

## 高レイノルズ数遷音速流翼型解析

河合伸坦\* 廣瀬直喜\*

Analysis of High Reynolds Number Transonic  
Flow around an Airfoil

Nobuhiro KAWAI and Naoki HIROSE

## ABSTRACT

High Reynolds number transonic flow around an airfoil is numerically analyzed. The implicit approximate factorization scheme is used for the Navier-Stokes equations with an algebraic eddy viscosity model of the turbulent boundary layer. The boundary conditions on the airfoil and along the wake cut are implicitly handled. Computed results of short bubble and shock-induced separation are demonstrated.

Inviscid transonic flow around an airfoil is also numerically analyzed. The diagonal form of the implicit approximate factorization scheme is used for computational efficiency. Some of the results are compared with those of potential flow calculations.

## 1. まえがき

ポテンシャル流と境界層を干渉させる数値計算法<sup>1)</sup>には適用に限界があり、特に off design の剝離の大きな場合には計算が困難になる。そこで Navier-Stokes 方程式を直接に数値解析する手法に期待が寄せられる。ここでは NS 式の解法としては、Beam & Warming<sup>2)</sup>、Steger<sup>3)</sup> の IAF 法を基礎として改良を加えた Beam & Warming<sup>4)</sup>、Thomas<sup>5)</sup>、河合と廣瀬<sup>6)</sup> の解法を用いる。乱流モデルとしては、Baldwin & Lomax<sup>7)</sup> の代数乱流モデルを用いる。

また Euler 方程式の数値解法としては、Pulliam & Chaussee<sup>8)</sup>、河合<sup>9)</sup> の対角化 IAF 法を用いる。両解法を通じて格子は廣瀬と河合ほか<sup>10)</sup> の格子形成プログラム AFMESH を用いて作る。

## 2. NS 式の数値解法

一般の曲線座標系における保存形の NS 式は

$$\partial_i \hat{q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} = \frac{1}{Re} (\partial_\xi \hat{R} + \partial_\eta \hat{S}) \quad (1)$$

である。ただし

$$\hat{q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{bmatrix} \quad (2)$$

そして

$$\begin{cases} U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \end{cases} \quad (3)$$

は反変速度である。粘性項については chain rule を用いて、

\* 航空宇宙技術研究所

$$\widehat{R} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{R}_2 \\ \widetilde{R}_3 \\ \widetilde{R}_4 \end{bmatrix}, \quad \widehat{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{S}_2 \\ \widetilde{S}_3 \\ \widetilde{S}_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。ただし

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_2 &= \mu \left( \frac{4}{3} \xi_x^2 + \xi_y^2 \right) u_\xi + \frac{1}{3} \mu \xi_x \xi_y v_\xi \\ &\quad + \mu \left( \frac{4}{3} \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) u_\eta \\ &\quad + \mu \left( -\frac{2}{3} \xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x \right) v_\eta, \\ \widetilde{R}_3 &= \frac{1}{3} \mu \xi_x \xi_y u_\xi + \mu \left( \xi_x^2 + \frac{4}{3} \xi_y^2 \right) v_\xi \\ &\quad + \mu \left( \xi_x \eta_y - \frac{2}{3} \xi_y \eta_x \right) u_\eta \\ &\quad + \mu \left( \xi_x \eta_x + \frac{4}{3} \xi_y \eta_y \right) v_\eta, \\ \widetilde{R}_4 &= \widetilde{R}_2 u + \widetilde{R}_3 v + \frac{\mu}{P_r(\gamma-1)} \\ &\quad \times \left[ (\xi_x^2 + \xi_y^2) \partial_\xi a^2 + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \partial_\eta a^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_2 &= \mu \left( \frac{4}{3} \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) u_\xi \\ &\quad + \mu \left( \xi_x \eta_y - \frac{2}{3} \xi_y \eta_x \right) v_\xi + \mu \left( \frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2 \right) u_\eta \\ &\quad + \frac{1}{3} \mu \eta_x \eta_y v_\eta, \\ \widetilde{S}_3 &= \mu \left( -\frac{2}{3} \xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x \right) u_\xi \\ &\quad + \mu \left( \xi_x \eta_x + \frac{4}{3} \xi_y \eta_y \right) v_\xi + \frac{1}{3} \mu \eta_x \eta_y u_\eta \\ &\quad + \left( \eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2 \right) v_\eta, \\ \widetilde{S}_4 &= \widetilde{S}_2 u + \widetilde{S}_3 v + \frac{\mu}{P_r(\gamma-1)} \\ &\quad \times \left[ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \partial_\xi a^2 + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \partial_\eta a^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

なお圧力  $p$  と音速  $a$  は次式で与えられる。

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right],$$

$$a^2 = \gamma(\gamma - 1) \left[ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (7)$$

ヤコビ行列を

$$\widehat{A} = \frac{\partial \widehat{E}}{\partial \widehat{q}}, \quad \widehat{B} = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{q}} \quad (8)$$

$$\widehat{N} = \frac{\partial \widehat{R}}{\partial \widehat{q}}, \quad \widehat{M} = \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}} \quad (9)$$

とおくと、IAF法は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \left( I + \Delta t \partial_\xi \widehat{A} - \frac{\Delta t}{Re} \partial_\xi \widehat{N} - \varepsilon_I J^{-1} \nabla_\xi \Delta_\xi J \right) \\ & \times \left( I + \Delta t \partial_\eta \widehat{B} - \frac{\Delta t}{Re} \partial_\eta \widehat{M} - \varepsilon_I J^{-1} \nabla_\eta \Delta_\eta J \right) \Delta \widehat{q} \\ & = -\Delta t (\partial_\xi \widehat{E} + \partial_\eta \widehat{F}) + \frac{\Delta t}{Re} (\partial_\xi \widehat{R} + \partial_\eta \widehat{S}) \\ & \quad - \varepsilon_E J^{-1} \left[ (\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2 \right] J \widehat{q} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで  $\widehat{N}$ ,  $\widehat{M}$  の cross derivative 項は無視する。また  $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_E$  は smoothing 係数であり、 $O(\Delta t)$  である。また  $j$ ,  $k$  をそれぞれ  $\xi$ ,  $\eta$  方向の格子番号とすると、 $\nabla_\xi f_{jk} = f_{jk} - f_{j-1,k}$ ,  $\Delta_\xi f_{jk} = f_{j+1,k} - f_{jk}$ ,  $\nabla_\eta f_{jk} = f_{jk} - f_{j,k-1}$ ,  $\Delta_\eta f_{jk} = f_{j,k+1} - f_{jk}$  と差分記号が定義される。

以上の項を全て含むものを完全な NS 式と呼ぶ。薄層近似では  $\widehat{N}$ ,  $\widehat{R}$  の項および  $\widehat{M}$ ,  $\widehat{S}$  の cross derivative 項を無視する。(10)式を解くには、まず翼型格子形成プログラム AFMESH<sup>10)</sup> によって C 型物体適合格子を作る。(10)式の右辺を計算し、左辺は 2 重のブロック 3 対角行列を構成するから、その方程式を解き、定常解に収束するまで計算を繰り返す。

境界条件としては、遠方境界では一様流の値を与える。翼面上の境界では非滑り条件  $u=v=0$  と断熱条件  $\partial a^2 / \partial \eta = 0$  を連続の式とエネルギーの式と連立させ、ブロック 3 対角行列の一部を構成させて陰的に解く。wake cut 境界では  $\eta$  方向の計算をする時に、上下面を 1 つにつなげた形のブロック 3 対角行列を構成して陰的に解く。

### 3. Euler 式の数値解法

ここでは IAF 法による Euler 方程式の数値解法を紹介しよう。(10)式から粘性項と smoothing 項を取りはずすと、

$$(I + \Delta t \partial_\xi \hat{A})(I + \Delta t \partial_\eta \hat{B}) \Delta \hat{q} = R \quad (11a)$$

$$R = -\Delta t (\partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F}) \quad (11b)$$

となる。行列  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  は

$$\hat{A} = T_\xi A_\xi T_\xi^{-1}, \quad \hat{B} = T_\eta A_\eta T_\eta^{-1} \quad (12)$$

と対角化できる。ただし  $A_\xi$ ,  $A_\eta$  は対角行列である。

(12)式を(11a)式に代入すると、

$$(I + \Delta t \partial_\xi T_\xi A_\xi T_\xi^{-1})(I + \Delta t \partial_\eta T_\eta A_\eta T_\eta^{-1}) \times \Delta \hat{q} = R \quad (13)$$

演算の順序を変更すると、

$$(I + \Delta t T_\xi \partial_\xi A_\xi T_\xi^{-1})(I + \Delta t T_\eta \partial_\eta A_\eta T_\eta^{-1}) \times \Delta \hat{q} = R \quad (14)$$

この変更は1次精度の誤差を伴う。(14)式から

$$T_\xi (I + \Delta t \partial_\xi A_\xi) N (I + \Delta t \partial_\eta A_\eta) T_\eta^{-1} \Delta \hat{q} = R \quad (15)$$

ただし

$$N = T_\xi^{-1} T_\eta, \quad N^{-1} = T_\eta^{-1} T_\xi \quad (16)$$

(15)式, (11b)式に smoothing 項を付け直すと、

$$T_\xi (I + \Delta t \partial_\xi A_\xi - \varepsilon_I J^{-1} \nabla_\xi A_\xi J) N \times (I + \Delta t \partial_\eta A_\eta - \varepsilon_I J^{-1} \nabla_\eta A_\eta J) T_\eta^{-1} \Delta \hat{q} = -\Delta t (\partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F}) - \varepsilon_E J^{-1} \{ (\nabla_\xi A_\xi)^2 + (\nabla_\eta A_\eta)^2 \} J \hat{q} \quad (17)$$

となる。これが対角化 IAF 法を表わす式である。

(17)式を解くには、まず右辺を計算し、次に行列  $T_\xi^{-1}$  を左側からかける。次に第1カッコの4個のスカラー-3項方程式を解く。次に行列  $N^{-1}$  を左側からかけ、次に第2カッコの4個のスカラー-3項方程式を解く。最後に行列  $T_\eta$  を左側からかけると  $\Delta \hat{q}$  が求まる。

境界条件については、遠方境界と遠方下流境界では NS 式の場合と同じである。翼面境界では、速度が翼に接する条件、即ち反変速度成分  $V=0$  とおく。圧力については、翼に垂直な運動量の式から

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = -\rho U (\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \quad (18)$$

と境界条件が求まる。ただし特に翼面上で格子が直交する場合には(18)式の第1カッコ内=0である。なお密度  $\rho$  については1次外挿する。wake cut 境界では、4成分すべてについて  $\eta$  方向に上下面から4点内挿する。

#### 4. NS 式の数値計算結果

ここでは粘性流の計算例を示そう。NS 式の特徴

は剝離を計算できる点にあるから、剝離を伴う流れを中心に示そう。

図1では、厚み比11.8%の対称な Joukowski 翼型、 $M_\infty=0.2$ ,  $\alpha=9^\circ$ ,  $R_N=0.42 \times 10^6$ , 薄層近似式、遷移あり、中心差分だけの条件で計算した結果を示す。前縁近く  $x=0.04 \sim 0.14$  の領域で、摩擦係数  $C_f < 0$  となる部分があり、short bubble が計算され

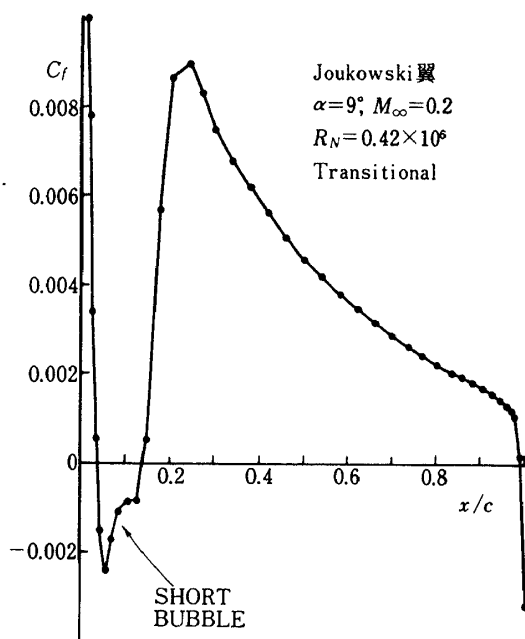


図1 Joukowski 翼の摩擦係数分布

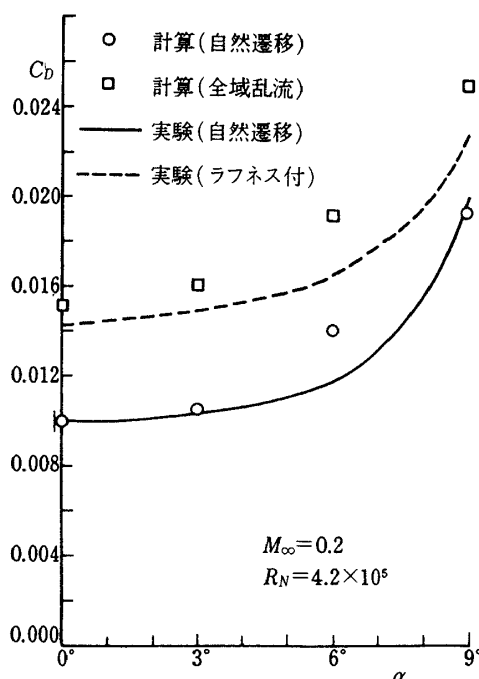
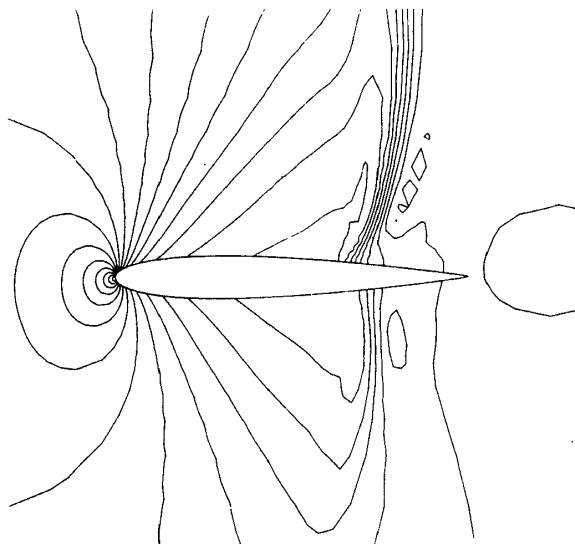


図2 Joukowski 翼の抵抗係数

たことを示す。また LP 出力から渦粘性係数  $\mu_t$  の分布をみると、bubble の途中から遷移していることが確認される。

図 2 では、同じく Joukowski 翼型、 $M_\infty=0.2$ ,  $\alpha=0^\circ\sim 9^\circ$ ,  $R_N=0.42\times 10^6$ , 薄層近似式, 中心差分



```
JMAX = 125 KMAX = 51 KEDGE = 34 IVIS = 3
IUPWND = 1 NSFULL = 0 NCTAL = 3000
FSMACH = 0.85000 ALPHA = 3.00000 RN = .70000+07
CLT = 0.26099 CDT = 0.07016 CMTQC = -0.01347
MAX = 1.10000 MIN = 0.35000 DELT = 0.05000
```

```
CONTOUR FOR PRESSURE DISTRIBUTION
NAVIER-STOKES SOLVER          DATE 93 11-01
NACA 0012 CASE 07 9F124913
```

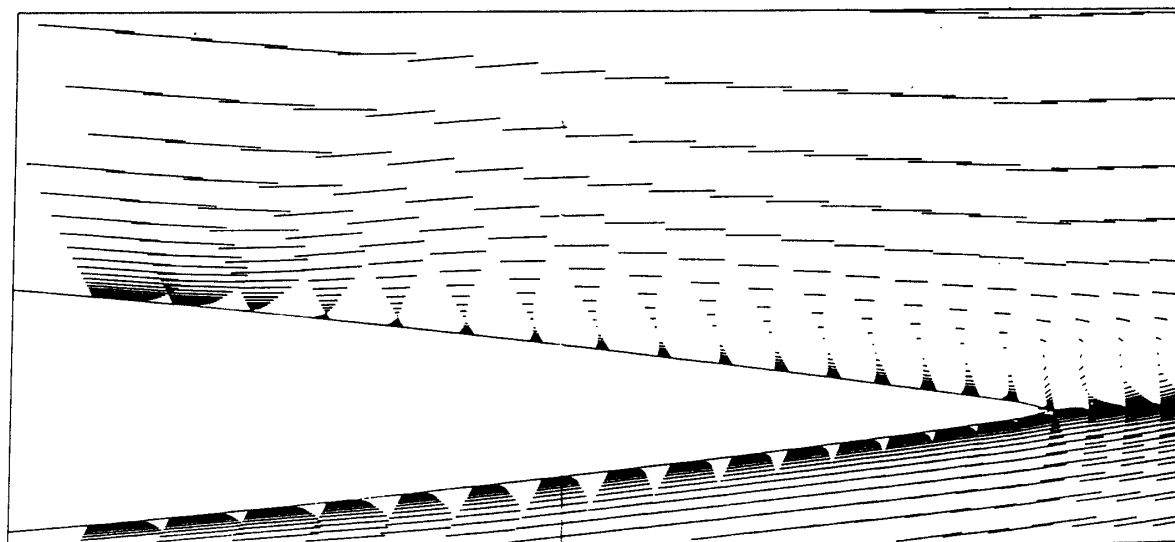
図 3 NACA0012 翼型まわりの等圧線図

だけの条件で計算した結果と風洞壁補正をした実験の結果<sup>11)</sup>との抵抗係数  $C_D$  の比較を示す。下側は自然遷移の場合であり、 $\alpha=6^\circ$  を除き実験と計算は良く一致している。 $\alpha=9^\circ$  の高迎角でも良く一致しているのは、short bubble を的確にとらえているからであると思われる。上側の実験は 5% 翼弦長にラフネスを付けたものであり、計算は全域乱流である。両者の傾向は一致しているが、値の一致はまずまずである。

次に遷音速流の計算例を示そう。図 3 と図 4 では、NACA0012 翼型、 $M_\infty=0.85$ ,  $\alpha=3^\circ$ ,  $R_N=7\times 10^6$ , 薄層近似式, 前縁から乱流, 中心差分と風上差分の混合の条件で計算した結果を示す。図 3 の等圧力線図では、翼上下面の衝撃波をとらえている。図 4 は後縁付近の速度ベクトルを拡大した図である。このベクトル図では上面の衝撃波に誘起された剝離の様子がはっきりとわかる。

### 5. Euler 式の数値計算結果

図 5 には NACA0012 翼型、 $M_\infty=0.75$ ,  $\alpha=2^\circ$ , 中心差分と風上差分の混合の条件において、Euler 方程式による数値解(当プログラム使用, 保存形)とポテンシャル方程式による数値解<sup>1)</sup>(非保存形)との比較を示す。Euler 方程式の解の方が、衝撃波



```
FSMACH= 0.85000 ALPHA= 3.00000 RN= 7000000.
PXMIN= 0.80000 PXMAX= 1.05000
PYMIN= 0.05000 PYMAX= 0.15000
SCALE= 80.00000 UVSCL= 0.02500
```

```
TIME AVERAGED NAVIER-STOKES FLOW
NAVIER-STOKES SOLVER
NACA 0012 CASE 07 9F124913
```

DATE 93-11-04

図 4 NACA0012 翼型まわりの速度ベクトル拡大図

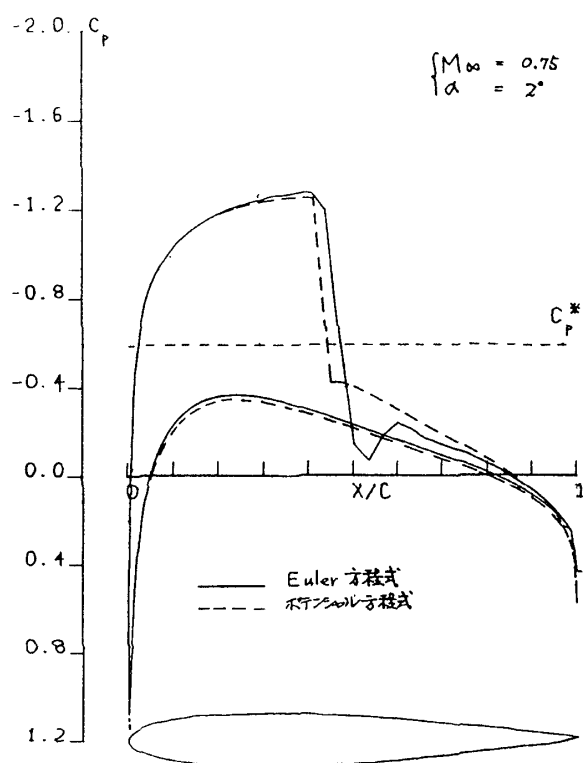


図5 圧力係数分布比較図

の位置が後方にあり、衝撃波直後の圧力上昇が高いことがわかる。この原因はおそらく保存形と非保存形の相異に基づくと思われる。その他の場所では良く一致している。

## 6. まとめ

IAF法を改良して高レイノルズ数遷音速流翼型解析した。低速での short bubble や遷音速での衝撃波に誘起された剝離流も計算できる事を示した。低速で対称な Joukowski 翼型では  $\alpha = 0^\circ, 3^\circ, 9^\circ$  のときの自然遷移の抵抗係数に実験との比較で良い一致がみられる一方、精度が不十分なケースもある。

また対角化IAF法を適用して非粘性遷音速流翼型解析した。ポテンシャル方程式の数値解では、衝撃波の位置と衝撃波直後の圧力上昇に相異がみられたが、他の部分では良い一致がみられた。

## 参考文献

1) 河合伸坦, 石黒登美子, 神谷信彦; “二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム”, 航空宇宙技術研究資料, NAL TM-357(1978).

- 2) Beam, R. & Warming, R.F., “An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form,” J. Comp. Phys., Vol. 22 (1976), pp. 87-110.
- 3) Steger, J.L., “Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries,” AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 679-686.
- 4) Beam, R.M. & Warming, R.F., “An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations,” AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 393-402.
- 5) Thomas, P.D., “Boundary Conditions for Implicit Solutions to the Compressible Navier-Stokes Equations in Finite Computational Domains,” AIAA Paper 79-1447.
- 6) 河合伸坦, 廣瀬直喜; “高レイノルズ数遷音速流翼型解析プログラムNSFOILの開発”, 航空宇宙技術研究所報告, TR-816, (1984).
- 7) Baldwin, B. & Lomax, H., “Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows,” AIAA Paper 78-257.
- 8) Pulliam, T.H. & Chaussee, D.S., “A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm,” J. Comp. Phys., Vol. 39 (1981), pp. 347-363.
- 9) 河合伸坦; “対角化IAF解法による非粘性遷音速流翼型解析”, 航空宇宙技術研究所報告, TR-831, (1984).
- 10) 廣瀬直喜, 河合伸坦, 伊沢隆男, 菊池路子; “遷音速翼型解析法のための格子形成コードAFMESHの開発”, 日本航空宇宙学会第13期年会講演会講演集, (1982) pp.158-161.
- 11) Preston, J.H. & Sweeting, N.E., “The Experimental Determination of the Boundary Layer and Wake Characteristics of a Simple Joukowski Aerofoil, with Particular Reference to the Trailing Edge Region,” A.R.C. R & M 1998 (1943).

