

補助の点を与えている。図4 bは完成した格子で外部仮想点は(a)の方法で与えてある。座標線の集中は行っていない。

この手法で座標を生成した時，座標線の重なりや，急な屈曲が生じることがある。しかし，これは次のようにしてかなり取り除くことができる。[5] f を x または y として

$$\bar{f}_{i,j}=f_{i,j}+w(f_{i+1,j}+f_{i-1,j}+f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-4f_{i,j}).$$

$w=0.1$ ぐらいで数回行えば充分である。

本手法の3次元への拡張は容易である。

3. 幾何学的方法－Delaunay網の応用

これから議論する方法は内挿法を用いる点では代数的手法と同じであるが，幾何学的な平面分割の概念を用いている。図3，4で翼表面を $\eta=1$，外部境界を $\eta=0$ とする。翼表面を高さ $\eta=1$ の山，外部境界高さ $\eta=0$ の麓と考えれば η 線は等高線と見る事ができる。等 η 線をひくことはこれだけのデータから，その他の等高線をひく事に相当する。

偏微分法でも，上に述べた代数的方法でも等 η 線が等高線に相当するが，それを決定するためには，$\eta=\eta_0$ の境界上での x, y が $x(\xi,\eta_0)$，$y(\xi,\eta_0)$ の形で与えられなければならない。即ち ξ でパラメータ化されていなければならない。元々，形状のデータはパラメータ化されていないか，されていても格子生成に適当でないのが普通であろう。パラメータ化が不適切な場合には，格子生成が困難になる。

境界を表わす不規則な点で η の値のみが与えられた時，そのデータから等 η 線をひくことができれば，等 ξ 線は容易にひくことができる（たとえば ξ 線を η 線と同様の方法で決める，η 線と直交するようにひく，η 線を適当な長さで区切って行く，など）。即ち不規則な点での高さが与えられたときに，もっともらしい等高線を引くアルゴリズムを見付ければ良い。そのようなアルゴリズムのうちでもっとも合理的で，正確だと思われる方法を紹介する。

そのためにVoronoi分割とDelaunay網の概念を導入する。平面上に N 個の点が任意にばらまかれているとする。各々の点の縄張を決定するにはどうすればよいか。ある点に着目すると，その点と他の点との縄張の境界は2点を結ぶ線分の垂直二等分線と考えるのが合理的だ。このような垂直二等分線の $N-1$ 個の点に対してひいて，その共通部分をもとめると，それが考えている点の縄張である。式で表わせば次のようになる。N 番目の粒子に属する縄張 T_n は

$$T_n=\{x; d(x,P_n)<d(x,P_m) \text{ for all } m\neq n\}$$

ただし，d は距離。

2次元の場合 T_n は凸多角形になりこの多角形をVoronoi多角形とよぶ。Voronoi多角形は平面を隙間なく分割する。この分割がVoronoi分割で，もとの点を多角形に対するVoronoi中心と呼ぶ。ある点が属するVoronoi多角形を考え，それと辺を接する多角形のVoronoi中心を近傍と定義するのは自然なことだ。そこで近傍どうしの点を結ぶと3角形でできたネットワークが得られる。このネットワークをDelaunay網と呼ぶ。Voronoi分割とDelaunay網はどちらも平面をユニークに分割する。この例を図5に示す。ここでは平面の場合について述べたが，この概念は任意の次元に拡張できる。3次元の場合Voronoi分割は凸多面体を作り，Delaunay網は4面体で構成される。

Delaunay網は，空間に分布した点を，近傍どうし結んだものということを理解すれば，これが等高線プログラムに利用可能なことはすぐわかる。各点で高さが分かっていれば，Delaunayの3角形の内部の値は頂点の値から，簡単に内挿できる。もっとも簡単な内挿は3頂点の高さから決まる平面である。

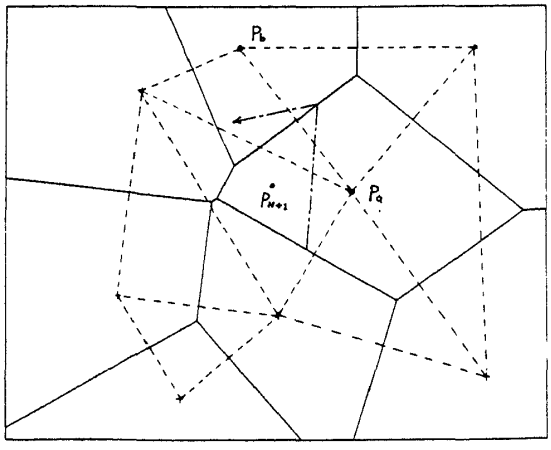


図5 VORONOI分割の例

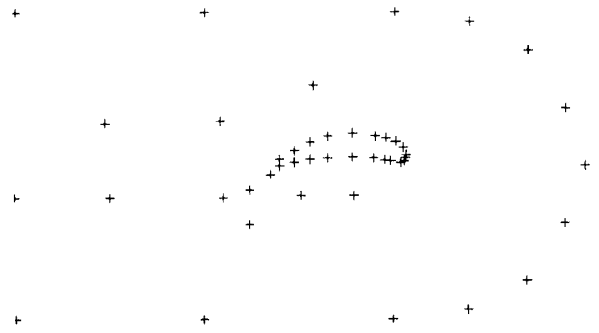
この場合，等高線はかなりガタガタした折線になる。もっと滑らかな線をひきたい時には，適当な曲面で内挿するか，折線を平滑化するような曲線をひけばよい。Delaunay網をもちいることによる利点は次のようなものである。

(a) どのような点の分布に対しても一意的に決定される三角形のみで構成されるネットワークを決定する。

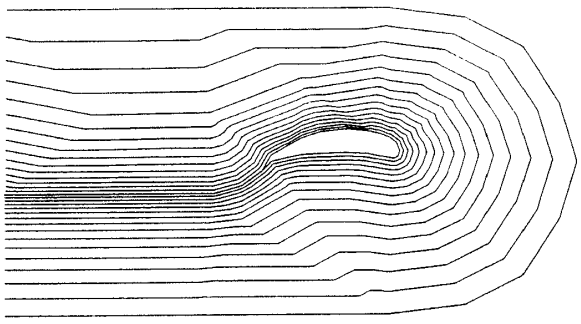
(b) 最近接の点間は必ず結ばれる。

(c) 構造が簡単で，明確であるので，Voronoi 分割によって点間の関係が整理される。

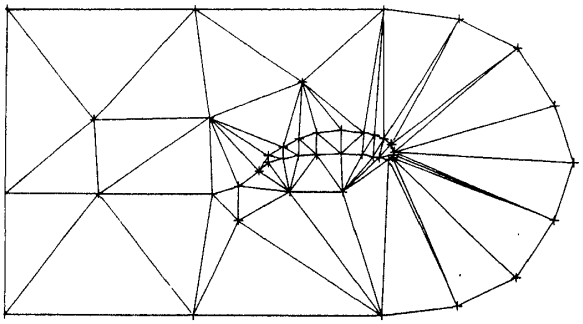
(d) 採用したアルゴリズムでは(c)の構造を利用することによって計算時間が高々$O(N^{\frac{3}{2}})$となり，Nが大のときに有利である。



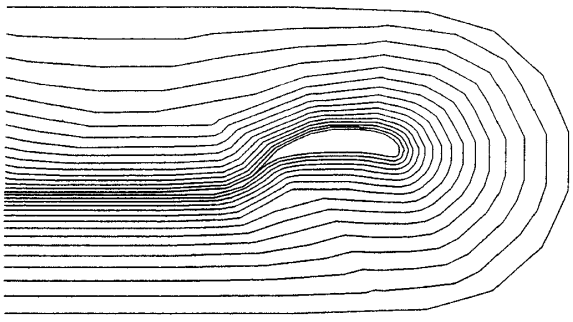
(a) 翼型周りのC型格子に対する初期データ



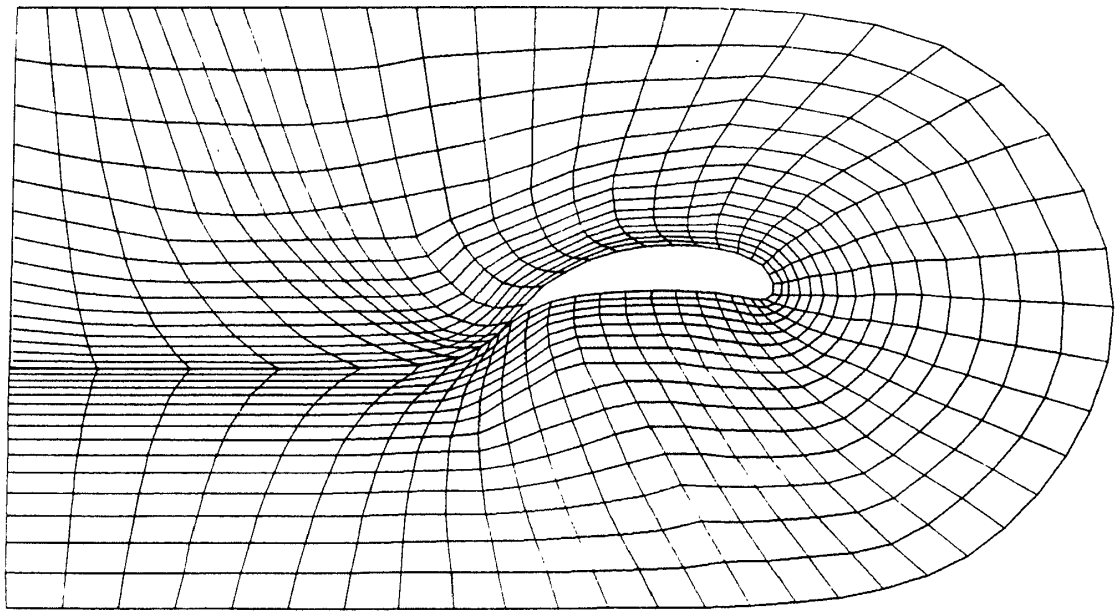
(b) DELAUNAY網



(c) 等高線



(d) 平滑化された等高線



(e) 完成したC型格子

図6 VORONOI分割を用いたC型格子の生成

図6，7にこの方法で生成した格子の例を示す。図6 aは翼断面状の物体回りのC型格子に対する初期データ，図6 bはそれに対して決定されるDelaunay網，図6 cは三角形内を平面で内挿した時の等高線，図6 dはそれを各線分の中点を取ることにより平滑化したもの，図6 eは完成した格子である。秋間法の所で述べたのと同様の方法で座標線を物体近くに集中させている。

図7は同様にして生成した河状の流路内の格子である。等ξ線は$\eta=0$と$\eta=1$で等η線を分割し，その間では分割する長さの比率を内挿して分割した点より決定している。図6 a，bに見られるように，形状の制御のための補助点が領域内に設けてある。この点でのηの値を変えることにより，局部的に座標線を集中することができる。また前の秋間法によるものとは違って，孤立した補助点を与えることができる。

3次元の場合Delaunay網を用いることにより，任意に配置したデータ点に対する等高面が求められる。これを利用して3次元の任意形状の物体周りの格子生成が可能だと思われるが，等高面上の点の順序付け等の問題がある。

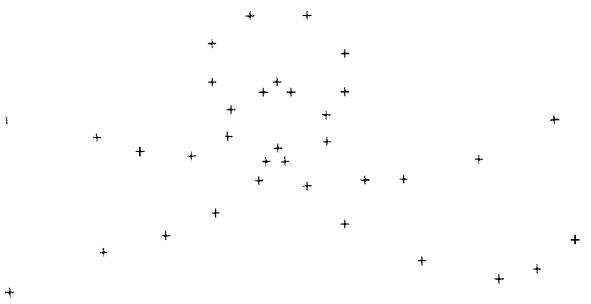
4. Voronoi 分割のアルゴリズム

ここではGreen[6]らによる再帰的方法の改良版を用いている。N個の粒子P_i（$1 \leqq i \leqq N$）に対してVoronoi分割が既になされているとする。ここに$N+1$個目の粒子P_{N+1}を加えた時，分割がどう変化するかを考える。これを次のような手順で行う（図5の一点鎖線）。

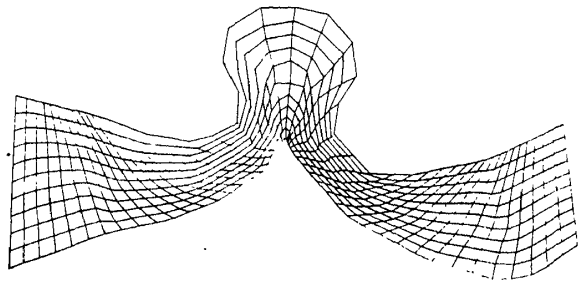
(1) 各P_iに対して，各々のVoronoi多角形の辺とそれを挟んで隣合っている粒子を，反時計方向の環状リストとして記録しておく。

(2) P_{N+1}がどのT_iに属しているかを調べる。このためにはP_{N+1}の最近接点を捜せば良い。これをP_aとする。

(3) P_{N+1}とP_aを結ぶ線分の垂直二等分線をひく。これをP_{N+1}から見て反時計方向に延長したものが，P_aの多角形の辺と交わる点を求める。そして，この辺を挟んでP_aと隣合っている粒子をP_aとする。（この交点は三角形$P_{N+1}P_aP_b$の外心にあたる）



(a) 初期データ



(b) 完成した格子

図7 VORONOI分割を用いた河状の流路内の格子生成

(4) 垂直二等分線によってP_{N+1}とP_aの繩張が分割されるので，これとP_aの多角形の辺の交わる点を求め多角形を修正する。

(5) 次にP_bに対してP_aに対したのと同様に(3)，(4)の操作を行う。これを一周回り終えるまで繰返す。これによってPのVoronoi多角形が決定され，Pの辺と隣合う点のリストを記録しておく。

上の作業を各々の粒子に対して順に行うことによってVoronoi分割が完成する。

Greenらの方法では粒子の存在する場所を限定するWindowが存在し，境界の外側に粒子の鏡像の仮想点を置くことによって境界を表わしている。我々の方法ではWindowや境界は存在せず，粒子はどこにあっても良い。粒子の数が多い時に内側の粒子に対しては(1)～(5)がそのまま使えるが，粒子が少ない時や，外側の粒子に対しては修正が必要である。それはP_iの繩張T_iが閉じていない場合があり，その時には(3)で求める交点が存在しない事がある。そのときには始めの最近接点に戻り，今度は時計回りに閉じていない領域に出会うまで(3)，(4)のような操作を続ければよい。

Voronoi多角形は平均約6角形であり，これは粒

子の数に依存しない。よって(3)から(5)の粒子一個当りの計算量はほぼ同じ程度であり，全体では$O(N)$である。一方(2)は通常$O(N^2)$であるが，次のようにして高々$O(N^{\frac{3}{2}})$とすることができる。まず最近接点の候補として適当な点を選ぶ。次に，この点に隣合っている点の中に，よりPに近いものがあるかを調べる。もし有れば，これを次の候補として繰返し，無ければ，始めの点が最近接点である。始めの候補点として，必ず近い点が選べれば，全体で$O(N)$とすることができる。そのような点が選べない場合でも$O(N^{\frac{3}{2}})$となり中心付近に最初の候補点を選べば速く捜すことができる。

格子生成に等高線を用いる時や，XYプロッタを用いて等高線を描く場合には，等高線を一本のつながった線として計算する必要がある。その場合にもVoronoi分割の構造を利用して隣の点がすぐ分かるので，容易に，速く計算することができる。

参 考 文 献

1) "Numerical Grid Generation Techniques", NASA Conference Publication 2166 (1980).
2) F.C. Tames, J.F. Thompson, C.W. Mastin and R.L. Walker: "Numerical Solution for Viscous and Potential Flow about Arbitrary Two-Dimensional Bodies Using Body-Fitted Coordinate Systems", J. Comp. Phys., 24 (1977), 274.
3) L.E. Eriksson: "Generation of Boundary-Conforming Grids Around Wing-Body Configuration Using Transfinite Interpolation", AIAA J., 20 (1982).
   P.R. Eiseman and R.E. Smith: "Mesh Generation Using Algebraic Technique" quoted in Reference 1.
4) H. Akima: "A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedure", J. Assoc. Comp. Mac., 17 (1970), 589.
   H. Akima: "Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting Based on Local Procedure", Comm. of ACM, 17, No. 1 (1974), 26.
5) A. Jameson and T.J. Baker: "Solution of Euler Equation for Complex Configurations", AIAA Paper 83-1929.
6) P.J. Green and R. Sibson: "Computing Dirichlet Tessellations in the Plane", The Computer J., 21 (1978), 168.