

航空宇宙技術研究所特別資料

SPECIAL PUBLICATION OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

SP-4

柔軟宇宙構造物ダイナミクスの定式化について

LSS定式化手法調査チーム

1985年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

L S S 定式化手法調査チーム：

宇 宙 研 究 グ ル ー プ	狼 嘉彰，吉村庄市
	木田 隆，山口 功
三菱電機株式会社中央研究所	土屋和雄，山田克彦

目 次

1. 概 論	1
1.1 問題点と検討項目	1
1.1.1 定式化の対象	2
1.1.2 定式化の手法	3
1.1.3 独立変数の選択	4
1.1.4 結合部の表現法	4
1.1.5 柔軟体の取扱い	5
1.2 各方法の概要	6
1.2.1 定式化手法の概要	6
1.2.2 関連文献の概要	8
1.2.3 ベクトル法と解析力学の比較	10
1.3 今後の展望	16
2. 各 論	16
2.1 Hooker/Margulies, Hooker, Roberson/Wittenburg	16
2.2 Boland/Samin/Willems	18
2.3 Likins	22
2.4 Hooker	27
2.5 Frisch	30
2.6 Ho, Ho/Herber	40
2.7 Bodley/Devers/Park/Frisch (DISCOS)	46
2.8 Jerkovsky	55
2.9 Sunada/Dubowsky	59
2.10 Kane/Levinson, Singh/Likins	72
2.11 関連文献	81
2.11.1 Hurty	81
2.11.2 Guyan	83
2.11.3 Likins	84

柔軟宇宙構造物ダイナミクスの定式化について*

LSS 定式化手法調査チーム

A Survey of Formulation Methods for Multi-Body Dynamics of Large Flexible Space Structures

by

Yoshiaki OHKAMI, Shoichi YOSHIMURA, Takashi KIDA,
Isao YAMAGUCHI, Kazuo TSUCHIYA and Katsuhiko YAMADA

ABSTRACT

Formulation of multibody dynamics is one of the key issues in developing a computer simulation program for analysis of orbital and attitude dynamics of complex spacecraft or large flexible structures. This survey study reviews representative research works on this topic published from the mid sixties to 1983, and rearranges the materials in a systematic manner. Chapter 1 describes the problems and key items included in this study and gives a very brief summary of the surveyed papers and some scope for future study. Chapter 2 consists of eleven sections that are arranged in chronological order and cover the work of Roberson-Wittenburg, Hooker-Margulies, Ho, Frisch, Bodley, Singh and so on. This study concludes that it is important to develop modeling techniques of a system of rigid and flexible bodies in an arbitrary configuration, possibly with closed paths. In addition, modeling of general connecting points (hinges) is to be further pursued, and there is a need for handling capabilities of inequality constraints.

1. 概 論

多様かつ複雑な構造の大型衛星や大規模宇宙構造物 (Large Space Structures) のダイナミクス解析や軌道・姿勢制御系解析を目的とした汎用の計算機シミュレーション・プログラムを開発する上で、複合多体ダイナミクスの定式化は不可欠である。本稿は、1960年代中頃から1983年の間における複合多体システムの定式化に関する代表的研究を調査し、比較・検討した結果をまとめたもので、次の2章から構成される。第1章では、調査検討の項目を考察

し、対象文献を系統的に整理して概要を記述し、今後の課題と展望を述べた。第2章では、各手法を研究者別に詳述した。また、巻末に文献リストを掲げた。

1.1 問題点と検討項目

LSSの定式化問題を複雑にする要因は、主としてシステム・トポロジ、構造の柔軟性および形状変化の三者にあるといわれている¹⁾。トポロジ (topology) はシステムが複雑で多くの結合部を有する多体結合体の幾何的性質を表わす。構造の柔軟性は、各構成体の寸法が大きいため、曲げや捩りなどの変形を生じる特性で、その構造力学的、動力学的な取扱い

* 昭和60年2月5日 受付

極めて重要である。また、軌道上で LSS が構造物の展開・組立てによって、形状・寸法を大きく変化させていく事も考慮せねばならない。以上の要因から、定式化を論ずる場合には、次に述べる諸項目を検討する必要がある。

- (1) 定式化の対象の選択－複雑さの許容範囲－
- (2) 定式化手法の選択－ダイナミックスの取扱い－
- (3) 独立変数の選択－キネマティックスの取扱い－
- (4) 結合部の表現法－ヒンジ力、トルクの取扱い－
- (5) 構造解析とのインタフェース－柔軟体の取扱い－

これまでも、定式化についてのサーベイが行なわれているが^{2)~4)}それらは主として(2)項の定式化手法の優劣、とくに、Newton-Euler 法と解析力学との比較に重点を置き、LSS システム定式化全般に関する他の項目については、あまり論じられていない。但し、Strunce¹⁾は、各項目の重要性を指摘し、簡単ではあるが、比較検討を行なっている。

以下の小節において、各項目に関する基本的な問題点を述べる。

1.1.1 定式化の対象

形態のトポロジ、すなわち、チェーン構造、トポロジー木構造、閉ループ構造のいずれかにより、また、各ボディが剛体か柔軟体かによって、対象を 5 段階に分類することが出来る(図 1.1 参照)。この他に、マニピュレータ・アームのモデルに使用される全剛体のチェーン構造もあるが、①の範囲に入るので省略した。

トポロジのみに注目すれば、チェーン及びトポロジー木構造の場合、ダイナミカル方程式の“質量行列”は常に正方かつ正則となり、常に微分方程式は解く事が出来る。全ボディが剛体で、全ヒンジが完全に拘束されている極端な場合でも、システム全体が一剛体として挙動する系として運動を記述できる。通常の衛星、すなわち、中心剛体に付属物(appendage)として剛体または柔軟体が付いた形態では①か②の枠内で十分取り扱いが出来た。しかしながら、複雑な LSS システムでは、任意のボディが柔軟体であるようなトポロジー木構造④が一般的である。なお、剛体運動を仮想的な第 1 ヒンジを想定し、こ

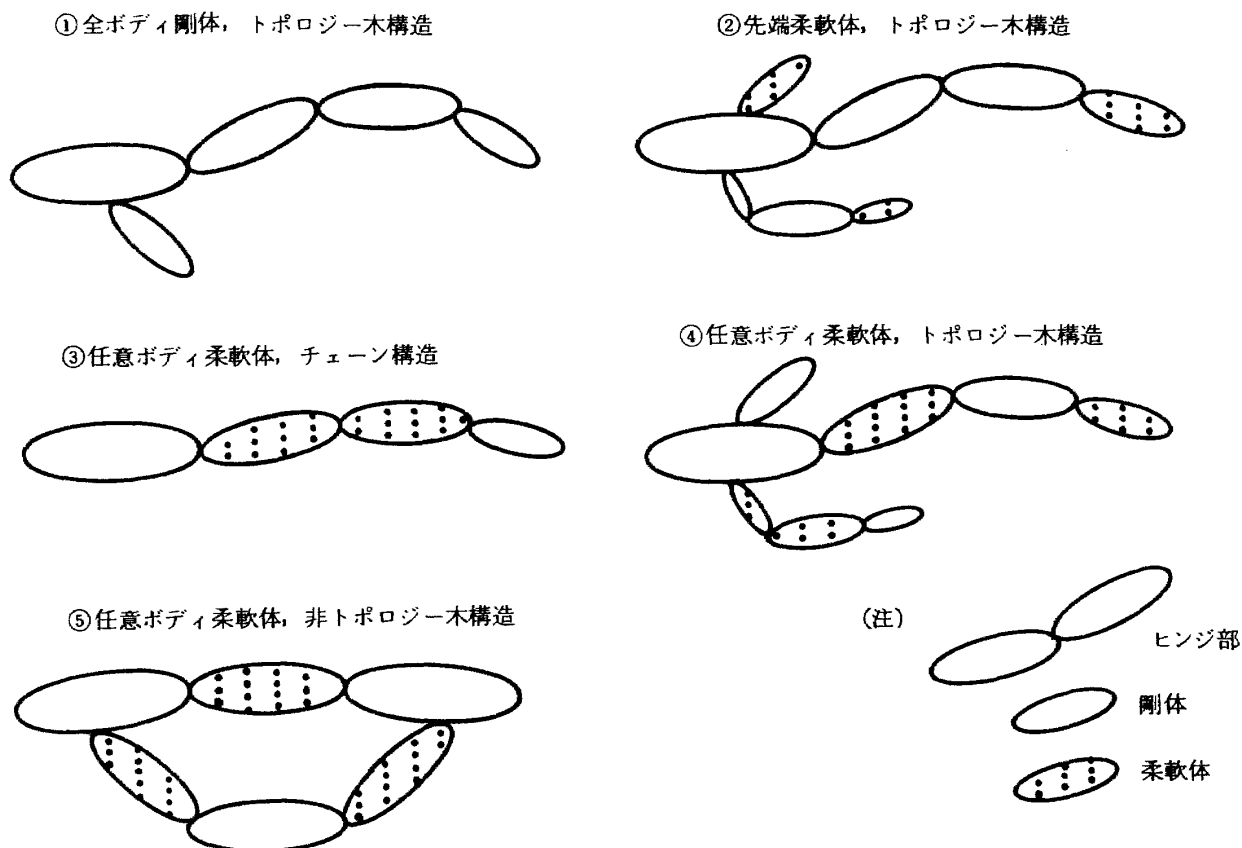


図 1.1 大型宇宙構造物の形態による分類

れに対応させれば、トポロジー木構造におけるボディ数とヒンジ数は常に等しい。トポロジー木構造の特例であるチェーン構造では、ヒンジ番号とそれに結合するボディ番号を一致させ得るため、全系の記述が容易である。一般的なトリー構造では、分岐点で上記の一致性がくずれるために、全系の記述、とくにヒンジ点における内部力や内部トルクの扱いが多少複雑化するが、本質的な困難は生じない。

これに反して、閉ループを含む構造（非トポロジー木構造とも呼ばれる）では、ループ内に含まれるヒンジの拘束条件やボディの柔軟性に依存して全系が静定(determinate)あるいは不静定(indeterminate)になる。また、静定の場合であっても、“質量行列”の行列式がゼロに近づくような illcondition 状態も生じ得る。

1.1.2 定式化の手法—ダイナミクスの取扱い—

力学的側面から運動方程式のたて方を論じる場合、様々の手法や主張があって興味深いが、全ての手法を系統的に分類し、比較・検討することは容易ではない。すでに、Hughes⁵⁾, Likins^{6), 3)}, Williams⁴⁾, Kane & Levinson⁷⁾等によって、このような試みがなされ、文献(8)において概略がまとめられている。主な論点は以下のような項目である。

- (1) ベクトル力学か解析力学によるかの選択
- (2) 真の座標か擬座標かの選択
- (3) D'Alembert の原理を適用するか否かの選択

(1) ベクトル力学は Newton-Euler 方程式に代表される方法で、方程式の導出過程も含めて、物理的な意味が失なわれない利点がある。しかし、ボディが相対的に運動する時には、内部力や内部トルクを消去するのに工夫を要する。

解析力学による方法は、Lagrange 方程式、Hamilton 方程式、Gibbs 方程式に代表されるが、各方程式はそれぞれ異なる特徴を有する。

Lagrange 方程式は、慣性空間に対する速度から構成される Lagrange 関数から導かれる。式の導出は抽象的であるが、内部力の消去は行なう必要がなく、式の導出は機械的に出来る。Hamilton の方

式は、Hamilton 関数と一般化運動量の導入で、1組の2階微分方程式のかわりに2組の1階微分方程式を得る方法である。一般化運動量から系の速度を得る過程が面倒のため、LSSの定式化では殆んど用いられない。Gibbs 方程式は、系の加速度から構成される Gibbs 関数によって運動方程式を導く方法で、上記の方法に比べても更にシステマティックに運動方程式を導くことができるので最近注目されつつある。

この他に Kane 方程式がある。この方法では、系の自由度を表わす一般化速度（スカラー量）を選択し、系の各部の速度を一般化速度とその係数ベクトルであるパーシャル・ベロシティとの積和に分解し、慣性力やヒンジ部に働く力とパーシャル・ベロシティとの内積をとることによって運動方程式を得る。Lagrange 関数や Gibbs 関数のような関数を必要とせず、内部力の消去も自動的に行なわれるので、やはり注目されている手法である。

(2) 真の座標(true coordinate)は系の位置を定めることの出来る変数で、通常、その物理的意義は明確である。真の座標の時間微分を運動方程式の変数として用いた場合、その定式化の過程において、多くの三角関数を扱うことになり、面倒な計算を強いられる。しかし、キネマティカル微分方程式により変数の時間微分から変位を求める過程は簡単である。

一方、擬座標(quasi-coordinate⁺)は、その時間微分に意味があって、それ自身は系の位置を定めることが出来ない。したがって、擬座標の時間微分と変位の時間微分を関係づけるキネマティカルな微分方程式はかなり複雑な形となる。しかしながら、擬座標を運動方程式の変数に用いると、定式化に三角関数を含まないように出来るので、導出は簡略化できる利点がある。

(3) D'Alembert の原理は、慣性力の概念を導入して全系に働く力とモーメントのつり合いを考え、これによって、動力学の問題を静力学でおきかえるものである。この原理は、Newton-Euler の方程式はもとより、解析力学の手法にも適用できる。

注) quasi-coordinates は他にも様々な呼び方がある。例えば、ignorable-, absent-, cyclic-, kinematical-, speed-, kinothenic variable と関連があり、時間微分は non-holonomic velocity と呼ばれる。

以上の選択枝から実用上有効でない場合を除いても、10通り程度の手法が残る。どの方法が LSS 定式化に最適かという点についても、今なお意見が分かっている。Strunce¹⁾ は、内部力・内部トルクを取扱いが容易である点から解析力学の手法が今後の主流になると主張している。一方、Likins³⁾ は、解析力学の様々な手法をいくつかの例に適用して見た結果、Newton-Euler法に優る長所は特に見出せないとしている（詳細は 1.2.3 参照）。また、Kane⁷⁾ は 2.10 で詳述されている彼自身の手法が“最終的方法”であると主張している。

この項で触れた定式化手法は重要な検討課題であることに違いないが、LSS 定式化の諸問題の一部分に過ぎず、先に述べた他の検討項目との関連も考慮して評価すべきである。

1.1.3 独立変数の選択

各ボディの運動を記述する変数のとり方は大別して二通りある。一つは、絶対座標 (absolute coordinate) による記述で、各ボディを独立に扱い、剛体運動を表わす変位・速度は、すべて慣性空間に固定した座標系で規定される（図 1.2 参照）。もう一つの方法は、相対座標 (relative coordinate) による記述で、あるボディを基準として選定し、その基準ボディのみは慣性空間固定座標で規定されるが、その他のボディは基準ボディから出発して、相隣り合うボディとの相対的な変数で逐次表わしていく方法である（図 1.3 参照）。両者の比較は表 1.1 に示される。

絶対座標を用いる場合は各ボディを独立に扱うので、系全体の形状変化（ボディの付加・除去）に対応がしやすく、各ボディの表現が簡単であるという理由から、LSS 系の記述には適当である。しかし、その代償として、結合部分の相対変位や相対速度等をキネマティカルな関係式から別途求める必要がある。さらに、結合部分（後節参照）の拘束が多い場合、拘束条件式がその分だけ多くなり、扱うべきキネマティカルな関係式が増加する、という欠点を免がれない。言葉を替えれば、ダイナミクスの定式化を簡略化し、キネマティクスの複雑さにしわ寄せをするやり方である。

各ボディの弾性変形を表わすモード座標は、通常、

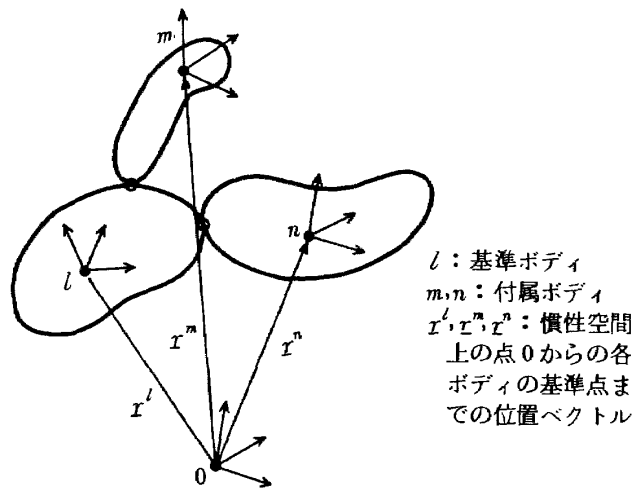


図 1.2 絶対座標系

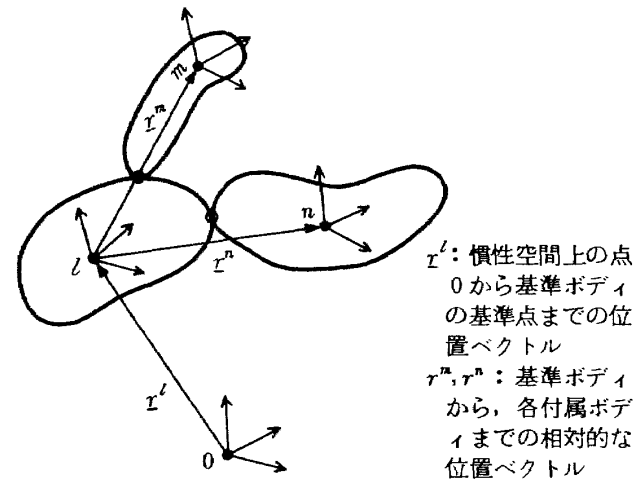


図 1.3 相対座標系

ボディの基準位置に固定した座標系から相対的に定義される。

1.1.4 結合部の表現法

ボディとボディの結合部を一般的にヒンジ部と呼ぶ。ヒンジ部のモデル化は重要な課題の一つである。ヒンジ部の自由度は完全フリーの場合に最大値 6 をとり、拘束が増すにつれて自由度が減り、いわゆるライン・ヒンジの場合に自由度は 1 となる。ヒンジの自由度が減った場合、対応する変数について解く必要はないが、そのかわりに拘束力や拘束トルクが未知数として残る。これらの拘束力を運動方程式の中から消去する事が定式化の手法のポイントとなる。

拘束にはカイネティックな (kinetic) 拘束とキネマティックな (kinematic) 拘束がある。前者は拘束条件式自体が運動方程式で与えられるものであり、

表 1.1 絶対座標系と相対座標系の比較について

	絶 対 座 標 系	相 対 座 標 系
表 現 法	<ul style="list-style-type: none"> • 個々の物体がそれぞれについてモデル化される。 • 個々の物体は剛体として 6 自由度持つほか，柔軟性のモデル化として N 個の一般化座標が必要。 	<ul style="list-style-type: none"> • リファレンス物体がひとつ決められ，そのあと個々のジョイントで非拘束な自由度それぞれに対して相対座標が定義される。 • モデル全体の自由度数は， <ol style="list-style-type: none"> (1) リファレンス物体の剛体としての 6 自由度。 (2) 各ジョイントでの相対的な自由度。 (3) 柔軟性の効果を表わす一般化座標。
長 所	<ul style="list-style-type: none"> • 解析的な簡素さ。 • 多体系の計算機シミュレーションにおいて，物体の付加・除去が簡単にできる。 • 多体系の LSS シミュレーションにそのまま役立つ。 	<ul style="list-style-type: none"> • 最小限度の自由度のみ必要。 • ジョイントで拘束された自由度における拘束力や拘束トルクは消去
短 所	<ul style="list-style-type: none"> • 処理すべき拘束条件式は最大になる。 	<ul style="list-style-type: none"> • 厄介な計算を強いられる。 • LSS の形態が変化した時，修正することが困難。

拘束力や拘束トルクは変位や速度，角度や角速度の関数として与えられるから，特別の扱いは必要としない。

これに対し，キネマティックな拘束，すなわち，変位や速度，角度や角速度の関係式として与えられる場合の取り扱いが面倒である。いわゆるホロノームな拘束ないし Pfaffian 型の単純拘束の場合を除いては，数学的な扱いは困難である。

1.1.5 柔軟体の取り扱い

(1) 基礎方程式

任意の並進・回転運動を行なっている線形弾性体の運動方程式の導出を，連続体モデルを用いて Frisch が行なっている(2.5)。又有限要素モデルを用いて Likins が行なっている(2.11.3)。固定支持点を持つ弾性体の運動方程式との相違は，次の通りである：弾性体のポテンシャルエネルギー表現は，不変である。しかし，カイネティックエネルギー表現に，並進・回転運動と弾性変位の結合項があらわれる。すなわち，弾性体の応力・歪関係を表わす構成方程

式は不変であるが，弾性体の慣性力を表わす項に，並進・回転運動と弾性変位との結合項があらわれる。その結果，最終的に得られた方程式系は，並進・回転運動と弾性変位が線形・非線形に連成した方程式系となる。又，ここで，弾性体を連続体として扱えば，弾性変位に関する方程式は，（無限自由度を持つ）偏微分方程式となる。一方，弾性体を，有限要素として扱えば，対応する方程式は（節点数 $\times 6$ ）個の莫大な自由度を持つ，常微分方程式系となる。

(2) 自由度の縮約

上述の様に，運動方程式は，莫大な自由度を持つ方程式系となる。シミュレーションを行なう場合には，自由度の縮約を行なって，方程式の次数を下げる必要がある。通常，弾性変位を適当な関数系で展開して，有限項で打ち切ることが行なわれている。展開に用いられる関数系としては，適当な微分方程式と境界条件によって定義される固有関数系が用いられる。微分方程式としては，系の並進・回転運動が微小な場合，弾性変位に関する方程式の中で，系の

並進・回転運動を零として導びかれる弾性振動方程式が用いられる。又系の並進・回転運動が定常な基準状態を持つ場合、弾性変位の方程式に、その基準値を代入して得られる振動方程式が用いられる。一方境界条件としては、系の中心部分に近い結合点では、固定境界条件が、又遠い結合点では、自由境界条件が用いられる。この種の境界条件は、系が、中心部に質量の大きい構造物を有するような構成の場合には、適当と考えられる。しかし、系が、均質な構成の場合には、必ずしも適切ではなくなる場合も生じる。このような場合の境界条件について、HurtyとGuyanが検討している(2.11.1, 2.11.2)。Hurtyは次の手法を提案している。今注目している弾性体と他の物体の結合点のそれぞれに、静的変位を与えた時生じる弾性変位を表わす関数系と、結合点を全て固定した場合の弾性振動方程式の固有関数系によって、弾性変位を展開する。この手法は、実用上重要な低周波領域で、可能な自由境界条件と固定境界条件の組合せを少数の展開関数で近似的に表現する巧妙な手法と考えられる。しかし、そのはっきりした数学的検討は今後に残されている。Ho, Sunadaらは、このHurtyの手法を用いて弾性体の挙動を定式化している(2.6, 2.9参照)。

(3) 運動学的非線形項の取扱い

上に述べた様に、運動方程式は、並進・回転運動と弾性変位との非線形結合項を持つ方程式系となる。並進・回転運動が微小の場合は(弾性変位は常に微小であると仮定されている)、これらの量に関して線形化を行なって、並進・回転運動と弾性変位が、線形に連成した方程式系に帰着しうる。通常この種の近似が広く用いられている。しかし、並進・回転運動が微小ではない場合は、並進・回転運動と弾性変位の非線形に連成した方程式系を直接取り扱うことが必要である。この場合、非線形連成項によって、高次振動モードが励起されるので、関数展開は、十分に高次まで展開しておくことが必要である。非線形項が重要になる場合における、打切りの基準については、未だ充分な検討はなされておらず、今後の課題である。並進・回転運動が微小ではない場合の近

似的な取り扱い方がHoによって提案されている(2.6)。まず、弾性変位の項を無視して、剛体系として、系の運動を求める。次に、この解を弾性変位の方程式に代入して、弾性体の挙動を決定する。この近似解法は、系全体の運動が十分にゆっくりしており、弾性振動が共鳴的励起を生じない様な場合に適した摂動法である。Sunadaらも同様の近似的取り扱いを行なっている(2.9)。

1.2 各方法の概要

1.2.1 概 要

本調査研究において調べた代表的手法を系統的に整理し、表1.2に掲げる。配列の順序は、定式化の対象の複雑さに従ったので、必ずしも年代順ではない。1960年代の初期の研究においては、トポロジー木構造を対象とし、全てのボディは剛体であるような系をNewton-Euler法で定式化することが主流であった。また、姿勢制御のみを問題としたこともあって、ヒンジ部の自由度は回転3自由度に限り、拘束力はバリセンタの導入によって消去する方法がとられた。ここで、バリセンタとは、注目するボディの各ヒンジ点に「外部的な」⁺ボディの全質量を集約した時の等価的な質量中心である。一方、拘束トルクは「外部的な」ボディに働く拘束トルクの和をとることにより、作用・反作用の法則で消去され、この和とヒンジ回転方向単位ベクトルとの内積をとることによって残る拘束トルクが消去される。以上のような内部トルクの消去法は、表1.2の1~4, 6, 7で採用されている。

1970年代に開発された定式化手法は、明らかに汎用プログラムの開発を意図したものであり、定式化の対象は、任意のボディが柔軟体であるようなトポロジー木構造(図1.1④)が主流であった。

現段階で最も一般的で、定式化対象の範囲が広いのは8.のBodley等による方法である。この手法ではLagrangeの方法で定式化を行ない、拘束力は未定乗数として扱う(消去はしない)。各ボディの剛体運動は絶対座標で独立に扱われ、しかも非ホロノミック速度と呼ばれる擬座標の時間微分で表現されて

注) 詳細は2.1参照。

表 1.2 LSS 定式化の代表的手法(1965-1983)

研究者名	対象*	手法 ⁺	変数のとり方	ヒンジ部		汎用 プログラ ムの有無
				自由度	拘束力消去 拘束トルク消去	
1 Roberson- Wittenburg (1965) Hooker- Marguries (1965)	① 姿勢 のみ	N-E法	各ボディの絶対角速度	3 回転	バリセンタ ⁺⁺	—
2 Hooker (1966)	① 姿勢 のみ	N-E法	主ボディの角速度 ボディ間の相対角	3 回転	バリセンタ 和/内積 ⁺⁺	あり
3 Ho (1977) (1982)	④	N-E法	主ボディの変位 ボディ間の相対角度 モード座標の時間微分	3 回転	和 和/内積	ALL- FLEX
4 Likins (1974)	②	N-E法	全系の重心変位の # 主ボディの角速度 ボディ間の相対角度 #	3 回転	3と同じ	—
5 Singh (1983) (1984)	③ ④	K 法	全系の重心変位 主ボディの角速度 ボディ間の相対角度 相対変位 モード座標	6	Partial- Velocity ⁺⁺	TREE- TOPS
6 Jerkovsky (1978)	① (⑤)	N-E法	ボディ間の相対速度 相対角速度	6	3と同じ 行列形式で 消去する	—
7 Frisch (1975)	④	N-E法	主ボディの, 変位/回転角 各ボディの, 相対変位/回転角 モード座標	6	3と同じ	NBOD2
8 Bodley (1978)	⑤	L 法	各ボディを独立で扱い 非ホロノミック速度 ⁺⁺ モード座標	6	未定乗数法	DISCOS

*) 解析対象は図 1.1 の①-⑤のとおり。 +) N-E法; Newton-Eulerの方法, L法; Lagrangeの方法
K法; Kaneの方法。 ++) 本文参照。

いるため、形状変化に対応しやすく、閉ループ構造を記述しうる特徴を有する。ただし、この定式化に基づいて開発されたプログラム(DISCOS)はユーザに高度な知識を要求し、大きな負担がかかる。この意味においてプログラムとしての完成度は十分とは言えないだろう。

これに対し、5.のSinghの手法は、対象こそロボ

ジー木構造に限定されているが、Kaneの方法に基づいて、拘束条件を初めからとり入れた定式化を行っているため、極めて効率の良い方法である。これによって開発されたプログラム(TREETOPS)は、構造系とのインタフェースを含めて、完成度が高いと言われている。しかしながら、カイネティックな拘束を少くとも一個所にもたない限り閉ループ

構造の取り扱いが出来ない。

1.2.2 関連文献の概要

本調査に於て、詳しく検討を加えた、研究論文について、その概要をまとめる。

2.1 では Hooker-Margulies, Roberson-Wittenburg および Hooker の 3 論文をまとめて概観する。これらは共にバリセンタという概念を導入し活用した点で共通しており、扱う対象は全て剛体に限られているが、以後の研究にひとつの方向を与えたパイオニア的役割を果たしている。

取扱う対象は、①トポロジー木構造で結合した② n 個の剛体の姿勢運動であり、③各ヒンジは回転自由度（3以下）のみを有するものとする。定式化は各ボディについての Newton-Euler 方程式により、最終式の独立変数として各ボディの角速度 ω を用いている。但し Hooker は後述する理由のために、レファレンス・ボディの角速度 ω_0 （3個）とヒンジ回転角度 r_k （ $r-3$ 個； r は全系の回転自由度）を独立変数として選んでいる。

本節の方式の特色をまとめると；各ボディの回転運動方程式における未知量のうち、①ヒンジ拘束力はバリセンタの導入によって消去されること、またヒンジ拘束トルクは② $3n+n_c$ 次（ n_c は拘束自由度）の拘束式を含めた数値解法によって implicitly に求まること、③拘束トルクを explicitly に除去し、最小次（ r 次）の方程式に帰着できることが示される。

2.2 では Boland らの論文について述べる。本論文で取扱える対象は

- トポロジー木構造およびこれに帰着する閉ループ形状
- 任意のボディが柔軟体かつジャイロ系
- ヒンジは並進、回転 6 自由度

システムの記述はグラフ理論を使用しており、かつバリセンタを用いた拘束力の除去を行なう。定式化は D'Alembert の仮想仕事の原理に基いて行なわれており、独立変数は剛体 6 自由度（全系質量中心の変位 R 、回転 ω ）および各ジョイントの回転／並進 Q^a 、 Z 、弾性変位 p^i である。本論文は、しかしながら、線形化方程式の安定性を論ずることが主目的であり、このために質量行列の対称性を保持するよう

に、回転に関しては別途一般化座標 θ 、 θ^a に変換している。

2.3 では Likins の論文について述べる。本論文で取扱える宇宙船は

- $(n+1)$ 個の剛体
- n 個のライン・ヒンジ（各ヒンジは 1 自由度）
- トポロジー木構造
- 各々の剛体に柔軟付属物、軸対称ロータがあるという制限がある。

宇宙船の運動方程式は、各々のサブストラクチャについて、ニュートンの運動方程式をたてることによって、 $(n+6)$ 個の運動方程式が得られ、独立変数としては、全系の重心位置ベクトル X 、 b_0 の角速度ベクトル ω^0 、ヒンジの回転角 r_1, r_2, \dots, r_n の計 $(n+6)$ 個である。内力は、ブランチごとに、和をとることで消去ができ、内部トルクも同様に和をとり、ヒンジ軸方向との内積を考えることによって、回転が拘束されている方向の内部トルクが消去できる。

2.4 では Hooker の論文について述べる。この定式化法で取扱える対象は

- トポロジー木構造
- 先端のボディは柔軟体
- ヒンジは回転自由度のみを有する

Newton, Euler 方程式を用い未知の拘束力、拘束トルクを消去し、最小次（ $3+r+n_e$ ； r は全回転自由度、 n_e はモード数）の方程式を得る。但し、柔軟体の振動方程式のみは Lagrange 法による。このとき、独立変数は、レファレンスボディの任意点の並進（ p_0 ）、隣接するボディ間の相対角速度（ Q ）およびモード座標（ ξ ）である。拘束力、拘束トルクの消去は以下の 2 つの考え方に基いている。

- 回転運動の式をジョイントまわりで表現することによって、拘束力は回転運動方程式に表われない。
- 回転運動における未知拘束トルク成分は、拘束トルクをジンバル軸方向に射影することにより消去する。

2.5 では Frisch の論文について述べる。Frisch の方法は Newton-Euler 方程式に基づいて汎用プログラム用のアルゴリズムを導いたもので、内力の消去

法などは一般的な手法を用いている。

対象：トポロジー木構造，柔軟体，対称ホイール可

ヒンジ自由度：回転 3 自由度（ヒンジの先のボディが一般のボディのとき）

並進 3 自由度（ヒンジの先のボディが質点のとき）

力学上の原理：Newton-Euler 方程式

内力消去法：あるヒンジ点からそのネステッド・ボディ（ヒンジ点より外側のボディの集合）の運動方程式の和をとることによってヒンジ点以外に働く内力，内トルクを消去。ヒンジ点に働く内力，内トルクの消去は自由度方向の単位ベクトルとの内積をとることによる。

注目点：Newton-Euler 方程式に基づく明快な式の導出，汎用プログラム（N-BOD）

独立変数：プリンシパル・ボディの慣性系に対する変位

プリンシパル・ボディの慣性系に対する回転角

各ヒンジの回転角（ヒンジの先のボディが一般のボディのとき）

各ヒンジの変位（ヒンジの先のボディが質点のとき）

各ボディのモード変位

対称ホイールの回転角

2.6 では Ho の論文について述べる。Ho の方法はダイレクト・パスを導入してシステムの幾何学的関係の記述を容易にしたところに特徴がある。まずトポロジー木構造の剛体に関する運動方程式をダイレクト・パスを用いて導出し，次にそれを柔軟体の場合に拡張している。

対象：トポロジー木構造，剛体（先端のみ柔軟体でも可）

ヒンジ自由度：回転 3 自由度

力学上の原理：Newton-Euler 方程式 (Lagrange 方程式の場合も示してあるが，本質的には Newton-Euler 方程式)

内力消去法：すべてのボディの方程式の和

内トルク消去法：あるヒンジ点から先端側のボディ

ィについての和，このことによってそれ以外のヒンジ点に働く内トルクは式にあらわれない。

注目点：ダイレクト・パス

独立変数：メイン・ボディの変位量

ヒンジ回転角（メイン・ボディの場合はリファレンス・フレームに対する回転角）

モード変位

その他：弾性運動は剛体運動に対する摂動として扱っており，得られる方程式は剛体運動と弾性運動に分離される。弾性運動の影響は剛体運動の方程式に入っていない。

2.7 では Bodley らによって開発された DISCOS プログラムについて述べる。本プログラムは複数個の物体から成る系の動的応答を解析するものである。各物体はどれも剛体であってもよいし，柔軟体であってもよく，物体間のヒンジも，6 自由度の相対運動が許される。また，システム全体は閉ループ構造になっていてもよく，センサやモーメンタム・ホイール，リアクション・ジェットを搭載することも可能である。外力として，重力，重力傾度トルク，太陽輻射圧，熱的勾配，空力抵抗等も考慮できる。

DISCOS プログラムの能力としては，

- (1) 柔軟体（あるいは剛体）の結合体として理想化される全システムの非線型微分方程式の組立ておよび時間領域での解。
- (2) 数値的方法による運動方程式の線型化。
- (3) ノミナル運動まわりでの微小じょう乱運動の時間領域での解。
- (4) 周波数領域での安定性の解析。

DISCOS では，運動をシミュレートするために，まず個々の物体について，非ホロノミックでしかもレオノーマスな拘束を許すように，Lagrange の運動方程式を解いている。柔軟体については，あらかじめそのモード関数を与えなければならない。また，システムの制御に関しては，すべてユーザ側が用意しなければならない。

2.8 では Jerkovsky の論文について述べる。Jerkovsky の方法は運動方程式を拘束のない自由な方向と拘束のある方向に分離することによって未知の拘束力を消去するものである。

対象：トポロジー木構造，剛体

ヒンジ自由度：6 自由度

力学上の原理：Newton-Euler 方程式

内力，内トルクの消去法：運動方程式の分離

注目点：運動方程式を分離するという，いわば数
学的側面にたって拘束力を消去する手法。
得られる式は通常の和+内積による拘束力
消去の場合と変わらないが，式の導出が可
なり機械的に行なわれる。

独立変数：運動方程式の変数を速度にとる場合
と運動量にとる場合の 2 つがある。

2.9 では Sunada らの論文について述べる。Sunada
の方法は柔軟なリンクをもつマニピュレータのモデ
リングに用いられるもので，リンクの弾性運動はノ
ミナルな運動（剛体運動）からの摂動として扱って
いる。

対象：チェーン構造，柔軟体（ただし地上用のマ
ニピュレータが対象でありベース部は固定
されている。）

ヒンジ自由度：回転 1 自由度

力学上の原理：Lagrange 方程式（ただしリンク
単体の運動方程式の導出）

内力消去法：コンパティビリティ・マトリクスの
導入。独立変数だけをとりだして拘束力を
自動的に消去する方法

注目点：マニピュレータ（1 自由度ヒンジ，チェ
ーン構造）の特質をいかした計算の簡略化
コンポーネント・モード・シンセシスの採用。
汎用プログラム化（FLEX-ARM；地上の
マニピュレータ用）

独立変数：（弾性運動に対して）インターフェ
ース座標+正規モード座標
インターフェース座標は Hurty の拘束モー
ドに対するモード変位にあたり，各リンク
間の関係を記述する。正規モード座標は
Hurty の正規モードに対するモード変位で
ある。

2.10 では Kane の方法について述べる。Kane の方
程式は Newton-Euler 方程式や Lagrange 方程式と
同列に論じられるもので，特に多体系のモデリング
に固有のものではない。そこでここでは Kane の方

式を多体系のモデリングに適用した Singh らの論文
を対象に述べる。

対象：チェーン構造，柔軟体

ヒンジ自由度：6 自由度

力学上の原理：Kane の方程式

内力消去法：Kane の方程式では本来内力が方程式
中にあらわれない。

注目点：Kane の方程式の採用

汎用プログラム化

独立変数：システム全体の質量中心の速度

メイン・ボディ（ボディ 1）の角速度

各ボディのモード座標

ヒンジ部の回転角

ヒンジ部の変位量

1.2.3 ベクトル力学と解析力学の比較

(1) 概 要

Likins³⁾は，柔軟な宇宙船の運動をシミュレート
する為のプログラムを作成するに当り，その運動方
程式の導出に要する労力，得られる式の形，数，及
びそれらをプログラム化する際の労力，計算機への
負荷などを勘案して，導出にどの手法を用いるのが
有利かについて比較，評価を行なっている。

運動方程式導出の手法としては，大別して，
Newton-Euler 方程式の様なベクトル力学 (vectorial
mechanics) と，Lagrange 方程式の様な解析力学
(analytical dynamics) とがある。Likins は，
1974 年までの調査により，その当時までに用いられ
ている柔軟宇宙船のシミュレーション・プログラム
のはほとんどが Newton-Euler 方程式に基いていると
述べている。一方では，若干ながらも解析力学によ
る定式化の手法の検討，提案も行なわれて来ている
が，未だ組織だった評価の段階には至っていないと
している。そこで，解析力学の中から幾つかの代表
的な手法を選び出し，その定式化の過程，最終的に
得られる式の形，数などを詳細に解説した上で，幾
つかの剛体系及び剛体-弾性体系のモデルに適用し
て，Newton-Euler 方程式の場合と比較している。

モデルによっては各手法間に多少の優劣の差があ
るとしているが，結論としては，Newton-Euler 方
程式に優る顕著な利点を持った手法はなかったと述
べている。

(2) 解析力学の手法

解説の為に選び出したのは次の8種類の手法である。

- ① Lagrange's form of D'Alembert's principle for independent generalized coordinates
- ② Lagrange's form of D'Alembert's principle for simply constrained systems
- ③ Kane's quasi-coordinate formulation of D'Alembert's principle
- ④ Lagrange's equations for independent generalized coordinates
- ⑤ Lagrange's equations for simply constrained systems
- ⑥ Lagrangian quasi-coordinate equations (or the Boltzmann-Hamel equations)
- ⑦ Hamilton's equations for simply constrained systems
- ⑧ Hamilton's equations for independent generalized coordinates

以上の内、Lagrange's equationsやHamilton's equationsはよく知られており、Kaneについては2.10で詳述されている。一方、Lagrange's form of D'Alembert's principleについてはやや耳馴れないと思われるので、①及び②について多少述べる。

N 個の質点からなる系の運動方程式をD'Alembertの原理により記述すると

$$\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1)$$

となる。ここで、各質点に作用する力 \mathbf{F}_j を

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^e + \mathbf{F}_j^i, \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

として、外力と各質点間に作用する内力とに分ける。

この時、Newtonの第三法則により

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^i = 0 \quad (3)$$

が成立し、(1)式について N 個の和をとると、

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j^e - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) = 0 \quad (4)$$

が得られる。(1)式と共に、(3)、(4)式もD'Alembertの原理と呼ばれる。

(1)式とBernoulliの仮想仕事の原理(Bernoulli's

principle of virtual work)を結合すると、

$$(\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \delta \mathbf{R}_j = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

が得られ、 N 個の和をとると、

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \delta \mathbf{R}_j = 0 \quad (6)$$

となる。

ところで、 q_1, \dots, q_ν を系を十分に記述できる ν 個の一般化座標とすると、各質点の位置 \mathbf{R}_j はそれらの関数として

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j(q_1, \dots, q_\nu, t), \quad j = 1, \dots, N \quad (7)$$

と表現できる。仮想変位(virtual displacement) $\delta \mathbf{R}_j$ を、変分法(calculus of variations)で言う \mathbf{R}_j の変分(variation)と解釈すると、

$$\delta \mathbf{R}_j = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial q_k} \delta q_k, \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

と表現できる。(8)式を(6)式に代入すると、

$$\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (9)$$

が得られる。(9)式も又D'Alembertの原理と呼ばれる。

まず①について述べる。

ν 個の一般化座標 q_1, \dots, q_ν は、系がある拘束の下にある場合、互いに独立ではない。ここで、 m 個のホロノミック拘束条件(holonomic constraints)

$$h_i(q_1, \dots, q_\nu, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

を考える。 m 個の一般化座標が、残りの $\nu - m (=n)$ 個の独立な一般化座標によって記述できたとすると、(7)式は

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j(q_1, \dots, q_m, t), \quad j = 1, \dots, N \quad (11)$$

となり、(9)式も

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (12)$$

となる。ここで、 \mathbf{F}_j を仮想変位に関して仕事をしない拘束力(nonworking constraint forces) \mathbf{f}_j' と、それ以外に分けると、

$$\mathbf{F}_j \triangleq \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j' \quad (13)$$

となり、定義により

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j' \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k} = 0, \quad k=1, \dots, n \quad (14)$$

である。この時、(12)式は

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{f}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k} = 0, \quad k=1, \dots, n \quad (15)$$

となる。次に、一般化力 Q_k , Q_k^* を定義する。

$$Q_k \triangleq \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k} = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k}, \quad k=1, \dots, n \quad (16)$$

$$Q_k^* \triangleq - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{R}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k}, \quad k=1, \dots, n \quad (17)$$

Q_k , Q_k^* はそれぞれ一般化作用力 (generalized active forces), 一般化慣性力 (generalized inertia forces) と呼ばれることがある。(12)式又は(15)式に、(16), (17) 式を代入すると、

$$Q_k + Q_k^* = 0, \quad k=1, \dots, n \quad (18)$$

が得られる。

以上、(12), (15), (18)の各式はいずれも等価であって、それぞれ又は 3 式すべてが Lagrange's form of D'Alembert's principle for independent generalized coordinates と呼ばれる。

一方、

$$\dot{\mathbf{R}} \triangleq \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \quad (19)$$

であるから、

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \triangleq \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}_k} \quad (20)$$

が成立する。従って、一般化力は次の様に記述することもできる。

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}_k} = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k}, \quad k=1, \dots, n \quad (21)$$

$$Q_k^* = - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{R}}_j \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k}, \quad k=1, \dots, n \quad (22)$$

(15)式も又

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{f}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} = 0, \quad k=1, \dots, n \quad (23)$$

とも記述できる。

次に②について述べる。

m 個の非ホロノミック拘束条件 (nonholonomic constraints)

$$\sum_{k=1}^n A_{sk} \dot{\mathbf{q}}_k + B_s = 0, \quad s=1, \dots, m \quad (24)$$

を考える。上式を行列を使って表現すると、

$$A \dot{\mathbf{q}} + B = 0 \quad (25)$$

但し、 $A \triangleq [A_{sk}] : m \times n$ 行列、 $B \triangleq [B_s] : m \times 1$ 行列、 $\dot{\mathbf{q}} \triangleq [\dot{\mathbf{q}}_k] : n \times 1$ 行列、 A, B は一般に q 及び t の関数となる。これは、パフィアン (Pfaffian) 又は単純 (Simple) 拘束条件とも呼ばれる。

独立な一般化座標の数は $n (=n-m)$ であり、(25) 式を分割行列で表わすと、

$$[A^{mn} : A^{mm}] \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ \dot{\mathbf{q}}^c \end{Bmatrix} + [B] = [0] \quad (26)$$

但し、 $\bar{\mathbf{q}} : n \times 1$ 行列、 $\mathbf{q}^c : m \times 1$ 行列となる。これより

$$\begin{aligned} [A^{mm}] \{\dot{\mathbf{q}}^c\} &= -[A^{mn}] \{\dot{\bar{\mathbf{q}}}\} - [B] \\ \{\dot{\mathbf{q}}^c\} &= -[A^{mm}]^{-1} [A^{mn}] \{\dot{\bar{\mathbf{q}}}\} - [A^{mm}]^{-1} [B] \end{aligned} \quad (27)$$

を得る。一方、

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \bar{\mathbf{q}}^T} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}^{cT}} \dot{\mathbf{q}}^c + \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial t}$$

であり、(27) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_j &= \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \bar{\mathbf{q}}^T} \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}^{cT}} (A^{mm-1} A^{mn} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + A^{mm-1} B) + \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \bar{\mathbf{q}}^T} - \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}^{cT}} A^{mm-1} A^{mn} \right) \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \left(- \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial \mathbf{q}^{cT}} A^{mm-1} B + \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

を得、 $\dot{\mathbf{R}}_j$ は n 個の独立な一般化速度の一次結合で記述できた。(28) 式を、ベクトル \mathbf{V}_k^j , \mathbf{V}_t^j を用いて書変えると、

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k^j \dot{q}_k + \mathbf{V}_t^j \quad (29-a)$$

但し, $\mathbf{V}_k^j, \mathbf{V}_t^j$ は一般に q_1, \dots, q_n, t の関数となる。(29-a)式と(19)式とを比較すると, この非ホロノミックな系の \mathbf{V}_k^j はホロノミックな系の $\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial q_k}$ ($= \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}_j}{\partial \dot{q}_k}$) に相当していることがわかり, \mathbf{V}_t^j と $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$ にも同様のことが言える。

n 個のベクトル \mathbf{V}_k^j は独立であり, (23)式と同様に

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{f}_j - m_j \ddot{\mathbf{R}}_j) \cdot \mathbf{V}_k^j = 0, \quad k=1, \dots, n \quad (30-a)$$

が得られる。前述の如く \mathbf{V}_k^j は q_1, \dots, q_n, t の関数であるから, (30-a)式だけでは式の数が必要となり, 拘束式(24)又は(25)も必要となる。

(30-a)式は質点系では便利な形をしているが, 剛体や可撓連続体 (deformable continua) を含む系では扱いにくい。そこで, 各点の慣性速度 (inertial velocity) の一般的記述 $\dot{\mathbf{R}}$ から出発して, (29-a)式導出と同様にして \mathbf{V}_k を定義すると

$$\dot{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k \dot{q}_k + \mathbf{V}_t \quad (29-b)$$

が得られる。従って, (30-a)式は, 各連続体毎に,

$$\int \mathbf{V}_k \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}} dm) = 0 \quad (30-b)$$

を加えることで一般化される。

(30-a), (30-b) 式が, Lagrange's form of D'Alembert's principle for simply constrained systems と呼ばれる。この一連の導出は Kane⁹⁾ による。

(3) 各手法の具体的モデルへの適用と比較

適用の対象となったモデルを表 1.3 に示す。以下順次, 各モデルへの適用手法とその比較について若干述べる。

A-1 Single rigid body

この極めて単純なモデルには, N-E (Newton-Euler) 手法と 1.2.3-2 で掲げた①, ③, ④, ⑥, ⑧の各手法が適用された。比較の結果, N-E 手法が,

◦ 数値積分の効率性 ◦ 定式化の容易さ
の観点から最善 (best) としている。

A-2 Rigid body with simple nonholonomic constraints

ここでは, 図 1.4 に示す様な, 粗い平面上を滑らずに回転していく均質な球が対象とされた。適用された手法は, N-E 手法と, 1.2.3-2 で掲げた②, ③, ⑤, ⑥, ⑦である。比較の結果, ③即ち, Kane's quasi-coordinate formulation が

◦ 式の数が多い
点で好ましい (favored) としている。

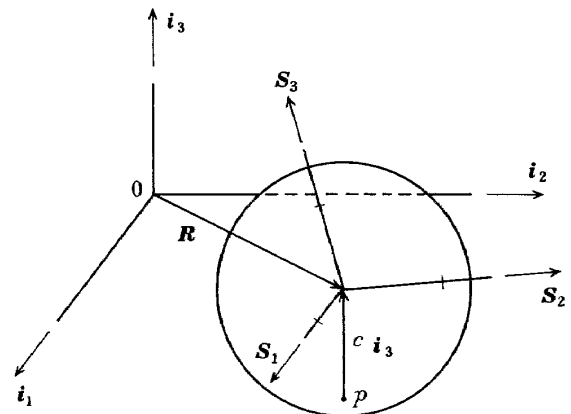


図 1.4 滑らずに平面上を回転する球

A-3 Symmetric three-body system with small deformations

ここでは, 図 1.5 に示す様な, 線形弾性ヒンジ (linearly elastic hinges) で点結合された 3 つの剛

表 1.3 各手法の適用対象モデル

A. Multiple-Rigid-Body System Models

- 1. Single rigid body
- 2. Rigid body with simple nonholonomic constraints
- 3. Symmetric three-body system with small deformations
- 4. Point-connected rigid-bodies in a topological tree

B. Rigid-Elastic Body System Models

- 1. Single elastic body with small deformations
- 2. Interconnected rigid bodies and elastic bodies

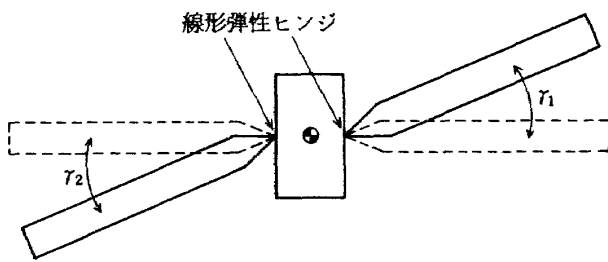


図 1.5 対称な 3 剛体モデル
(線形弾性ヒンジによる点結合)

体系が対象とされた。点線で示された静止状態からずれると相互に内部トルクが作用する。外部力及び外部トルクが作用せず、変形角度 γ_1, γ_2 及びその角速度が微小 (small) との仮定の下での自由振動問題として扱われた。

手法③と⑥とによって詳細な式が求められ、N-E 手法については Likins¹⁰⁾ の結果が参照され、④と⑦、⑧については簡単な検討が行なわれた。

③及び⑥、即ち擬座標 (quasi-coordinate) を用いた Kane, Lagrange の定式化と N-E 手法とでは全く同じ式が得られること、④、即ち Lagrange の一般化座標による定式化では式が複雑になること、⑧、即ち Hamilton の正準方程式による定式化では厄介な逆行列の計算が含まれること、などを示しており、④及び⑧については否定的である。しかし、③、⑥、及び N-E 手法については、特にどれが有利かを述べていない。

A-4 Point-connected rigid bodies in a topological tree

ここでは、 n 個の剛体が $n-1$ 個のヒンジで点結合された系、即ち、閉ループを含まないトポロジカル・トリー (topological tree) 構造をなす系が対象とされた。

2.1 で詳述されている Hooker/Margulies, Hooker(HMH)の手法がジェット推進研究所 (Jet Propulsion Laboratory JPL) での解析及びプログラム化の基礎になっていることを述べた上で、③、④及び⑥の Lagrange の手法が適用された。

その結果、HMH、③即ち Kane の擬座標を用いた定式化、④及び⑥即ち一般化座標を用いた Lagrange の式と擬座標を用いた Lagrange の式との組み合わせ、④即ち一般化座標を用いた Lagrange の

式と回転についてのオイラーの式 $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ との組み合わせ、の 4 種類の手法によって最終的に全く同じ式が得られることを示し、どの手法に依るかは導出の容易さを主観的にどの様に判断するかにかかっているとしている。

B-1 Single elastic body with small deformations

ここでは、初めて柔軟な物体を扱っている。弾性体の運動は本質的には無限次元であるが、有限次元で近似し、且つ偏微分方程式ではなく常微分方程式で記述することが工学的に意味ある結果をもたらすと述べている。問題はその有限次元の選択であるが、通常、何次のモードまで、即ち何次のモード・ベクトル (modal vectors) まで考慮するかに依る。 n 次まで考慮するとすれば、ある点 (r_1, r_2, r_3) の時刻 t におけるある基準座標系に対する変形 (deformation coordinates) \mathbf{u} は、

$$\mathbf{u}(r_1, r_2, r_3, t) = \sum_{j=1}^n \phi^j(r_1, r_2, r_3) q_j(t) \quad (31)$$

但し、 $\phi^j(r_1, r_2, r_3)$, $j=1, \dots, n$ はモード・ベクトル

で表現される。次の問題は、モード・ベクトル ϕ^j が既知であるとするか又は未知とするかである。

既知 (何らかの方法で) とすれば、運動方程式は、変形についての一般化座標 q_1, \dots, q_n 及び基準座標系の並進、回転を定義する 6 個のスカラーで直接記述できる。その点で④や⑧が有利である。勿論、N-E 手法や①でも定式化できるが、その際にはまず \mathbf{u} を用いて記述した後で (31) 式を導入して q_1, \dots, q_n への変換を行なう必要がある。従って、④即ち Lagrange の手法が有利 (advantageous) であるとしている。

一方、未知であるとするれば、 \mathbf{u} を用いて記述された運動方程式からモード・ベクトルを求めなくてはならない。従って、Lagrange の手法の利点はなくなる。

さて実際問題としては、弾性体の運動を記述する偏微分方程式はその定式化は勿論、解く事も困難な場合が多いから、自由度を有限とした上で、離散値化した (discretized) 数学モデルを考える必要があ

る。即ち、有限個の節点(nodes)への集中質量(concentrated-mass), 又は節点間のエレメントに分布した質量(distributed-mass internodal elements)によるモデル化である。こうしたモデルによって、線形定係数常微分方程式によって系を記述し、系の固有ベクトルとしてモード・ベクトルを計算する。

離散値化した後の定式化の手法としては、N-E手法、即ち $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$, $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ を直接適用する方が、運動エネルギーに2次項が現われる④即ちLagrangeの手法よりも効率的(efficient)である。

ところが、弾性体を、微小変形を仮定して、質量のない弾性ヒンジ(massless elastic structure)で結合された n 個の剛体系として離散値化した場合は、前述の比較は必ずしも明確ではない。というのは、次の2つの命題が成立するからである。

命題1: 各剛体にN-E手法を適用して、ある基準座標系に対する剛体の並進及び回転を変形と考え、その基準座標系に対して固定したベクトル基底を用いて得られるスカラ方程式は、一般化座標として剛体の並進、回転を選んでLagrangeの手法もしくは①を適用して得られる式と同じである。

命題2: 全系に $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ を適用し、全系の質量中心がその中で固定されているあるgross motion frameを定義し、それに対して固定したベクトル基底を用いて、gross motion frameの慣性空間に対する角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を変数に含めて得られるスカラ方程式は、同じベクトル基底における $\boldsymbol{\omega}$ の各要素を擬座標の時間微分(quasi-coordinate derivatives)に選んでKaneもしくはLagrangeの擬座標を用いた手法から得られる式と同じである。

従って、どの定式化の手法が優れているかという比較は無意味(pointless)となるとしている。

B-2 Interconnected rigid bodies and elastic bodies

前段の命題2は更に一般化されて、命題3が成立する。

命題3: いかなる連続体(any material continuum)であっても、 $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ を適用し、その質量中心がその中で固定されているある基準座標系を定義し、それに対して固定したベクトル基底を用いて、その

基準座標系の慣性空間に対する角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を変数に含めて得られる式は、同じベクトル基底における $\boldsymbol{\omega}$ の各要素を擬座標の時間微分に選んでKaneもしくはLagrangeの擬座標を用いた手法から得られる式と同じである。

これは、基準座標系の回転を記述する式にのみ関係している。一方、質量中心の並進運動の式は $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$ を適用すれば求められる。従って、残る問題は、基準座標系に相対的な内部要素(internal components)の運動を記述する式を求める手法の比較に限定される。

これに関しては、命題4が成立する。

命題4: ある基準座標系に固定された直交ベクトル基底を用いて、独立な座標によって記述される有限個の質点及び剛体からなるいかなる系に関しても、①, ②, ③, ④, ⑤の各手法、そしてN-E手法の適用によって全く同じ式が得られる。

以上によって、やはり特に優れた手法を指摘することはできないとしている。

但し、命題4の適用は、剛体と離散値化された弾性体からなる系に限定される。

(4) 結 論

解析力学の諸手法による定式化が、N-E手法に基づく定式化に優っているかどうかを決定しようとする、前節の命題3及び4に深く依存する。

命題3は、簡単に言うと、任意の系に $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ を適用すると、同じ変数を用いる限り、擬座標を用いたKane, Lagrangeいずれの手法によっても完全に同じ式が得られるということである。又命題4は、本質的に、弾性体を離散値化したモデルに関して、節点集中質量及び点結合された剛体に $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$, $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ を適用すると、Lagrange's form of D'Alembert's principle, Lagrange's generalized coordinate equation, Lagrange's quasi-coordinate equations, Kane's equationsの各手法のいずれかを適用した場合と完全に同じ式が得られるということである。

従って、解析力学のどの手法も、N-E手法に優る顕著な利点(demonstrable advantage)を持っていないとは言えない様であるとしている。

1.3 今後の展望

前節で概要を述べたように、一般的な定式化とプログラム開発に向って様々のアプローチが試みられて来ているが、今なお満足すべきレベルに達しているとは言えない。今後の検討課題としては、第一に、任意のボディが柔軟体であるような系を、特に構造解析との関連を中心として十分吟味する必要がある。第二に複雑なトポロジ、特に閉ループ構造の扱いであり、第三はヒンジ部のより一般的かつ忠実度の高いモデル化である。これらと関連して、LSS構築中のマニピュレータ操作時における衝突の問題に代表される、不等式拘束条件の取り扱い、宇宙実利用の面で、極めて重要な課題となろう。

これらの課題は、知識工学的なアプローチや数式処理 (symbolic manipulation) 等のソフトウェアの進歩と、コンピュータ・グラフィクスや超高速コンピュータ (スーパーコンピュータ) の発展によって、予想を上回るペースで解決へ向っていくことが期待される。従って、こうした発展を見越した上で、定式化手法や基本アルゴリズムの見直しを続けることが大切であろう。

最後に、本調査を行なうに当たり適切なアドバイスをいただきました本所機体二部 戸田勸室長 (現宇宙開発事業団)、三菱電機鎌倉製作所 若杉登参事、同 岡沼徹氏、同 吉田憲正氏、同 中村太一氏、を初め関連各位に深甚なる謝意を表明します。

2 各 論

2.1 Hooker/Margulies¹⁾, Hooker²⁾, Roberson/Wittenburg³⁾

2.1.1 概 要

ここではHooker, Margulies¹⁾, Roberson, Wittenburg³⁾およびHooker²⁾の3論文をまとめて概観する。これらは共にバリセンタという概念を導入し活用した点で共通しており、扱う対象は全て剛体に限られているが、以後の研究にひとつの方向を与えたパイオニア的役割を果たしている。

取扱対象は、①トポロジカル・トリー構造で結合した② n 個の剛体の姿勢運動であり、③各ヒンジは回転自由度 (3以下) のみを有するものとする (図 2.1.1)。定式化は各ボディについてのNewton,

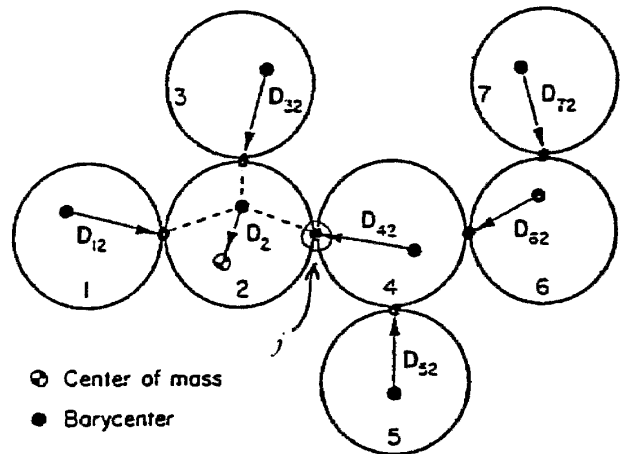


図 2.1.1 7 ボディ・コンフィギュレーション例 (Hooker, Margulies¹⁾による)

Euler 方程式により、最終式の独立変数として各ボディの角速度 ω を用いている。但し Hooker²⁾ は後述する理由のために、レファレンス・ボディの角速度 ω_0 (3 個) とヒンジ回転角度 r_k ($r-3$ 個; r は全系の回転自由度) を独立変数として選んでいる。

本節の方式の特色をまとめると; 各ボディの回転運動方程式における未知量のうち、①ヒンジ拘束力はバリセンタの導入によって消去されること、またヒンジ拘束トルクは② $3n+n_c$ 次 (n_c は拘束自由度) の拘束式を含めた数値解法によって implicitly に求まること、③拘束トルクを explicitly に除去し、最小次 (r 次) の方程式に帰着できること²⁾ が示される。

2.1.2 本 論

2.1.2.1 ベクトル, ダイアディク運動方程式

各ボディに関する Newton および Euler の方程式は、

$$\mathbf{F}_\lambda + \sum_{j \in J_\lambda} \mathbf{F}_{\lambda j}^H = m_\lambda \ddot{\mathbf{p}}_\lambda \quad (2.1.1a)$$

$$\mathbf{\Phi}_\lambda \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_\lambda + \boldsymbol{\omega}_\lambda \times \mathbf{\Phi}_\lambda \cdot \boldsymbol{\omega}_\lambda = \mathbf{T}_\lambda + \sum_{j \in J_\lambda} \mathbf{T}_{\lambda j}^H + \sum_{j \in J_\lambda} \mathbf{L}_{\lambda j} \times \mathbf{F}_{\lambda j}^H \quad (2.1.1b)$$

と表わせる。但し添字 λ は各ボディ、 λ_j はボディ λ の j ヒンジを表わす指標である。ボディ λ について、 m_λ ; 質量、 $\mathbf{\Phi}_\lambda$; 質量中心まわりの慣性テンソル、 $\boldsymbol{\omega}_\lambda$; 角速度ベクトル、 $\mathbf{F}_\lambda, \mathbf{T}_\lambda$; 外部作用力、外部作用トルク、 \mathbf{p}_λ ; 慣性空間の中心から各々の質量中心へのベクトルが定義される。また、 $\mathbf{L}_{\lambda j}$ はボディ λ の質量中心からボディ λ にあるジョイント j までの

ベクトルであり、 $\mathbf{F}_{\lambda j}^H, \mathbf{T}_{\lambda j}^H$ は未知量であり、それぞれジョイント j を介してボディ λ に作用するヒンジ拘束力、拘束トルクである。また J_λ はボディ λ に設けられたジョイント番号の集合である。

2.1.2.2 拘束力の除去

全ヒンジは回転自由度のみを有するために、各ボディの姿勢運動のみを知れば運動を完全に記述するのに十分であることを考慮すれば、(2.1.1)の両式から n 個の回転運動ベクトル方程式を得ればよいことがわかる。ヒンジ拘束力 $\mathbf{F}_{\lambda j}^H$ は実際、(2.1.1a)式をボディ λ のジョイント j につながる全ボディ $\mu \in s_{\lambda j}$ (図2.1.1の例では、 $\lambda=2$ とすると、 $\mu \in s_{\lambda j}$ はボディ4, 5, 6及び7である)について総和することにより、並進加速度ベクトルを使って分離して表現できる。キネマティカルな関係よりこれは角運動量ベクトルのみの微分方程式として以下のように書ける^{1),3)}

$$\begin{aligned} & \dot{\Phi}_\lambda^* \dot{\omega}_\lambda + \omega_\lambda \times \Phi_\lambda^* \omega_\lambda \\ &= \mathbf{T}_\lambda + \sum_{\mu \in J_\lambda} \mathbf{T}_{\lambda j}^H + \mathbf{D}_\lambda \times \mathbf{F}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \mathbf{D}_{\lambda \mu} \times \mathbf{F}_\mu \\ &+ m \sum_{\mu \neq \lambda} \mathbf{D}_{\lambda \mu} \times [\dot{\omega}_\mu \times \mathbf{D}_{\mu \lambda} + \omega_\mu \times (\omega_\mu \times \mathbf{D}_{\mu \lambda})] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

ここで、 m は全系の質量である。またベクトル \mathbf{D}_λ , $\mathbf{D}_{\lambda \mu}$ は次のように定義する。

$$\mathbf{D}_\lambda = -m^{-1} \sum_{\mu \neq \lambda} m_\mu \mathbf{L}_{\lambda \mu} \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{D}_{\lambda \mu} = \mathbf{D}_\lambda + \mathbf{L}_{\lambda \mu} \quad (2.1.4)$$

\mathbf{D}_λ はボディ λ のバリセンタから質量中心へのベクトルで、 $\mathbf{D}_{\lambda \mu}$ はバリセンタからボディ μ がつながっているジョイントまでのベクトルである(図2.1.2)。ボディ λ のバリセンタ(barycenter, connection barycenter)とは(2.1.3)式より、ボディ λ の各ジョイント $j \in J_\lambda$ に、 j でつながるボディの全質量

$$\sum_{\nu \in s_{\lambda j}} m_\nu$$

を質点として付加したオーグメント・ボディ

の質量中心と解釈することができる。 Φ_λ^* はこのオーグメント・ボディのバリセンタまわりの慣性ダイアデイクである。Hooker and Margulies¹⁾は上式の導出を各ボディについて行ない、Roberson and Wittenburg はグラフ理論を採用し n 次のベクトル行列で行なっている。

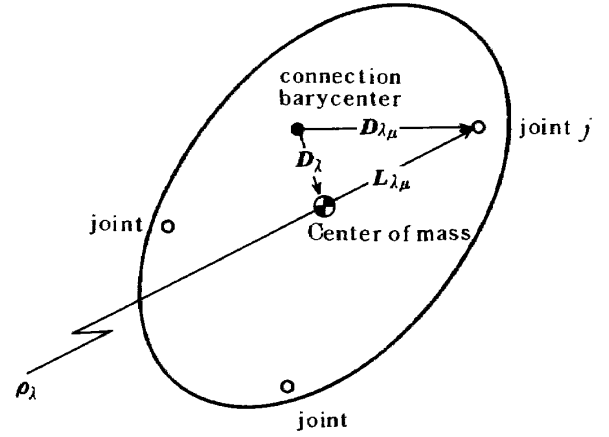


図2.1.2 ボディ λ のバリセンタ、質量中心、ヒンジの関係

2.1.2.3 拘束トルクの“Implicit”な除去¹⁾

ヒンジに回転拘束があり自由度が3よりも小となるとき、(2.1.2)式のヒンジ拘束トルク $\mathbf{T}_{\lambda j}^H$ は姿勢角に依存する未知トルクとして残されるが、この拘束がジンバル拘束などであるときは数値的にこれを除去できる。ヒンジ拘束トルクは

$$\sum_{j \in J_\lambda} \mathbf{T}_{\lambda j}^H = \sum_{j \in J_\lambda} \mathbf{T}_{\lambda j}^{SD} + \sum_{i=1}^{n^c} \delta_{\lambda i} T_i^c \mathbf{p}_i \quad (2.1.5)$$

と表わせる。ここで $\mathbf{T}_{\lambda j}^{SD}$ はジョイント j でボディ λ に作用するスプリング・ダッシュポット・トルク、 $n^c = 3n - r$ は全系の拘束自由度数、 \mathbf{p}_i ($i=1, \dots, n^c$)は拘束軸方向の単位ベクトル、 T_i^c ($i=1, \dots, n^c$)は未知拘束トルクの \mathbf{p}_i 方向の成分である。また

$$\delta_{\lambda i} = \begin{cases} 0 & \text{ボディ } \lambda \text{ に } \mathbf{p}_i \text{ を定義できないとき} \\ +1 & \text{ } T_i^c \mathbf{p}_i \text{ がボディ } \lambda \text{ への拘束トルクのとき} \\ -1 & \text{ } T_i^c \mathbf{p}_i \text{ がボディ } \lambda \text{ から隣接ボディへの拘束トルクのとき} \end{cases}$$

である。この種類の拘束条件は隣接するボディ間の相対角速度ベクトルが \mathbf{p}_i と直交するという事実より、

$$\mathbf{p}_i \cdot (\omega_\lambda - \omega_\mu) = 0 \quad (2.1.6)$$

ここで(2.1.2)式をボディ λ の正規直交座標系で行列表示し、 $\lambda \in s$ について集め、また(2.1.6)式も同様に行列で表わすと、

$$\mathbf{A}^T \dot{\omega} = \mathbf{E} + \mathbf{P} \mathbf{T}^c \quad (2.1.7a)$$

$$\mathbf{P}^T \omega = 0 \quad (2.1.7b)$$

となる。 $\mathbf{A} \in R^{3n \times 3n}$, $\omega, \dot{\omega}, \mathbf{E} \in R^{3n}$, $\mathbf{P} \in R^{3n \times n^c}$, $\mathbf{T}^c \in R^{n^c}$ であり、それぞれの内容は自明であるので

省略する。式(2.1.7b)を更に微分して

$$P^T \dot{\omega} = -\dot{P}^T \omega \quad (2.1.7c)$$

(2.1.7a), (2.1.7c) は連立して $\dot{\omega}$, T^c に関する $3n + n^c$ 次の代数方程式として数値的に解ける。

2.1.2.4 拘束トルクの“Explicit”な除去²⁾

この除去法は以下の2つの物理的考察に基いている。①全系のベクトル運動方程式の総和をとると拘束トルクは作用/反作用のペアで相殺する, ②任意のジョイント j に注目し, このジョイントの片側にある全ボディの運動方程式の和をとるとジョイント j における拘束トルク以外は全て①と同様相殺する。更にこの残余のジョイント j における拘束トルクは定義からジンバル軸に直交している。

以下の議論のために, (2.1.2) 式を簡単化した表現

$$\sum_{\mu \in S} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot \dot{\omega}_\mu = E_\lambda + \sum_{j \in J_\lambda} T_{\lambda j}^H \quad (2.1.8)$$

とし(各ベクトル・ダイアデイクの内容は自明), 次の定義を行なう。

(1) レファレンス・ボディを選び $\lambda=0$ のラベルを付しこの角速度ベクトルを ω_0 とする。残りの回転自由度の合計は $r-3$ となる。

(2) ジョイントでの回転自由な軸(ジンバル軸など)を \mathbf{g}_i ($i=1, \dots, r-3$) とし,

$$\varepsilon_{i\mu} = \begin{cases} 1 & \mathbf{g}_i \text{ がボディ } \mu \text{ とボディ } 0 \text{ を結ぶチェーン上のジョイントにあるとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(3) ボディ μ の角速度ベクトルを全 $\mu \in S$ について,

$$\omega_\mu = \omega_0 + \sum_{k=1}^{r-3} \varepsilon_{k\mu} \dot{r}_k \mathbf{g}_k \quad (2.1.9)$$

と表わす。但し r_k は \mathbf{g}_k まわりの回転角である。

さて, (2.1.8) 式の総和 ($\lambda \in S$) をとり, (2.1.9) 式を使うと, ①より,

$$\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot (\dot{\omega}_0 + \sum_k \varepsilon_{k\mu} \dot{r}_k \mathbf{g}_k) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}^* \quad (2.1.10)$$

但し

$$E_{\lambda}^* = E_{\lambda} - \sum_{\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot \sum_k \varepsilon_{k\mu} \dot{r}_k \mathbf{g}_k \quad (2.1.11)$$

また, 式(2.1.8)をジンバル軸 \mathbf{g}_i のボディ 0 に対して外側にある全ボディ ($\varepsilon_{i\lambda}=1$ となる全 λ) について加え(これを $\sum_{\lambda} \varepsilon_{i\lambda} \{ \}$ と表わす), \mathbf{g}_i との

内積をとると②より,

$$\mathbf{g}_i \cdot \sum_{\lambda} \varepsilon_{i\lambda} \left\{ \sum_{\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot (\dot{\omega}_0 + \sum_k \varepsilon_{k\mu} \dot{r}_k \mathbf{g}_k) - E_{\lambda}^* \right\} = 0 \quad (2.1.12)$$

となる。式(2.1.10)~(2.1.12)を整理し行列型になおすと,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} & \cdots & \mathbf{a}_{0,r-3} \\ \mathbf{a}_{10} & \mathbf{a}_{11} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \mathbf{a}_{r-3,0} & \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_0 \\ \dot{r}_1 \\ \vdots \\ \dot{r}_{r-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\lambda} E_{\lambda}^* \\ \mathbf{g}_1 \cdot \sum_{\lambda} \varepsilon_{1\lambda} E_{\lambda}^* \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{r-3} \cdot \sum_{\lambda} \varepsilon_{r-3,\lambda} E_{\lambda}^* \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

となる。但し,

$$\mathbf{a}_{00} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \quad (\text{ダイアデイク})$$

$$\mathbf{a}_{0k} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \varepsilon_{k\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot \mathbf{g}_k \quad (\text{ベクトル})$$

$$\mathbf{a}_{i0} = \mathbf{g}_i \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \varepsilon_{i\lambda} \phi_{\lambda\mu}^* \quad (\text{ベクトル})$$

$$\mathbf{a}_{ik} = \mathbf{g}_i \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \varepsilon_{i\lambda} \varepsilon_{k\mu} \phi_{\lambda\mu}^* \cdot \mathbf{g}_k \quad (\text{スカラー})$$

である。(2.1.13) 式のベクトル, ダイアデイクを成分表示することにより, r 個の変数: $\dot{\omega}_0$ の3成分と $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{r-3}$ に対して r 個のスカラー線形行列式を得る。

2.1.3 まとめ

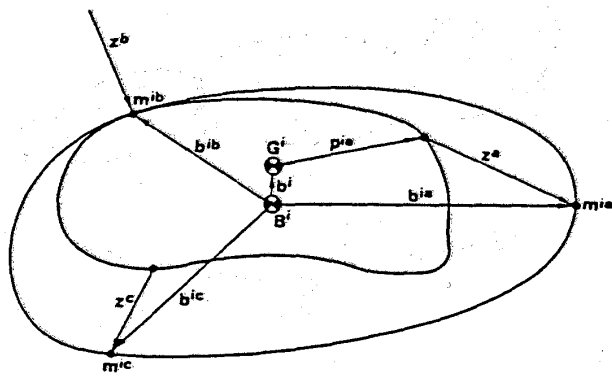
文献1, 2で確立されたNewton-Euler法による定式化: (2.1.13) 式 (H・M・H法と呼ばれている) は拘束条件式を除いたミニマルな次数 r 次の運動方程式となる。本節の対象は剛体が結合した衛星の姿勢運動に限られているが, ここで提案されたバリセンタの概念は後に Boland⁴⁾, Likins⁵⁾ らによって柔軟ボディを含む場合に拡張されている(2.2, 2.3節)。

又, 本節ではRoberson, Wittenburg³⁾ についてはあまり述べなかったが, 最終結果は文献¹⁾ とほぼ同じであるがトポロジー木構造を生成する過程でグラフ理論を使用し, システムティックな方法を提案している点, アルゴリズムの汎用性を旨とするには多くの示唆を与えるであろう。

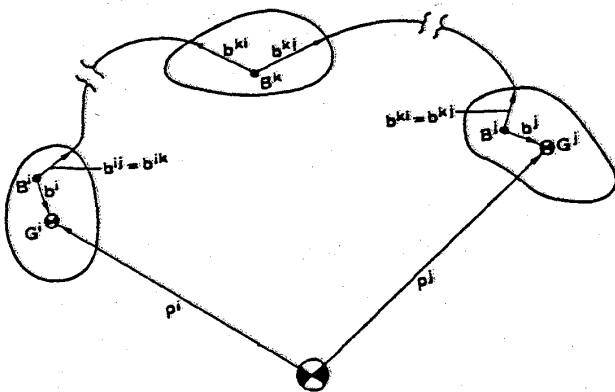
2.2 Boland/Samin/Willems^{1), 2)}

2.2.1 概要

取扱える対象は(図2.2.1)



(a) Augmented body.



(b) Barycentric vectors.

図 2.2.1 コンフィギュレーション
(Boland 他¹⁾による)

- トポロジー木構造¹⁾及びこれに帰着する閉ループ構造²⁾
- 任意のボディが柔軟体かつジャイロ系
- ヒンジは並進, 回転 6 自由度

システムの記述はグラフ理論を使用しており, かつバリエンタを用いた拘束力の除去を行なうなど, Roberson, Wittenburg³⁾の方法を一般化したものと考えられる。但し定式化は D'Alembert の仮想仕事の原理に基いて行なわれており, 独立変数は剛体 6 自由度 (全系質量中心の変位 R , 回転 ω) 及び各ジョイントの回転/並進 Ω^a , Z , 弾性変位 β^i である。本論文は, しかしながら, 線形化方程式の安定性を論ずることが主目的であり, このために質量行列の対称性を保持するように, 回転に関しては別途一般化座標 θ , θ^a に変換している。

2.2.2 本 論

2.2.2.1 座標系及び諸量の定義 (図 2.2.1a)

与えられた物理的なヒンジ (並進, 回転可能) は, 並進運動をベクトル Z^a (ヒンジ取付点から対応する

ヒンジ点まで) で表わし回転自由度は Z^a の端点 (ヒンジ a ; アーク) に設置されていると考える。“拡張ボディ”を, i ボディ本体と Z^a , Z^b , ... で構成されるものと定義する。“オーグメント・ボディ”は文献^{3), 4)}と同様にして, i 拡張ボディの全ヒンジ a にそれにつながる他ボディの全質量が質点 m^a として取付けられたものとする。バリエンタ B^i はこのオーグメント・ボディの質量中心と定める。主な座標系, ベクトル量は,

$\{\hat{X}_\alpha^i\}$: ボディ i の剛体運動固定, 原点は質量中心

G^i レファレンス・ボディ ($i=r$) では $\{\hat{X}_\alpha^r\}$ 。

$\{\hat{X}_\alpha\}$: 全系のジェネラルフレームで原点は全系質量中心

$\{\hat{X}_\alpha^i\}$: Z^a の根本に原点を持ちボディフレーム $\{\hat{X}_\alpha^i\}$ と Ω^a の相対角速度を持つ。また Z^a の先端 a に予備フレームを考え, これとの相対角速度を Ω^a とする。

P^i, x^i : G^i から質点要素 dm^i までのベクトルを P^i , 非変形時を x^i (dm^i の振動変位 $u^i = P^i - x^i$)

したがってボディ i の角速度 ω^i は,

$$\omega^i = \omega^r - \sum_a T^{ai} \Omega^a - \sum_a \sum_k T^{ai} S^{ak} \Omega^{ka}$$

但し T^{ai} , S^{ak} はグラフ理論から作られる行列 (2.2.2.3 に概説した) である。更に,

$\varepsilon^i, \alpha^i, \sigma^i$; dm^i の変形, 局所回転, 応力場, $\varepsilon^i = \varepsilon^i(x^i, \beta^i)$, $\alpha^i = \alpha^i(x^i, \beta^i)$, $\sigma^i = \sigma^i(\varepsilon^i)$ を表わす構造変数

F^a, L^a ; ジョイント a を介して作用する拘束力, 拘束トルク

h^{is} ; ロータの角運動ベクトル (大きさ一定)

Ω^{is} ; h^{is} の $\{\hat{X}_\alpha^i\}$ フレームに対する角速度ベクトル

2.2.2.2 運動方程式 (トポロジー木構造)

D'Alembert の仮想仕事の原理より次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_i \int \sigma^{iT} \delta \varepsilon^i dv + \sum_a F^a \cdot [\hat{X}_\alpha^a]^T \delta Z^a + \sum_a L^a \cdot \delta r^a \\ & + \sum_i \int [(-f^i + (\ddot{R} + \ddot{\rho} + \ddot{p}^i)) \cdot \delta(R + \rho^i + p^i)] dm \\ & + \sum_{i,s} \dot{h}^{is} \cdot (\delta \Psi^i + \delta r^{is}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

但し, f^i は単位体積に作用する外力, R は慣性空間で見た全系の質量中心 G の位置, p^i は G から G^i への

ベクトルである。また $\delta\phi^i$; ボディフレーム $\{\hat{X}_a^i\}$ の慣性空間に対する仮想回転, δr^{is} ; ロータ角運動量ベクトルの仮想回転。式 (2.2.1) 中, 左辺第 1 項 : 弾性変位, 第 2 項 : ヒンジ並進, 第 3 項 : ヒンジ回転, 第 4 項 : 弾性体並進, 及び第 5 項 : ロータのそれぞれ仮想仕事を表わす。上式の仮想変位を, 剛体 6 自由度 (R, Ψ) , ヒンジ a の回転並進 (r^a, z^a) 及びモード座標 $\rho^i (i=1, \dots, n^i)$ の独立変数に変換する。以下のように全系の並進 (2.2.2), 回転 (2.2.3), 各ヒンジの並進 (2.2.4), 回転 (2.2.5) 及び弾性振動式 (2.2.6) を得る。

$$m\ddot{R} - \sum_i F^i = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\sum_i \int_i \rho^i \times \ddot{p}^i dm + \sum_{i,j,k} m^j b^{ij} \times \ddot{b}^{kj} + \sum_{i,s} \dot{h}^{is} - \sum_i \int_i \rho^i \times f^i - \sum_{i,j} b^{ij} \times F^j = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\sum_i m^{id} (\ddot{b}^{id} + F^i/m) + F^d = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_i T^{bi} \int_i \rho^i \times \ddot{p}^i dm - \sum_{i,j,k} T^{bi} m^j b^{ij} \times \ddot{b}^{kj} \\ & - \sum_{i,s} T^{bi} \dot{h}^{is} + \sum_i T^{bi} \int_i \rho^i \times f^i dm \\ & + \sum_{i,j} T^{bi} b^{ij} \times F^j + L^b = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_i \left(\frac{\partial \epsilon^i}{\partial \rho^i} \right)^T \sigma^i dv - \int_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial \rho^i} \right) [\hat{X}^i] \cdot (f^i - \ddot{p}^i) dm \\ & - \sum_a S^{ia} \left(\frac{\partial u^{ia}}{\partial \rho^i} \right)^T [\hat{X}^i] \cdot F^a \\ & - \sum_a S^{ia} \left(\frac{\partial \alpha^{ia}}{\partial \rho^i} \right)^T \phi^{iaT} [\hat{X}^i] \cdot (L^a + \bar{S}^{ia} z^a \times F^a) \\ & + \sum_s \left(\frac{\partial \alpha^{is}}{\partial \rho^i} \right) \phi^{isT} [\hat{X}^i] \cdot \dot{h}^{is} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ここで①式 (2.2.3), (2.2.5) はそれぞれ擬座標 ω , \mathcal{Q}^a に関するもので一般化座標ではないこと, ②これらは Roberson, Wittenburg³⁾ がベクトル・ダイアディク法で求めたものに等価であること, ③並進 (2.2.4) も Roberson と等価であること, 及び④ (2.2.6) 式は非線形振動 (微小変位に限らない) を含む一般形であることに注意されたい。

2.2.2.3 グラフ理論の諸定義

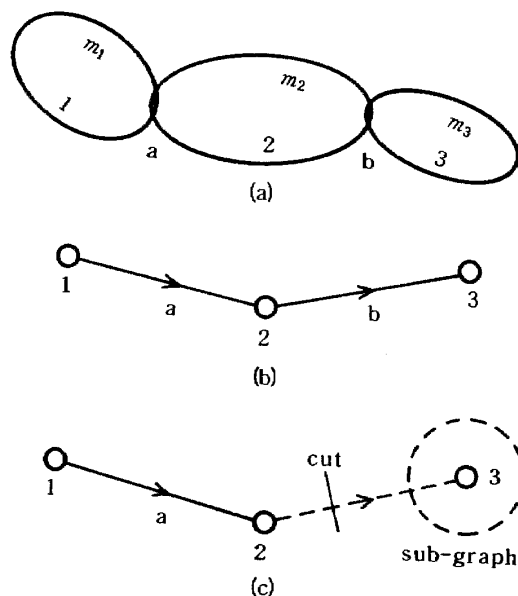


図 2.2.2 有効グラフによるシステムの表現

グラフ理論は取扱う対象となる衛星のコンフィギュレーションを定めるプロセスを機械的なものにし, 汎用性のあるコーディングを容易にする長所があると推測される。現に Roberson, Wittenburg³⁾ はグラフ理論を有効に利用し種々の証明を鮮やかなものとしている。Boland⁴⁾ も, 文献³⁾ と同様の表現を用い前述の諸結果を得ている。その概要をここでまとめておきたい。

多結合ボディモデルを図 2.2.2 のような有向グラフで表わす。ここで, 各ボディをバーテックス, 各ヒンジをアークで表わしそれぞれのインデックスを $\{1, 2, \dots\}$, $\{a, b, \dots\}$ とする (図 2.2.2 a, b)。

• S^{ia} : グラフ・インシデンス行列の (i, a) 要素

$$S^{ia} = \begin{cases} 1; & a \text{ が } i \text{ から出発} \\ -1; & a \text{ が } i \text{ で終端} \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

• \bar{S}^{ia} : モディファイド・インシデンス行列の (i, a) 要素

$$\bar{S}^{ia} = \begin{cases} 1; & S^{ia} = 1 \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

• T : グラフ行列 T の (a, i) 要素, S の左擬似逆行列

$$T^{ai} = \begin{cases} 1; & a < i \text{ かつ } a \text{ が } r \text{ を向いているとき} \\ -1; & a < i \text{ かつ } a \text{ が } r \text{ を向いていないとき} \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

但し, r は任意にレフェレンスとして選んだバークス (ボディ) であり, $a < i$ は, a が i と r のミニマム・パス上にあることを示す。

• m^{ia} : グラフ・パラメータ

$$m^{ia} = \begin{cases} -m^{ia}; & a \text{ が } i \text{ を向いているとき} \\ m^{ia}; & a \text{ が } i \text{ の反対方向を向いているとき} \end{cases}$$

但し, m^{ia} は, アーク a を切断したときのサブグラフ (図 2.2.2c) の全質量であり, オグメント・ボディを作成するとき, ボディ i のジョイント a に付加すべき等価質量である。

図 2.2.2 の 3 ボディ, 2 ヒンジの例ではこれらの諸量は次のようになる。但しボディ 1 をレフェレンスと想定する。

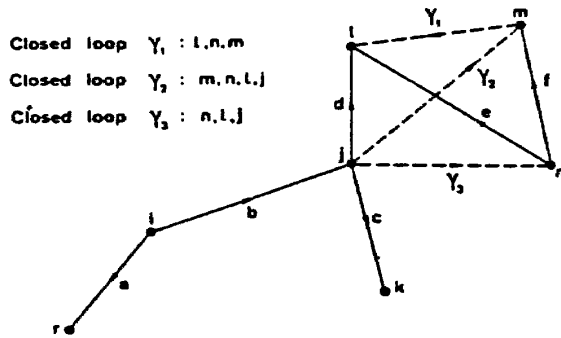
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m^{1a} = m_2 + m_3, \quad m^{2a} = m_1, \quad m^{2b} = m_3, \quad m^{3b} = m_1 + m_2$$

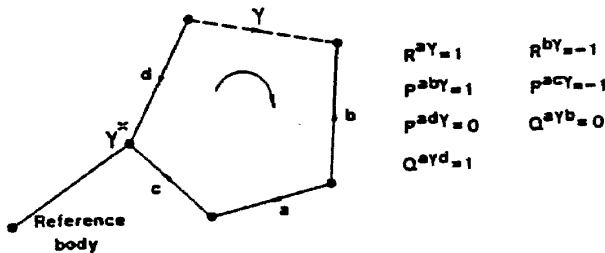
これにより, 物理的諸量は例えば次のように表わされる。

① 全系の質量 m ;

$$m = \sum_j m^j = m^j + \sum_a S^{ia} m^{ia} = \sum_j S^{ia} m^{ia}$$



(a) Arc cutting in closed loops.



(b) Example of graph arrays for a closed loop.

図 2.2.3 閉ループと有効グラフ (Boland 他²⁾)

② バリセンタ・ベクトル b^{ij} ($b^i \equiv b^{ii}$);

$$\sum_j m^j b^{ij} = \sum_a S^{ia} m^{ia} b^{ia} + m^i b^i = 0$$

$$b^{ia} = b^i + p^{ia} + \bar{S}^{ia} z^a$$

次に図 2.2.3 のような閉ループ形状のものをグラフ理論によってトポロジー木構造に等価なものとするときに必要となる諸量を定義する。閉ループのグラフのサイクロマティック数 (独立な閉ループの数) に等しい個数のアークを切断すると, トポロジー木構造に変換できる。

a, b, c, \dots : トリー構造のアーク

r_1, r_2, r_3, \dots : カット・アーク

r^* : ループ上のボディでレフェレンス
 ・ボディと他のボディの間にあるもの

R^{ar} : R 行列の (a, r) 要素で

$$= \begin{cases} 1; & \text{アーク } a \text{ がループ } r \text{ 上にあって } r \text{ と同方向} \\ -1; & \text{アーク } a \text{ がループ } r \text{ 上にあって } r \text{ と逆方向} \end{cases}$$

P^{abr} : 3 次元アレイ P の (a, b, r) 要素で

$$= \begin{cases} 1; & b \text{ が } a, r \text{ 間の最小パスで } r^* \text{ を含まない} \\ -1; & b \text{ が } a, r^* \text{ 間の最小パスで } r \text{ を含まない} \\ 0; & a \text{ と } b \text{ が同一またはその他} \end{cases}$$

Q^{arb} ;

$$= \begin{cases} 1; & a \text{ と } b \text{ が } r, r^* \text{ 間の 2 つの異なるミニマム・パス上にある} \\ 0; & \text{その他} \end{cases}$$

2.2.2.4 運動方程式 (閉ループ構造)

前節の定義, 図 2.2.3 において,

仮定: カット・アークは剛性のものとし, 並進/回転のないヒンジとする。

に基き, オリジナルな閉ループ系とトリー形状の力学的等価性を保存するために, カット・アーク両端のボディに作用する力 $S^{ir} F^r$, トルク $S^{ir} L^r$ を反対符号を持つ外部作用力/トルクとして扱う。最終式の構成は, ①等価なトポロジー木構造の運動方程式と, ②ループ拘束式となる。簡単のために途中の式誘導のプロセスを省略すると, 全系の回転/並進運

動方程式には当然ながら閉ループの影響は陽に表われず、ヒンジの回転、並進及び弾性振動はそれぞれ以下の(2.2.7), (2.2.8), (2.2.9)式となる。

$$\begin{aligned} & - \sum_i T^{bi} \int_i \mathbf{p}^i \times \ddot{\mathbf{p}}^i dm - \sum_{i,j,k} T^{bi} m^j \mathbf{b}^{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}^{kj} \\ & - \sum_{i,s} T^{bi} \mathbf{h}^{is} \\ & + \sum_i T^{bi} \int_i \mathbf{p}^i \times \mathbf{f}^i dm + \sum_{i,j} T^{bi} \mathbf{b}^{ij} \times \mathbf{F}^j \\ & - \sum_r R^{br} (\mathbf{L}^r + \mathbf{l}^{br} \times \mathbf{F}^r) = -\mathbf{L}^b \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\sum_i m_*^{ia} (\ddot{\mathbf{b}}^{ia} + \frac{1}{m} \mathbf{F}^i) - \sum_r R^{ar} \mathbf{F}^r = -\mathbf{F}^a \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_i \left[\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \beta^i} \right]^T \sigma^i dv - \int_i \left[\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial \beta^i} \right]^T [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot (\mathbf{f}^i - \ddot{\mathbf{p}}^i) dm \\ & + \sum_s \left[\frac{\partial \alpha^{is}}{\partial \beta^i} \right] \phi^{isT} [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot \mathbf{h}^{is} - \sum_a S^{ia} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{ia}}{\partial \beta^i} \right]^T [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot \mathbf{F}^a \\ & - \sum_a S^{ia} \left[\frac{\partial \alpha^{ia}}{\partial \beta^i} \right] \phi^{iaT} [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot (\mathbf{L}^a + \bar{\mathbf{S}}^{ia} \mathbf{z}^a \times \mathbf{F}^a) \\ & - \sum_r S^{ir} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{ir}}{\partial \beta^i} \right]^T [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot \mathbf{F}^r \\ & - \sum_r S^{ir} \left[\frac{\partial \alpha^{ir}}{\partial \beta^i} \right] \phi^{irT} [\hat{\mathbf{X}}_a^i] \cdot (\mathbf{L}^r + \bar{\mathbf{S}}^{ir} \mathbf{z}^r \times \mathbf{F}^r) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

このうち、(2.2.7)式左辺第6項、(2.2.8)式左辺第2項、及び(2.2.9)式左辺第6, 7項が閉ループの影響によって持込まれた量である。

一方、拘束条件は次の2式で表わす。

$$\mathbf{l}^{rr} = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{A}^{rr} = \mathbf{E} \quad (2.2.11)$$

第1式は、ヒンジ r (カット・アーク)の両端を結ぶベクトル(対応するトリー形状パラメータと変数で表わされる)が零であること。第2式は、ループに表われる各フレーム間の変換行列の積が r の両端で単位行列となることを示しており、物理的には明瞭であるが、解法は必らずしも可能でない。

2.2.3 まとめ及び評価

トポロジー木構造に関しては、仮想仕事の原理に基いて、並進/回転を有するヒンジの場合について柔軟ボディを許容する定式化が行なわれている。結

果はRoberson, Wittenburgなど既存のものと等価である。しかしながら、拘束トルクの消去などについては明瞭な記述を行っていない。また、本論文は安定性判別のための線形化方程式の導出が主眼となっており(上記では、本報告書の主旨のために割愛した)、このため各係数行列 $M, D, K (M\ddot{\omega} + S\dot{\omega} + D\dot{\omega} + K\omega = f)$ を対象とするため、擬座標 ω, Ω^a を一般化座標に変換している。閉ループ形状については、数学的フレーム・ワークを提示したに止まっており、閉ループを形成するヒンジにも大きい仮定がある。

2.3 Likins¹⁾

2.3.1 概要

本節で取扱える宇宙船は

- $(n+1)$ 個の剛体
- n 個のライン・ヒンジ(各ヒンジは1自由度)
- トポロジー木構造
- 各々の剛体に柔軟付属物、軸対称ロータがある

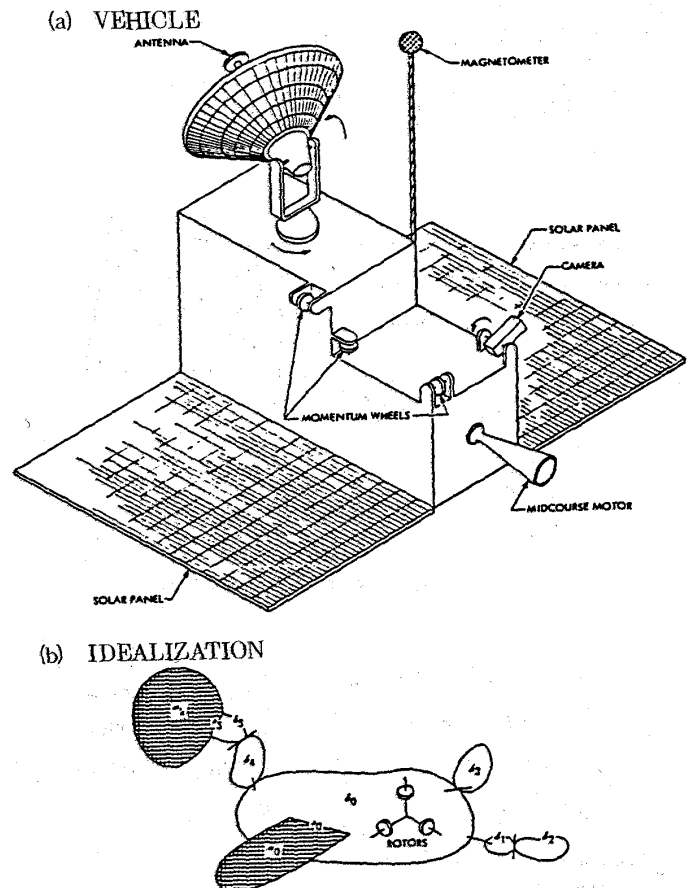


図 2.3.1 宇宙船とその数学モデル (Likins¹⁾ による)

という制限があり、例えば、図 2.3.1 (a) のような宇宙船は (b) のような数学モデルとして考える。そして、剛体 + 柔軟体 + ロータをひとつのサブストラクチャ s と名付け、例えば、(b) におけるサブストラクチャ s_0 は、剛体 b_0 、柔軟体 a_0 及び ロータから成り立っている。また、(a) の軌道修正用モータのように 2 自由度ヒンジで結合されている場合は、架空の物体として質量のない b_1 を考えることによって、ヒンジを増やす。

宇宙船の運動方程式は、各々のサブストラクチャについて、ニュートンの運動方程式をたてることによって、 $(n+6)$ 個の運動方程式が得られ、独立変数としては、全系の重心位置ベクトル \mathbf{X} 、 b_0 の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}^0$ 、ヒンジの回転角 r_1, r_2, \dots, r_n の計 $(n+6)$ 個である。内力は、ブランチごとに、和をとることで消去ができ、内部トルクも同様に和をとる、ヒンジ軸方向との内積を考えることによって、回転が拘束されている方向の内部トルクが消去できる。

2.3.2 本 論

2.3.2.1 定 義

原論文では 45 個の定義が書き並べてあるが、本節

では、その中から特に重要と思われるものだけを抜粋する。

- (1) n はヒンジ数、サブストラクチャは $(n+1)$ 個。
- (2) 自然数の集合、 $\mathcal{B} \triangleq \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- (3) 整数の集合、 $\mathcal{P} \triangleq \{1, 2, \dots, n\}$
- (10) c_k は変形時のサブストラクチャの重心。
- (12) o_k は変形前のサブストラクチャの重心。
- (22) \mathbf{g}^k はヒンジ点 p_k のヒンジ軸方向の単位ベクトル。ヒンジ点 p_k は物体 b_k と b_j ($j < k$) を結ぶヒンジ。また、 $\boldsymbol{\rho}^k, \mathbf{c}^k$ を図 2.3.2 に示すように定義する。
- (23) r^k はヒンジ点 p_k の回転角。
- (25) \mathbf{F}^k は外力。(内部拘束力を除く。)
- (26) \mathbf{T}^k は外部トルク。(内部拘束トルクを除く。)
- (27) τ^k はヒンジ点 p_k の \mathbf{g}^k 方向のトルクの大きさ。
- (29) 「パス・エレメント」 ε_{sk} , $s \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{B}$ は以下のように定義する。

$$\varepsilon_{sk} = \begin{cases} 1 & \text{ヒンジ } p_s \text{ が } b_0 \text{ と } b_k \text{ の間にある時。} \\ 0 & \text{それ以外。} \end{cases}$$

- (32) 「ネットワーク・エレメント」 N_{kr} は b_r へ通じるパス上にあり、物体 b_k に隣接している物体番号を表わす。また、 $N_{kk} = k$, $N_{k0} = N_k$ とする。

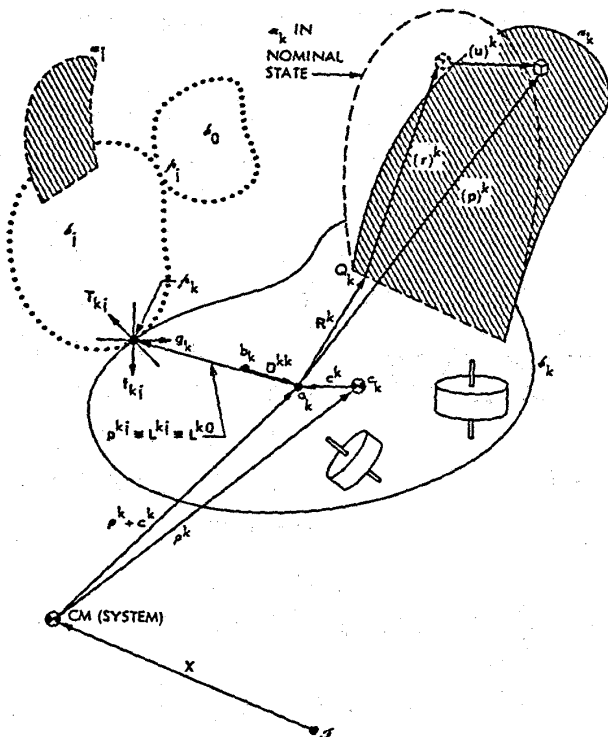
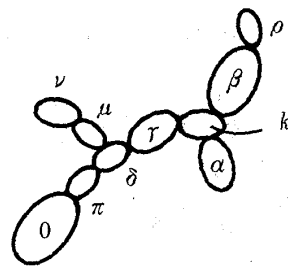


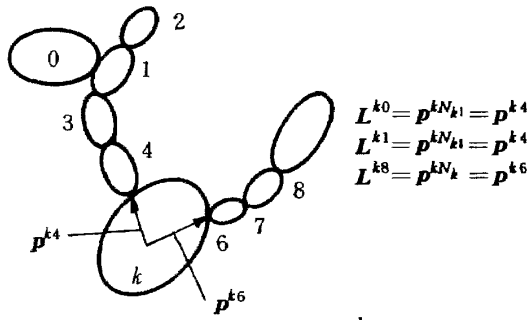
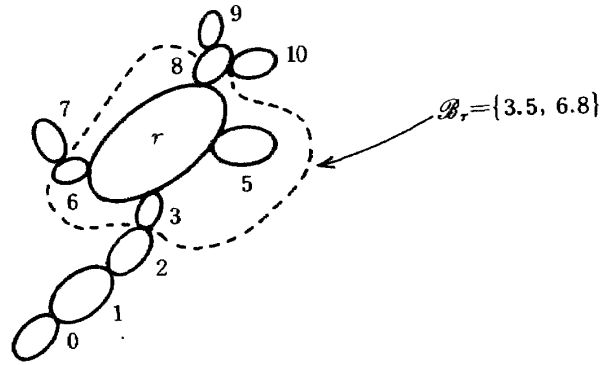
図 2.3.2 第 k サブストラクチャ ($j < k$) (Likins¹⁾ による)



$$\begin{aligned} N_{kv} &= r, & N_{kr} &= r, & N_{k\pi} &= r \\ N_{k\rho} &= \beta, & N_{k\beta} &= \beta \\ N_{k\alpha} &= \alpha \\ N_{k0} &= N_k = r \end{aligned}$$

図 2.3.3 ネットワーク・エレメント N_{kr} の例

- (12') 物体 b_j と物体 b_k 間のヒンジ点の o_k からの位置ベクトルを \mathbf{p}^{kj} とする。
- (33) $r \in \mathcal{B} - k$ について、 $\mathbf{L}^{kr} \triangleq \mathbf{p}^{kN_{kr}}$ とする。即ち、 \mathbf{L}^{kr} は物体 b_r へ通じるパス上にあり、物体 b_k の中心からヒンジ点までのベクトルを表わす。

図 2.3.4 ベクトル L^{kr} の例図 2.3.6 物体番号の集合 B_r の例

$$(34) \quad k \in B \text{ について, } D^{kk} \triangleq - \sum_{j \in B} L^{kj} m_j / m \text{ とす}$$

る。ここで, m_j はサブストラクチャ s_j の質量, m は全系の質量を表わす。

$$(35) \quad o_k \text{ から } D^{kk} \text{ を位置ベクトルとするような点 } b_k \text{ をバリセンタと呼ぶ。}$$

$$(36) \quad D^{kj} \triangleq D^{kk} + L^{kj}, \quad k \in B, \quad j \in B \text{ とする。}$$

$$(37) \quad \text{ダイヤディック } K^k \triangleq \sum_{r \in B} m_r (D^{kr} \cdot D^{kr} U -$$

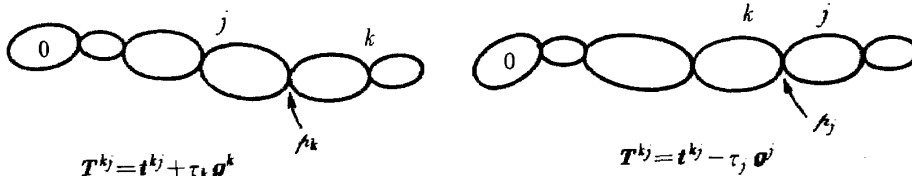
$D^{kr} D^{kr}) \quad k \in B, \quad U \text{ は単位ダイヤディックで物体 } b_k \text{ の物体座標系 } \{b^k\} \text{ で定義される。}$

$$(38) \quad \text{ダイヤディック } \phi^{kk} \triangleq K^{kk} + J^k, \text{ ここで } J^k \text{ はサブストラクチャ } s_k \text{ の点 } o_k \text{ まわりの慣性ダイヤディックで, 柔軟体の変形と共に変化する量である。}$$

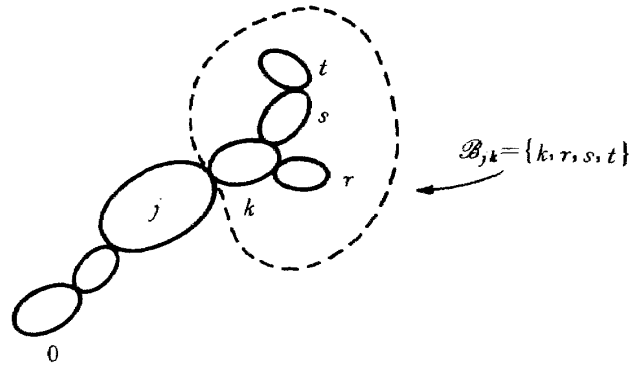
$$(39) \quad \text{ダイヤディック } \phi^{kj} \triangleq -m (D^{jk} \cdot D^{kj} U - D^{jk} D^{kj})$$

$$(41) \quad t^{kj} \text{ をキネマティックな拘束トルクとすると, ヒンジから伝わるトルク } T^{kj} \text{ は,}$$

$$T^{kj} = t^{kj} + \delta_{jN_k} \tau_k g^k - \delta_{kN_j} \tau_j g^j$$

図 2.3.5 拘束トルク T^{kj} の例

$$(44) \quad B_{jk} \text{ を「ブランチ・セット」と呼び, 物体 } b_j \text{ につながっていて, 物体 } b_j \text{ ではじまるブランチの全物体番号の集合を表わす。即ち, } k = N_{jr} \text{ ならば, } r \in B_{jk} \text{ である。}$$

図 2.3.7 ブランチ・セット B_{jk} の例

2.3.2.2 ベクトル・ダイヤディック方程式

各々のサブストラクチャについての, ニュートンの運動方程式を考える。

$$F_r^r = m_r A^r \quad r \in B \quad (1-1)$$

$$T_r^r = \dot{H}^r \quad r \in B \quad (1-2)$$

ここで, F_r^r, T_r^r, A^r, H^r はそれぞれ, サブストラクチャ s_r についての合力, 全トルク, 加速度及び角運動量であり, (1-1) 式は

$$F^r + \sum_{s \in B_r} f^{rs} - m_r (\ddot{x}^r + \ddot{\rho}^r) = 0 \quad (2)$$

(2) 式を r について和をとることによって,

$$F = m \ddot{x} \quad (9)$$

全系の運動方程式(9)が得られる。(1-2) 式は k

$$(43) \quad B_r \text{ を物体 } b_r \text{ に隣接している物体の番号の集合とする。}$$

として,

$$\mathbf{T}^k + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{T}^{kj} + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} (\mathbf{p}^{kj} + \mathbf{c}^k) \times \mathbf{f}^{kj} - \dot{\mathbf{H}}^k = 0$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 外部トルク ヒンジによる ヒンジからの内力
 内部トルク によるトルク

(3)

(3)式の中の角運動量ベクトル \mathbf{H}^k は、ロータの寄与 \mathbf{h}^k も考慮すれば,

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k + m_k \dot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k + \mathbf{h}^k + \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm \quad (5)$$

(5)式を微分して(3)式へ代入すると,

$$\mathbf{T}^k + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{T}^{kj} + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{p}^{kj} \times \mathbf{f}^{kj} + \mathbf{c}^k \times \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{f}^{kj}$$

$$- \frac{i}{dt} (\mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) - m_k \dot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k - \dot{\mathbf{h}}^k - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm = 0 \quad (6)$$

(6)式の中で、内力 \mathbf{f}^{kj} 及び内部トルク \mathbf{T}^{kj} は消去しなければならない。また、最後の $\int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm$ の項は柔軟付属物のモデルを決定しないと求められない量である。(本節では、柔軟付属物のモデルは規定しない。)

以下、 \mathbf{f}^{kj} と \mathbf{T}^{kj} の消去を考える。まず、 \mathbf{f}^{kj} は(2)、(9)式より、

$$\sum_{s \in \mathcal{B}_r} \mathbf{f}^{rs} = -\mathbf{F}^r + m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^r) \quad (10)$$

この式を、 $r \in \mathcal{B}_{kj}$ について和をとれば、図2.3.8のように、各内力は反力で消えてしまい、残るのは \mathbf{f}^{jk} だけである。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{jk} &= \sum_{r \in \mathcal{B}_{kj}} \sum_{s \in \mathcal{B}_r} \mathbf{f}^{rs} \\ &= - \sum_{r \in \mathcal{B}_{kj}} [\mathbf{F}^r - m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^r)] \end{aligned}$$

\mathbf{f}^{kj} は \mathbf{f}^{jk} の反力だから、

$$\mathbf{f}^{kj} = -\mathbf{f}^{jk} = \sum_{r \in \mathcal{B}_{kj}} [\mathbf{F}^r - m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^r)] \quad (11)$$

(10)、(11)式を(6)式に代入して、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^k + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{T}^{kj} + \sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{p}^{kj} \times \sum_{r \in \mathcal{B}_{kj}} [\mathbf{F}^r - m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^r)] \end{aligned}$$

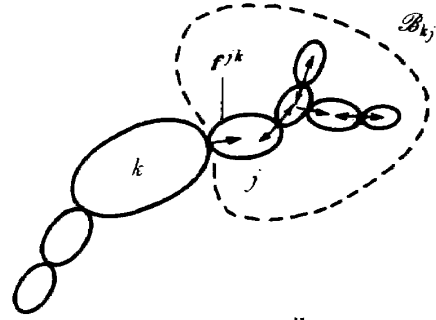


図2.3.8 内力 \mathbf{f}^{jk} の求め方

$$\begin{aligned} &+ \mathbf{c}^k \times [-\mathbf{F}^k + m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^k)] - \frac{i}{dt} (\mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) \\ &- m_k \dot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k - \dot{\mathbf{h}}^k - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm = 0 \quad (k \in \mathcal{B}) \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式の第3項は、2.3.2.1の定義(33)~(36)を用いて、

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathcal{B}_k} \mathbf{p}^{kj} \times \sum_{r \in \mathcal{B}_{kj}} [\mathbf{F}^r - m_r (\mathbf{F}/m + \ddot{\mathbf{p}}^r)] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{B}} (\mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r - \mathbf{L}^{kr} \times m_r \ddot{\mathbf{p}}^r) \end{aligned} \quad (13)$$

と書き直せる。そして、(12)式を $k \in \mathcal{B}$ について和をとれば、内部トルク $\sum \mathbf{T}^{kj}$ は消去できる。

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathcal{B}} \{ \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} (\mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r - \mathbf{L}^{kr} \times m_r \ddot{\mathbf{p}}^r) \\ &\quad + \mathbf{c}^k \times [m_k (\ddot{\mathbf{p}}^k + \mathbf{F}/m) - \mathbf{F}^k] \\ &\quad - \frac{i}{dt} (\mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) - m_k \dot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k - \dot{\mathbf{h}}^k \\ &\quad - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm \} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

この(14)式が全系の回転運動を記述する方程式である。

次に各ヒンジ軸回りの回転運動を表わす方程式を求めるには、(12)式を $k \in \mathcal{B}_{N_s s}$ で和をとる。すると $\mathbf{T}^{s N_s}$ だけが残る、

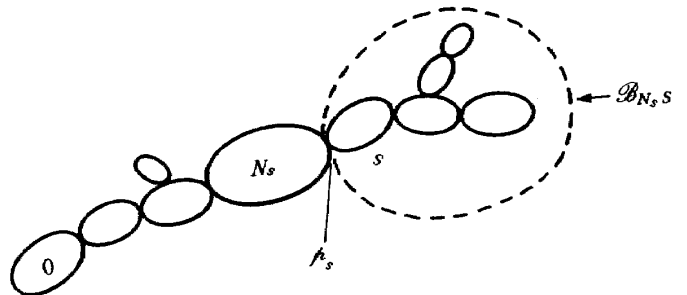


図2.3.9 トルク \mathbf{T}^{SN_s} の求め方

$$\begin{aligned}
& \mathbf{T}^{sN_s} + \sum_{k \in \mathcal{B}_{N_s, s}} \{ \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} (\mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r - \mathbf{L}^{kr} \times m_r \ddot{\mathbf{r}}^r) \\
& + \mathbf{c}^k \times [m_k (\ddot{\mathbf{r}}^k + \mathbf{F}/m) - \mathbf{F}^k] - \frac{i}{dt} (\mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) \\
& - m_k \ddot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k - \dot{\mathbf{h}}^k - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm = 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

定義(4)より

$$\mathbf{T}^{sN_s} = \tau_s \mathbf{g}^s + \mathbf{t}^{sN_s}$$

(15)式と \mathbf{g}^s で内積をとることによって τ_s を求めることができる。

$$\begin{aligned}
& \tau_s + \mathbf{g}^s \cdot \sum_{k \in \mathcal{B}_{N_s, s}} \{ \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} (\mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r - \mathbf{L}^{kr} \times m_r \ddot{\mathbf{r}}^r) \\
& + \mathbf{c}^k \times [m_k (\ddot{\mathbf{r}}^k + \mathbf{F}/m) - \mathbf{F}^k] - \frac{i}{dt} (\mathbf{J}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) \\
& - m_k \ddot{\mathbf{c}}^k \times \mathbf{c}^k - \dot{\mathbf{h}}^k - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

(14), (16)式の中に出てくる $\boldsymbol{\rho}^r$ は, 全系のジオメトリックな関係 (図 2.3.10) より

$$\boldsymbol{\rho}^r = \sum_{s \in \mathcal{B}} (\mathbf{D}^{sr} + \frac{m_s}{m} \mathbf{c}^s) - \mathbf{c}^r \quad (19)$$

と求められ, これより

$$\mathbf{c}^k \times m_k \ddot{\boldsymbol{\rho}}^k = m_k \mathbf{c}^k \times \left[\sum_{r \in \mathcal{B}} (\ddot{\mathbf{D}}^{rk} + \frac{m_r}{m} \ddot{\mathbf{c}}^r) - \ddot{\mathbf{c}}^k \right] \quad (20)$$

また,

$$-\sum_{r \in \mathcal{B}} \mathbf{L}^{kr} \times m_r \ddot{\boldsymbol{\rho}}^r = -\frac{i}{dt} (\mathbf{K}^k \cdot \boldsymbol{\omega}^k) + \sum_{r \in \mathcal{B}} m_r \mathbf{D}^{kr} \times \ddot{\mathbf{c}}^r$$

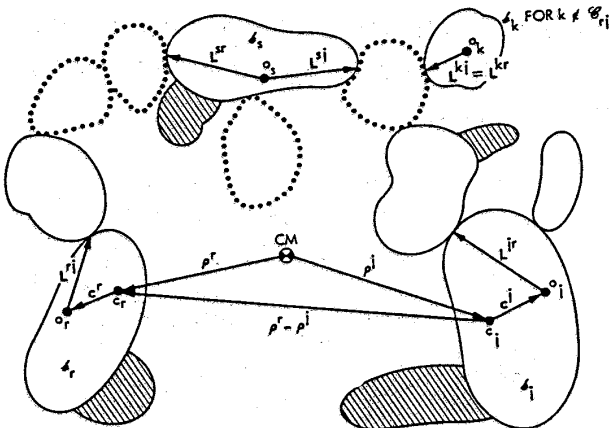


図 2.3.10 システム・ジオメトリ (Likins¹⁾による)

これらの式を(14), (16)式に代入すると, (14)式は,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathcal{B}} \{ \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} \mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r + \mathbf{c}^k \times (\frac{m_k}{m} \mathbf{F} - \mathbf{F}^k) \\
& + \sum_{r \in \mathcal{B}} m_r \mathbf{D}^{kr} \times \ddot{\mathbf{c}}^r + m_k \mathbf{c}^k \times \sum_{r \in \mathcal{B}} (\ddot{\mathbf{D}}^{rk} + \frac{m_r}{m} \ddot{\mathbf{c}}^r) \\
& - \frac{i}{dt} (\boldsymbol{\phi}^{kk} \cdot \boldsymbol{\omega}^k) + \sum_{r \in \mathcal{B}-k} m \mathbf{D}^{kr} \times \ddot{\mathbf{D}}^{rk} - \dot{\mathbf{h}}^k \\
& - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm \} = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

また, (16)式は,

$$\begin{aligned}
& \tau_s + \mathbf{g}^s \cdot \sum_{k \in \mathcal{B}} \varepsilon_{sk} \{ \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} \mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r + \mathbf{c}^k \times (\frac{m_k}{m} \mathbf{F} - \mathbf{F}^k) \\
& + \sum_{r \in \mathcal{B}} m_r \mathbf{D}^{kr} \times \ddot{\mathbf{c}}^r + m_k \mathbf{c}^k \times \sum_{r \in \mathcal{B}} (\ddot{\mathbf{D}}^{rk} + \frac{m_r}{m} \ddot{\mathbf{c}}^r) \\
& - \frac{i}{dt} (\boldsymbol{\phi}^{kk} \cdot \boldsymbol{\omega}^k) + \sum_{r \in \mathcal{B}-k} m \mathbf{D}^{kr} \times \ddot{\mathbf{D}}^{rk} - \dot{\mathbf{h}}^k \\
& - \frac{i}{dt} \int_{a_k} \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}} dm = 0 \quad (24)
\end{aligned}$$

(23), (24)式が, 内力と内部トルクを消去した形の運動方程式であり, これらの中に含まれる時間微分項は, 例えば,

$$\ddot{\mathbf{D}}^{rk} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^r \times \mathbf{D}^{rk} + \boldsymbol{\omega}^r \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{D}^{rk}) \quad (25)$$

のように求めることができる。(23), (24)式をさらにまとめると, 最終的に以下のように書き表わせる。

$$\sum_{k \in \mathcal{B}} \mathbf{W}^k = 0 \quad (31)$$

$$\tau_s + \mathbf{g}^s \cdot \sum_{k \in \mathcal{B}} \varepsilon_{sk} \mathbf{W}^k = 0 \quad (32)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^k = & \mathbf{T}^k + \sum_{r \in \mathcal{B}} \mathbf{D}^{kr} \times \mathbf{F}^r + \mathbf{c}^k \times (\frac{m_k}{m} \mathbf{F} - \mathbf{F}^k) \\
& + \sum_{r \in \mathcal{B}} m_r \mathbf{D}^{kr} \times [\ddot{\mathbf{c}}^r + 2\boldsymbol{\omega}^r \times \dot{\mathbf{c}}^r + \dot{\boldsymbol{\omega}}^r \times \mathbf{c}^r + \boldsymbol{\omega}^r \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{c}^r)] \\
& + m_k \mathbf{c}^k \times \sum_{r \in \mathcal{B}} [\dot{\boldsymbol{\omega}}^r \times \mathbf{D}^{rk} + \boldsymbol{\omega}^r \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{D}^{rk})] \\
& + m_k \mathbf{c}^k \times \sum_{r \in \mathcal{B}} \frac{m_r}{m} [\ddot{\mathbf{c}}^r + 2\boldsymbol{\omega}^r \times \dot{\mathbf{c}}^r + \dot{\boldsymbol{\omega}}^r \times \mathbf{c}^r + \boldsymbol{\omega}^r \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{c}^r)] \\
& - \boldsymbol{\phi}^{kk} \cdot \boldsymbol{\omega}^k - \sum_{r \in \mathcal{B}-k} (\boldsymbol{\phi}^{kr} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^r) + m \sum_{r \in \mathcal{B}-k} \mathbf{D}^{kr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [\omega^r \times (\omega^r \times D^r k)] - \omega^r \times \phi^{kk} \cdot \omega^k - \dot{h}^k - \omega^k \\ & \times h^k - \phi^{kk} \cdot \omega^k - \int_{a_k} p \times \ddot{p} dm - \omega^k \times \int_{a_k} p \times \dot{p} dm \end{aligned} \quad (33)$$

(9), (31), (33)式で, 全系の並進と回転, 各ヒンジの回転に関する, 計 $(n+6)$ 個の運動方程式が得られたことになる。独立変数は, 全系の重心の位置ベクトル x , 物体 b_0 の角速度ベクトル ω_0 , 各ヒンジでの回転角 r_1, r_2, r_n の $(n+6)$ 個である。これらより, (33)式の中の ω^k は

$$\omega^k = \omega^0 + \sum_{r \in \mathcal{O}} \varepsilon_{rk} \dot{r}_r g^r \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^k = \dot{\omega}^0 + \sum_{r \in \mathcal{O}} \varepsilon_{rk} [\ddot{r}_r g^r + \omega^0 \times \dot{r}_r g^r \\ + \sum_{s \in \mathcal{O}} \varepsilon_{sr} \dot{r}_s g^s \times \dot{r}_r g^r] \end{aligned} \quad (35)$$

となり, ω^0 と $r_1 \sim r_n$ で表現できる。また, 同式中のロータの寄与 h^k については, ロータの軸トルク τ_{ks}^R とすれば,

$$\tau_{ks}^R = \mathcal{J}_{ks} (\ddot{\phi}_{ks} + b^{ks} \cdot \dot{\omega}^k) \quad (36)$$

ここで, \mathcal{J}_{ks} はロータの慣性モーメント, ϕ_{ks} は物体座標系からみたロータの回転角, b^{ks} はロータの回転軸方向の単位ベクトルである。これより,

$$h^k = \sum_{s=1}^{N_k} \mathcal{J}_{ks} \dot{\phi}_{ks} b^{ks} \quad (37)$$

(37)式を(33)式に代入すればよい。 τ_{ks}^R については, 別の制御則などで, あらかじめ得られなければならない。

2.3.3 まとめ及び評価

本論文は同著者による参考文献(2)(2.11.3)の続編である。参考文献(1)では, 剛体についての柔軟付属物を n 個の剛体ノードで近似したモデルを対象にして, $6n$ 自由度の運動方程式を求め, それを座標トランケートによって, $6n$ 以下のモード座標系に変換しているが, レファレンス物体の運動を記述するためのキネマティックな変数は決定されていなかった。そこで, 本論文では, それらの欠点を補って $(n+6)$ 個のスカラー運動方程式が導かれている。この結果は, Hooker-Margulies³⁾ の方程式 (点結合によるトポロジー木構造剛体系) に似ている。

本論文による定式化の特徴は次のようにまとめら

れるだろう。

- (1) 各システムは本質的に剛体であり, 柔軟体は付属物として取扱う。
- (2) 内力, 内部トルクは消去される。
- (3) ある任意のノミナル形状における, 各サブストラクチャの物体座標系 $\{b^k\}$ はすべて一致するという仮定は, あまり現実的でない。
- (4) 記号, 記法に関しては細かな配慮がなされており, 安心して読める。

2.4 Hooker¹⁾

2.4.1 概要

この定式化法で取扱える対象は (図 2.4.1),

- トポロジー木構造
- 先端のボディは柔軟体
- ヒンジは回転自由度のみを有する

Newton-Euler 方程式を用い未知の拘束力, 拘束トルクを消去し, 最小次 $(3+r+n_e)$; r は全回転自由度, n_e はモード数) の方程式を得る。但し, 柔軟体の振動方程式のみは, Lagrange 法による。この

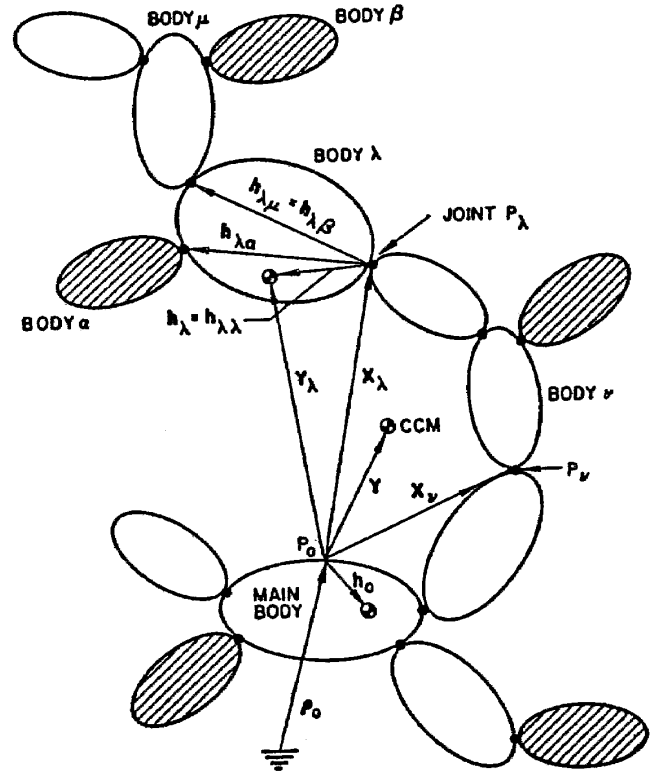


図 2.4.1 衛星コンフィギュレーション (Hooker¹⁾による)
(斜線は柔軟ボディを表わす)

とき、独立変数は、レファレンスボディの任意点の並進(ρ_0)、隣接するボディ間の相対角速度(Ω)及びモード座標(ξ)である。拘束力、拘束トルクの消去は以下の2つの考え方に基いている。

- 回転運動の式をジョイントまわりで表現することによって、拘束力は回転運動方程式に表われない。これは $H_0^{(2)}$ のアイディアに基くものであり、Hooker, Margulies³⁾ の提案したバリセンタは不要となる。
- 回転運動における未知拘束トルク成分は、拘束トルクをジンバル軸方向に射影することにより消去する⁴⁾

2.4.2 本 論

2.4.2.1 弾性変形と振動モードの取扱い

各柔軟体 $d \in \mathcal{F}$ にノミナル座標系を考え、質量エレメント dm の位置を $\mathbf{r} + \mathbf{u}$ で表わす。 \mathbf{r} はヒンジ P_α から dm までの非変形時のベクトルで、 \mathbf{u} は柔軟体に起因する変位であり、有限個 (q 個) のモードで $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum \xi_{\alpha q}(t) \phi_{\alpha q}(\mathbf{r})$ とする。このモード解析には、モードシェープ $\phi_{\alpha q}(\mathbf{r})$ が P_α で零となる境界条件を用いる。線形弾性のみを仮定し、 $\xi_{\alpha q}$ は微小とする。最終式に表われるのは以下の積分値である。

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha p} &= \int \phi_{\alpha p} dm, \quad d_{\alpha p}^{(0)} = \int \mathbf{r} \times \phi_{\alpha p} dm \\ z_{\alpha pq} &= \int \phi_{\alpha p} \times \phi_{\alpha q} dm, \\ d_{\alpha p} &= \int (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \phi_{\alpha p} dm \\ B_{\alpha p} &= \int (2\mathbf{r} \cdot \phi_{\alpha p} \mathbf{1} - \mathbf{r} \phi_{\alpha p} - \phi_{\alpha p} \mathbf{r}) dm \\ C_{\alpha pq} &= \int (\phi_{\alpha p} \cdot \phi_{\alpha q} \mathbf{1} - \phi_{\alpha p} \phi_{\alpha q}) dm \\ e_{\alpha pq} &= \int \phi_{\alpha p} \cdot \phi_{\alpha q} dm \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

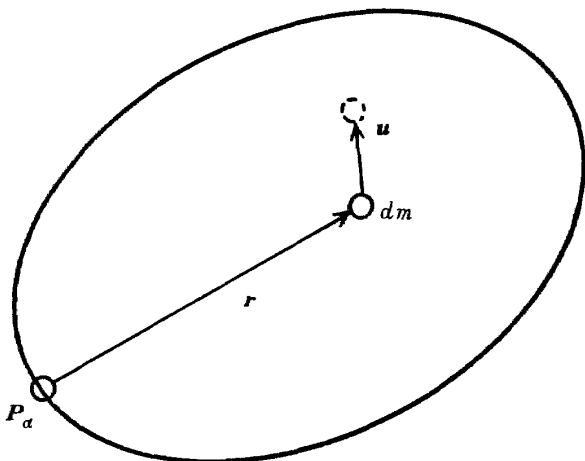


図 2.4.2 弾性変形の記述

2.4.2.2 並進/回転運動

全系 S の並進運動はヒンジ拘束力の除外された形で表わされる。

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \mathbf{F}_{\lambda} &= \sum_{\lambda} m_{\lambda} (\ddot{\mathbf{p}}_0 + \ddot{\mathbf{Y}}_{\lambda}) \\ &= m \ddot{\mathbf{p}}_0 + \sum_{\lambda} m_{\lambda} \sum_{\mu \leq \lambda} [\boldsymbol{\omega}_{\mu} \times \mathbf{h}_{\mu\lambda} + \boldsymbol{\omega}_{\mu} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mu} \times \mathbf{h}_{\mu\lambda})] \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} (2\boldsymbol{\omega}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{h}}_{\alpha} + \ddot{\mathbf{h}}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

但し、 \mathbf{F}_{λ} はボディ λ に作用する外力、 m_{λ} は λ の質量、 \mathbf{p}_0 は慣性空間原点から、任意に定めたレファレンス・ボディ 0 上の点 P_0 までのベクトル、 \mathbf{Y}_{λ} は、 P_0 からボディ λ の質量中心までのベクトルである。また、 $\mathbf{h}_{\mu\lambda}$ は μ の 0 側のヒンジ P_{μ} からボディ λ ($\lambda > \mu$) へつづくボディ μ 上のヒンジまでのベクトルであり (図 2.4.1 参照)、 $\boldsymbol{\omega}_{\mu}$ はボディ μ の角速度ベクトルである。インデックス α は柔軟なボディを表わし ($\alpha \in \mathcal{F}$)、 $\boldsymbol{\omega}_{\alpha}$ は α のノミナル座標系の角速度ベクトルである。 \mathbf{h}_{α} はヒンジ P_{α} から α の質量中心までのベクトルである。なお $(\dot{})$ 、 $(\ddot{})$ はそれぞれ、慣性空間座標、各ボディ座標における時間微分とする。 \sum_{λ} は柔軟ボディを含む全系に関する総和、 \sum_{α} は柔軟ボディ α 全体に関する総和である。

ここで、

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mu} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \sum_{0 < \nu \leq \mu} \dot{\mathbf{Q}}_{\nu} + \boldsymbol{\Psi}_{\mu} = \sum_{\nu \leq \mu} \dot{\mathbf{Q}}_{\nu} + \boldsymbol{\Psi}_{\mu} \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{Q}_{\lambda} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_0, & \text{if } \lambda = 0 \\ \lambda \text{ の } P_{\lambda} \text{ でつながるボディとの相対角速度ベクトル}, & \text{if } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\lambda} = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, & \text{if } \lambda = 0 \\ \sum_{k \in S_{\lambda}} \dot{\gamma}_k \mathbf{g}_k, & \text{if } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mu} = \sum_{\lambda \leq \mu} \left(\sum_{k \in S_{\lambda}} \dot{\gamma}_k \mathbf{g}_k \right)$$

但し、 \mathbf{g}_k は $k \in S_{\lambda}$ ジンバル軸方向の単位ベクトル (ヒンジ P_{λ} での全ジンバル軸インデックスの集合が S_{λ}) である。

更に (2.4.2) 式のうち柔軟体をモードデータ、(2.4.1) 式で表わす。

$$m_{\alpha} \mathbf{h}_{\alpha} = \int_{\alpha} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) dm$$

$$m_a \dot{\mathbf{h}}_a = \int_a \dot{\mathbf{u}} dm = \sum_p \dot{\xi}_{ap} \sigma_{ap}$$

$$m_a \ddot{\mathbf{h}}_a = \sum_p \ddot{\xi}_{ap} \sigma_{ap} \quad (2.4.4)$$

(2.4.3), (2.4.4) 式より (2.4.2) 式は,

$$m \ddot{\mathbf{p}}_0 - \sum_\nu \left[\sum_{\lambda \leq \nu} m_\lambda (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) \right] \times \dot{\mathbf{Q}}_\nu + \sum_a \sum_p \ddot{\xi}_{ap} \sigma_{ap}$$

$$= \sum_\lambda (\mathbf{F}_\lambda - m \mathbf{V}_\lambda) - 2 \sum_a m_a \boldsymbol{\omega}_a \times \dot{\mathbf{h}}_a. \quad (2.4.5)$$

但し $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{X}_\lambda + \mathbf{h}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} \mathbf{h}_{\mu\lambda}$ は P_0 から λ の質量中心までのベクトル, $\mathbf{V}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} [\boldsymbol{\omega}_\mu \times (\boldsymbol{\omega}_\mu \times \mathbf{h}_{\mu\lambda}) + \phi_\mu \times \mathbf{h}_{\mu\lambda}]$ である。

一方, 回転運動方程式は, ヒンジ P_ν まわりで, P_ν より, レファレンス・ボディ 0 に遠い側のボディ λ ($\geq \nu$) の集合について記述する。

$$\mathbf{T}_\nu^H + \sum_{\lambda \geq \nu} [\mathbf{T}_\lambda + (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) \times \mathbf{F}_\lambda]$$

$$= \sum_{\lambda \geq \nu} \int_\lambda (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu + \mathbf{r}^* - \mathbf{h}_\lambda)$$

$$\times (\ddot{\mathbf{p}}_0 + \ddot{\mathbf{Y}}_\lambda + \ddot{\mathbf{r}}^* - \ddot{\mathbf{h}}_\lambda) dm \quad (2.4.6)$$

但し, \mathbf{T}_ν^H はヒンジ P_ν をとおしてボディ ν に作用するヒンジ拘束トルクであり, $\nu=0$ のとき $\mathbf{T}_\nu^H = 0$, また

$$\mathbf{r}^* = \begin{cases} \mathbf{r} & \lambda \notin \mathcal{F} \\ \mathbf{r} + \mathbf{u} & \lambda \in \mathcal{F} \end{cases}$$

さて

$$\int_\lambda \mathbf{r}^* dm = m_\lambda \mathbf{h}_\lambda$$

$$\int_\lambda (\mathbf{r}^* - \mathbf{h}_\lambda) \times [\boldsymbol{\omega}_\lambda \times (\mathbf{r}^* - \mathbf{h}_\lambda)] dm = \boldsymbol{\phi}_\lambda \cdot \boldsymbol{\omega}_\lambda$$

$$\int_a (\mathbf{r}^* - \mathbf{h}_a) \times (\dot{\mathbf{r}}^* - \dot{\mathbf{h}}_a) dm = \int_a (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{h}_a) \times \dot{\mathbf{u}} dm$$

$$= \sum_p \dot{\xi}_{ap} \mathbf{d}_{ap} - m_a \mathbf{h}_a \times \dot{\mathbf{h}}_a \quad (2.4.7)$$

を式(2.4.6)に代入すると,

$$\left[\sum_{\lambda \geq \nu} m_\lambda (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) \right] \times \dot{\mathbf{p}}_0$$

$$+ \sum_\mu \sum_{\lambda \geq \mu, \nu} [\boldsymbol{\phi}_\lambda - m_\lambda (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\mu)] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_\mu$$

$$+ \sum_{a \geq \nu} \sum_p [(\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_\nu) \times \sigma_{ap} + \mathbf{d}_{ap}] \ddot{\xi}_{ap}$$

$$= \mathbf{T}_\nu^H + \sum_{\lambda \geq \nu} [\mathbf{T}_\lambda + (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) \times \mathbf{F}_\lambda - \boldsymbol{\omega}_\lambda \times \boldsymbol{\phi}_\lambda \cdot \boldsymbol{\omega}_\lambda$$

$$- \boldsymbol{\phi}_\lambda \cdot \boldsymbol{\Psi}_\lambda - m_\lambda (\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{X}_\nu) \times \mathbf{V}_\lambda]$$

$$- \sum_{a \geq \nu} [\dot{\boldsymbol{\phi}}_a \cdot \boldsymbol{\omega}_a + m_a (\mathbf{Y}_a - \mathbf{X}_\nu) \times (2 \boldsymbol{\omega}_a \times \dot{\mathbf{h}}_a)$$

$$- m_a \boldsymbol{\omega}_a \times (\mathbf{h}_a \times \dot{\mathbf{h}}_a) + \boldsymbol{\omega}_a \times \sum_p \dot{\xi}_{ap} \mathbf{d}_{ap}] \quad (2.4.8)$$

ここで, $\boldsymbol{\phi}_a$ は柔軟ボディ a の質量中心まわりの慣性ダイアディックであるが, 上式右辺の a の総和の項は $\dot{\boldsymbol{\phi}}_a$ のかわりに $\dot{\mathbf{I}}_a$ (\mathbf{I}_a は P_a まわりに慣性ダイアディック) を用いるとより簡単に表現できる。

式(2.4.8)は, $\nu=0$ のとき $\mathbf{T}_\nu^H = 0$ であり, 全系 S のトルク方程式である。レファレンス・ボディの座標系でスカラー方程式とできる。また $\nu \neq 0$ のときは, ヒンジ ν でのジンバル軸 \mathbf{g}_i ($i \in S_\nu$) に射影し未知のジンバル拘束トルク \mathbf{T}_ν^H を除去する⁴⁾

2.4.2.3 振動方程式

Lagrange 法によって, ξ_{ap} 座標に対応する振動方程式を作成する。全系の運動エネルギー \mathcal{K} は,

$$\mathcal{K} = \sum_\lambda \mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_\lambda |\dot{\mathbf{p}}_0 + \dot{\mathbf{X}}_\lambda + \dot{\mathbf{r}}|^2 dm, & \lambda \notin \mathcal{F} \\ \frac{1}{2} \int_\lambda |\dot{\mathbf{p}}_0 + \dot{\mathbf{X}}_\lambda + \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}|^2 dm, & \lambda \in \mathcal{F} \end{cases}$$

となり, $\lambda = a$ のときだけ ξ_{ap} , $\dot{\xi}_{ap}$ に依存する:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \sum_p \xi_{ap} \boldsymbol{\phi}_{ap} = \sum_p \dot{\xi}_{ap} \boldsymbol{\phi}_{ap} + \boldsymbol{\omega}_a \times \sum_p \xi_{ap} \boldsymbol{\phi}_{ap}.$$

したがって振動方程式は

$$Q_{ap} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\xi}_{ap}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi_{ap}}$$

$$= \int_a (\dot{\mathbf{p}}_0 + \dot{\mathbf{X}}_a + \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\phi}_{ap} dm$$

$$= \sigma_{ap} \cdot (\ddot{\mathbf{p}}_0 + \ddot{\mathbf{X}}_a) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_a \cdot \mathbf{d}_{ap}$$

$$- \boldsymbol{\omega}_a \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}_{ap} + \sum_q \mathbf{C}_{aqp} \xi_{aq} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_a$$

$$+ 2 \boldsymbol{\omega}_a \cdot \sum_q \dot{\xi}_{aq} \mathbf{Z}_{aqp} + \sum_q \ddot{\xi}_{aq} \mathbf{e}_{aqp} \quad (2.4.9)$$

但し Q_{ap} は ξ_{ap} に対応する一般化力で

$$Q_{ap} = - \sum_q (K_{apq} \xi_{aq} + D_{apq} \dot{\xi}_{aq}) \\ + \int_{v_a} \phi_{ap} \cdot f_v dv + \int_{s_a} \phi_{ap} \cdot f_s ds$$

(K_{apq}) , (D_{apq}) はそれぞれ剛性, 減衰行列で, f_v はボディ α の作用力の体積密度 (重力など), f_s は面積密度 (太陽輻射圧, 空力ドラッグなど) である。 $\dot{\omega}_\alpha$ を $\dot{\mathcal{Q}}_\nu$ を使って表わし, 最高次微係数を左辺に集めると (2.4.9) 式は

$$\sigma_{ap} \cdot \ddot{\rho}_0 + \sum_{\nu \leq a} [(X_\alpha - X_\nu) \times \sigma_{ap} + d_{ap}] \cdot \dot{\mathcal{Q}}_\nu + \sum_q \ddot{\xi}_{aq} e_{aqp} \\ = Q_{ap} + \omega_\alpha \cdot \left[\left(\frac{1}{2} B_{ap} + \sum_q C_{apq} \xi_{aq} \right) \cdot \omega_\alpha \right. \\ \left. - 2 \sum_q \xi_{aq} z_{qp} \right] - \sigma_{ap} \cdot (V_\alpha - v_\alpha) - d_{ap} \cdot \Psi_\alpha. \quad (2.4.10)$$

となる。

2.4.3 ま と め

最終的に, (2.4.5) — 全系の並進運動, (2.4.8) — ヒンジの回転運動, および (2.4.10) 式 — 弾性体の振動, が得られ, 未知拘束力を除外した式が, $\ddot{\rho}_0$, $[\dot{\mathcal{Q}}_\mu]$ および $[\ddot{\xi}_{pq}]$ について $(3+r+n_e)$ 次として得られる。

2.5 Frisch¹⁾

2.5.1 概 要

Frisch の方法は Newton-Euler 方程式に基づいて汎用プログラム用のアルゴリズムを導いたもので, 内力の消去法などは一般的な手法を用いている。

対象: トポロジー木構造, 柔軟体, 対称ホイール可

ヒンジ自由度: 回転 3 自由度 (ヒンジの先のボディが一般のボディのとき)

並進 3 自由度 (ヒンジの先のボディが質点のとき)

力学上の原理: Newton-Euler 方程式

内力消去法: あるヒンジ点からそのネステッド・ボディ (ヒンジ点より外側のボディの集合) の運動方程式の和をとることによってヒンジ点以外に働く内力, 内トルクを消去。ヒンジ点に働く内力, 内トルクの消去は自由度方向の単位ベクトルとの内積をとること

による。

注目点: Newton-Euler 方程式に基づく明快な式の導出, 汎用プログラム化 (N-BON)

独立変数: プリンシパル・ボディの慣性系に対する変位

プリンシパル・ボディの慣性系に対する回転角

各ヒンジの回転角 (ヒンジの先のボディが一般のボディのとき)

各ヒンジの変位 (ヒンジの先のボディが質点のとき)

各ボディのモード変位

対称ホイールの回転角

Frisch の方法で対象とするシステムの概略図を図 2.5.1 に示す。

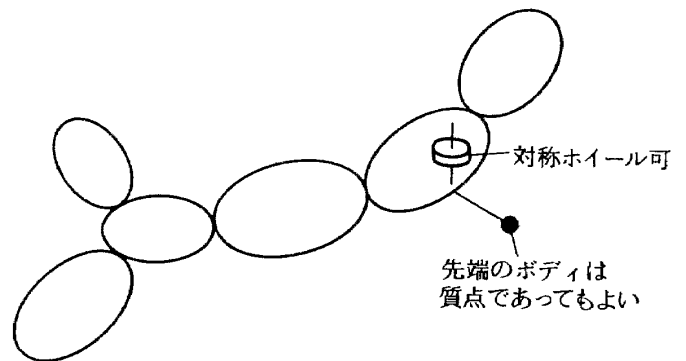


図 2.5.1 Frisch の方法で対象とするシステム

2.5.2 本 論

2.5.2.1 ボディ λ の運動方程式

本節で用いられる記号を図 2.5.2, 図 2.5.3 及び表 2.5.1 に示す。

(1) 運動量, 角運動量とその微分

ボディ λ の運動量, 角運動量の計算式を表 2.5.2 に, またその微分を表 2.5.3 に示す。各表で \cdot は慣性系における時間微分, \circ はボディ λ に固定した座標系における時間微分をあらわす。

(2) 柔軟性に対する振動モードの導入

$\vec{G}_{i,\lambda}$: 慣性系におけるボディ λ の微小要素 i の運動量

$\vec{L}_{i,\lambda}$: 慣性系における微小要素 i の i の質量中心まわりの角運動量

$\phi_{i,\lambda}$: ボディ λ の微小要素 i の i の質量中心まわ

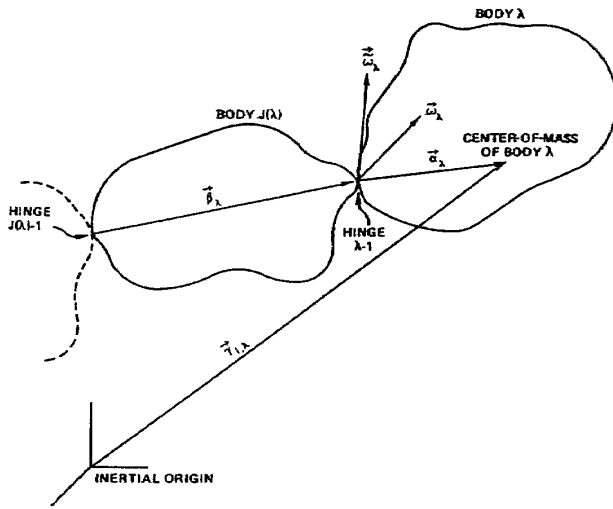


図 2.5.2 隣接するボディ間の関係
(Frisch¹⁾より転載)

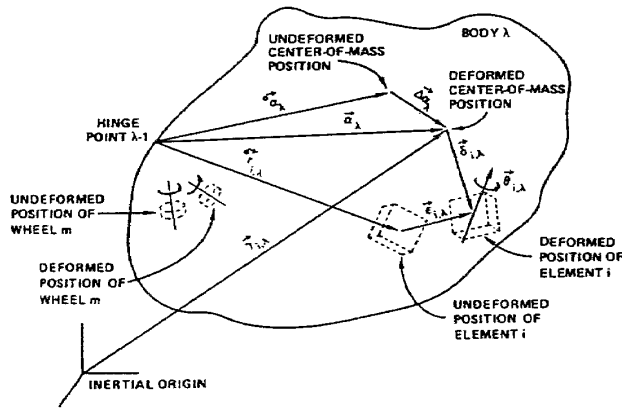


図 2.5.3 ボディ λ の記号
(Frisch¹⁾より転載)

りの慣性テンソル(変形前;左肩の°は変形前をあらわす)

とすると $\vec{G}_{i,\lambda}$, $\vec{L}_{i,\lambda}$ は

$$\vec{G}_{i,\lambda} = m_{i,\lambda} (\dot{\vec{r}}_{i,\lambda} + \dot{\vec{\delta}}_{i,\lambda}) \quad (2.5.1)$$

$$\vec{L}_{i,\lambda} = {}^\circ\Phi_{i,\lambda} \cdot (\vec{\omega}_\lambda + \dot{\vec{\delta}}_{i,\lambda}) \quad (2.5.2)$$

となる。ここで

$$\begin{Bmatrix} \vec{\epsilon} \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon}_{1,\lambda} \\ \vec{\epsilon}_{2,\lambda} \\ \vdots \\ \vec{\theta}_{1,\lambda} \\ \vec{\theta}_{2,\lambda} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \vec{G} \\ \vec{L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{G}_{1,\lambda} \\ \vec{G}_{2,\lambda} \\ \vdots \\ \vec{L}_{1,\lambda} \\ \vec{L}_{2,\lambda} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

とおいて $\vec{\epsilon}$, $\vec{\theta}$ に対する拘束条件を

$$[g] \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon} \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad (2.5.3)$$

とする。いま微小要素 i に働く力をまとめて

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon} \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\epsilon}} \\ \dot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix}$$

とすると微小要素 i の運動方程式は

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vec{G}} \\ \dot{\vec{L}} \end{Bmatrix} = \frac{d^I}{dt} \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\delta}} \\ \vec{\omega} + \dot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon} \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\epsilon}} \\ \dot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix}$$

となり ($\frac{d^I}{dt}$ は慣性系における時間微分),

表 2.5.1 記号表 (1)

$J(\lambda)$	ボディ λ にプリンシパル・ボディ側で隣接するボディの番号
$\vec{\omega}_\lambda$	ボディ λ のヒンジ点 $\lambda-1$ の慣性系に対する角速度
$\vec{\omega}_\lambda$	ボディ λ のヒンジ点 $\lambda-1$ のボディ $J(\lambda)$ のヒンジ点 $J(\lambda)-1$ に対する相対角速度
m_λ	ボディ λ の質量
Φ_λ	ボディ λ の質量中心まわりの慣性テンソル (ホイールを含む)
$m_{i,\lambda}$	ボディ λ の微小要素 i の質量
$\Phi_{i,i,\lambda}$	ボディ λ の微小要素 i の i の質量中心まわりの慣性テンソル
$MO(m)$	対称ホイール m のあるボディの番号
I_{W_m}	対称ホイール m の m の質量中心まわりの慣性テンソル
\vec{H}_m	対称ホイール m のボディ $MO(m)$ に対する相対角運動量
$\vec{G}_{i,\lambda}$	ボディ λ の慣性系に対する運動量
$\vec{L}_{i,\lambda}$	ボディ λ の慣性系原点まわりの角運動量
\vec{H}_m	対称ホイール m の慣性系原点まわりの角運動量

表 2.5.2 運動量, 角運動量の計算 (Frisch¹⁾より転載)

- $\vec{G}_{I,\lambda}$ = linear momentum of flexible body λ relative to the inertial origin

$$\vec{G}_{I,\lambda} = \sum_{i \in \lambda} m_{i,\lambda} (\dot{\vec{r}}_{I,\lambda} + \dot{\vec{\delta}}_{i,\lambda}) = m_\lambda \dot{\vec{r}}_{I,\lambda}$$
- $\vec{L}_{I,\lambda}$ = angular momentum of flexible body λ relative to the inertial origin

$$\begin{aligned} \vec{L}_{I,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} [\phi_{i,i,\lambda} \cdot \dot{\vec{\theta}}_{i,\lambda} + m_{i,\lambda} (\vec{r}_{I,\lambda} + \vec{\delta}_{i,\lambda}) \times (\dot{\vec{r}}_{I,\lambda} + \dot{\vec{\delta}}_{i,\lambda})] + \sum_{\substack{m: \\ MO(m)=\lambda}} \vec{H}_m \\ &= \phi_\lambda \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + m_\lambda \vec{r}_{I,\lambda} \times \dot{\vec{r}}_{I,\lambda} + \Delta \vec{L}_{\lambda,\lambda} + \sum_{\substack{m: \\ MO(m)=\lambda}} \vec{H}_m \end{aligned}$$

$\sum_{\substack{m: \\ MO(m)=\lambda}} = \text{sum over all wheels imbedded in body } \lambda,$

$$\Delta \vec{L}_{\lambda,\lambda} = \sum_{i \in \lambda} [\phi_{i,i,\lambda} \cdot \dot{\vec{\theta}}_{i,\lambda} + m_{i,\lambda} \vec{\delta}_{i,\lambda} \times \dot{\vec{\delta}}_{i,\lambda}]$$
- \vec{H}_m = angular momentum of symmetric wheel m , relative to the inertial origin

$$\vec{H}_m = I_{Wm} \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + \vec{H}_m$$

表 2.5.3 運動量, 角運動量の微分 (Frisch¹⁾より転載)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{G}}_{I,\lambda} &= m_\lambda \ddot{\vec{r}}_{I,\lambda}, \\ \dot{\vec{L}}_{I,\lambda} &= \phi_\lambda \cdot \ddot{\vec{\omega}}_\lambda + m_\lambda \vec{r}_{I,\lambda} \times \ddot{\vec{r}}_{I,\lambda} \\ &\quad + \Delta \dot{\vec{L}}_{\lambda,\lambda} + \sum_{\substack{m: \\ MO(m)=\lambda}} [\dot{\vec{H}}_m + \dot{\vec{\omega}}_\lambda \times \vec{H}_m] \\ &\quad + \dot{\phi}_\lambda \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + \dot{\vec{\omega}}_\lambda \times (\phi_\lambda \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + \Delta \vec{L}_{\lambda,\lambda}) \\ \dot{\vec{H}}_m &= I_{Wm} \cdot \ddot{\vec{\omega}}_\lambda + \dot{\vec{H}}_m + \dot{\vec{\omega}}_\lambda \times (I_{Wm} \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + \vec{H}_m) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{F}^T \\ \vec{F}^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{\epsilon}} \\ \ddot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\epsilon}} \\ \dot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix} \quad (2.5.4)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\vec{\epsilon}} \\ \ddot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\epsilon}} \\ \dot{\vec{\theta}} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\epsilon} \\ \vec{\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \vec{F}^T \\ \vec{F}^R \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

として柔軟性に対する運動方程式が得られる。

次に $\vec{\epsilon}$, $\vec{\theta}$ をモード展開する。(2.5.5)式から $\vec{\epsilon}$, $\vec{\theta}$ に関する (2.5.3) 式の拘束条件をみたすような振動

モードを求め, 微小要素 i の位置における振動モードの値を $\vec{\epsilon}_{i,\lambda}$, $\vec{\theta}_{i,\lambda}$ に対応して $\vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T$, $\vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R$ とすると, $\vec{\epsilon}_{i,\lambda}$, $\vec{\theta}_{i,\lambda}$ は

$$\vec{\epsilon}_{i,\lambda} = \sum_{n,\lambda} a_{n,\lambda}(t) \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T \quad (2.5.6)$$

$$\vec{\theta}_{i,\lambda} = \sum_{n,\lambda} a_{n,\lambda}(t) \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R \quad (2.5.7)$$

とあらわすことができる。ただし $a_{n,\lambda}(t)$ はボディ λ の n 番目のモード変位であり, $\sum_{n,\lambda}$ はボディ λ のすべての振動モードについての和である。また各振動モードは次の直交条件が成り立つように選ぶ。

表 2.5.4 弾性運動の方程式 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{aligned}
& m_\lambda [\ddot{a}_{n,\lambda}(t) + 2\zeta\omega_{n,\lambda} \dot{a}_{m,\lambda}(t) + \omega_{n,\lambda}^2 a_{n,\lambda}(t)] \\
& = -m_\lambda (\ddot{\vec{r}}_{I,\lambda} - \ddot{\vec{\alpha}}_\lambda + \dot{\vec{\alpha}}_\lambda) \cdot \vec{A}_{n,\lambda} - \vec{Q}_{n,\lambda} \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda \\
& \quad + \dot{\vec{\omega}}_\lambda \cdot (H_{n,\lambda} + \sum_{m,\lambda} F_{m,n,\lambda} a_{m,\lambda}(t)) \cdot \vec{\omega}_\lambda \\
& \quad - 2\dot{\vec{\omega}}_\lambda \cdot \sum_{m,\lambda} \dot{a}_{m,\lambda}(t) \vec{K}_{m,n,\lambda}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{n,\lambda} &= \frac{1}{m_\lambda} \sum_{i \in \lambda} m_{i,\lambda} \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T \\
D_{n,i,\lambda} &= m_{i,\lambda} [(\vec{r}_{i,\lambda} - \vec{\alpha}_\lambda) \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T - 1 - (\vec{r}_{i,\lambda} - \vec{\alpha}_\lambda) \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T] \\
D_{n,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} D_{n,i,\lambda} \\
\vec{B}_{n,\lambda} &= \frac{1}{m_\lambda} \sum_{i \in \lambda} m_{i,\lambda} \vec{r}_{i,\lambda} \times \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T \\
\vec{C}_{n,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} \phi_{i,i,\lambda} \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R \\
\vec{Q}_{n,\lambda} &= \vec{C}_{n,\lambda} + m_\lambda (\vec{B}_{n,\lambda} - \vec{\alpha}_\lambda \times \vec{A}_{n,\lambda}) \\
J_{n,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R \times \phi_{i,i,\lambda} \\
H_{n,\lambda} &= D_{n,\lambda} + J_{n,\lambda} \\
F_{m,n,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} m_{i,\lambda} [\vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^T \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T - 1 - \vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^T \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T] \\
\vec{K}_{m,n,\lambda} &= \sum_{i \in \lambda} \{ m_{i,\lambda} \vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^T \times \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T + \frac{1}{2} (\phi_{i,i,\lambda} \cdot \vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^R) \times \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \lambda} [m_{i,\lambda} \vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^T \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T + \vec{\varphi}_{m,i,\lambda}^R \cdot (\phi_{i,i,\lambda} \cdot \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R)] \\
& = m_\lambda \delta_{m,n} \quad (2.5.8) \\
& = -m_{i,\lambda} [\ddot{\vec{r}}_{I,\lambda} - \ddot{\vec{\alpha}}_\lambda + \dot{\vec{\alpha}}_\lambda \times (\vec{r}_{i,\lambda} - \vec{\alpha}_\lambda + \vec{\epsilon}_{i,\lambda}) \\
& \quad + \dot{\vec{\omega}}_\lambda \times (\vec{\omega}_\lambda \times (\vec{r}_{i,\lambda} - \vec{\alpha}_\lambda + \vec{\epsilon}_{i,\lambda})) + 2\dot{\vec{\omega}}_\lambda \times \vec{\epsilon}_{i,\lambda}] \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

(2.5.6), (2.5.7) 式を運動方程式 (2.5.5) に代入し,

(2.5.8) 式の直交条件を用いると

$$\begin{aligned}
& m_\lambda [\ddot{a}_{n,\lambda}(t) + 2\rho\omega_{n,\lambda} \dot{a}_{n,\lambda}(t) + \omega_{n,\lambda}^2 a_{n,\lambda}(t)] \\
& = \sum_{i \in \lambda} [\vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^T \cdot \vec{F}_{i,\lambda}^T + \vec{\varphi}_{n,i,\lambda}^R \cdot \vec{F}_{i,\lambda}^R] \quad (2.5.9)
\end{aligned}$$

が得られる。ただし $\vec{F}_{i,\lambda}^T$, $\vec{F}_{i,\lambda}^R$ は (2.5.4) 式の左辺の成分である。(2.5.4) 式はまた次のように変形することができる。

$$\vec{F}_{i,\lambda}^T = m_{i,\lambda} [\ddot{\vec{\epsilon}}_{i,\lambda} - (\ddot{\vec{r}}_{I,\lambda} + \ddot{\vec{\delta}}_{i,\lambda})]$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{i,\lambda}^R &= \phi_{i,i,\lambda} \cdot \ddot{\vec{\theta}}_{i,\lambda} - \frac{d^I}{dt} [\phi_{i,i,\lambda} \cdot (\vec{\omega}_\lambda + \dot{\vec{\theta}}_{i,\lambda})] \\
&= -[\phi_{i,i,\lambda} \cdot \dot{\vec{\omega}}_\lambda + \vec{\omega}_\lambda \times \phi_{i,i,\lambda} \cdot (\vec{\omega}_\lambda + \dot{\vec{\theta}}_{i,\lambda})] \quad (2.5.11)
\end{aligned}$$

(2.5.10), (2.5.11) 式を (2.5.9) 式に代入して整理すると, ボディ λ の弾性運動に対して表 2.5.4 のような方程式が得られる。

また表 2.5.2, 表 2.5.3 の $\vec{A}_{n,\lambda}$ は表 2.5.4 中の定義を用いて

$$\Delta \vec{L}_{\lambda, \lambda} = \sum_{n, \lambda} \vec{Q}_{n, \lambda} a_{n, \lambda}(t)$$

となる。ボディ λ の基礎方程式は表 2.5.3, 表 2.5.4 の 4 つの式である。

2.5.2.2 ネステッド・ボディの運動方程式

ボディ k のネステッド・ボディとは、ヒンジ $k-1$ から外側のボディの集合をいう。本節で用いられる記号を図 2.5.4 及び表 2.5.5 に示す。

ネステッド・ボディの運動方程式は表 2.5.3 で求めた $\vec{G}_{I, \lambda}$, $\vec{L}_{I, \lambda}$ を S_{k-1} について和をとることによって

$$\sum_{\lambda \in S_{k-1}} \vec{G}_{I, \lambda} = \vec{F}_{k-1}^H + \vec{F}_{k-1}^C + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \vec{F}_{\lambda}^{(e)} \quad (2.5.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \dot{\vec{L}}_{I, \lambda} &= \vec{\phi}_{k-1}^H + \vec{\phi}_{k-1}^C + (\vec{r}_{I, k} - \vec{a}_k) \times (\vec{F}_{k-1}^C + \vec{F}_{k-1}^H) \\ &+ \sum_{\lambda \in S_{k-1}} (\vec{r}_{I, \lambda} \times \vec{F}_{\lambda}^{(e)} + \vec{\phi}_{\lambda}^{(e)}) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

またホイールについて

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\phi}_{W_m}^C + c \vec{L}_m \quad (2.5.14)$$

(2.5.12), (2.5.13) 式から拘束力 \vec{F}_{k-1}^C を消去すると

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in S_{k-1}} [\dot{\vec{L}}_{I, \lambda} - (\vec{r}_{I, k} - \vec{a}_k) \times \vec{G}_{I, \lambda}] \\ = \vec{\phi}_{k-1}^H + \vec{\phi}_{k-1}^C + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} [\vec{r}_{k-1, \lambda} \times \vec{F}_{\lambda}^{(e)} + \vec{\phi}_{\lambda}^{(e)}] \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

(2.5.12), (2.5.15) 式の $\vec{G}_{I, \lambda}$, $\dot{\vec{L}}_{I, \lambda}$ に表 2.5.3 の右辺を代入すると、ネステッド・ボディの運動方程式が

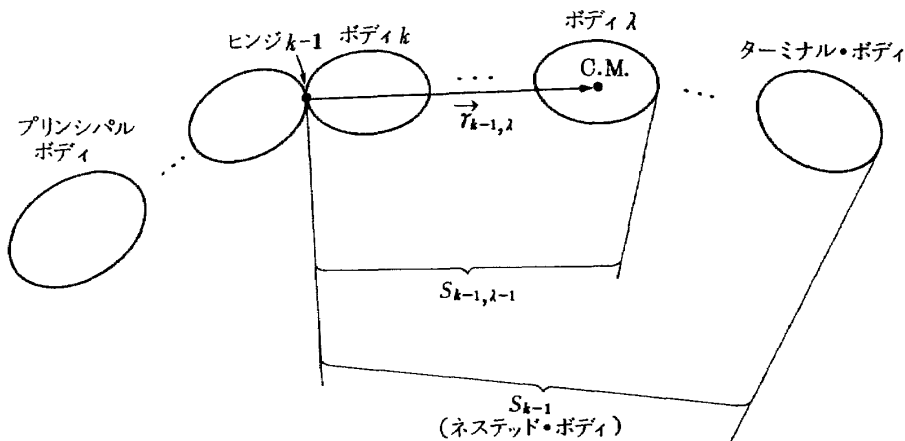


図 2.5.4 ネステッド・ボディ

表 2.5.5 記号表 (2)

S_R	剛体と柔軟体のボディ番号の集合
S_L	質点の番号の集合
S_F	柔軟体のボディ番号の集合
S_{k-1}	ヒンジ $k-1$ の外側のボディの番号の集合
$S_{k-1, \lambda-1}$	ヒンジ $k-1$ の外側でボディ λ までのボディの番号の集合
\vec{F}_{k-1}^C	ヒンジ $k-1$ を通してボディ k に働く拘束力
\vec{F}_{k-1}^H	ヒンジ $k-1$ を通してボディ k に働くメカニズムによる力 (制御力)
$\vec{F}_k^{(e)}$	ボディ k に働く外力 (力成分)
$\vec{\phi}_{k-1}^C$	ヒンジ $k-1$ を通してボディ k に働く拘束トルク
$\vec{\phi}_{k-1}^H$	ヒンジ $k-1$ を通してボディ k に働くメカニズムによるトルク (制御トルク)
$\vec{\phi}_k^{(e)}$	ボディ k に働く外力のトルク成分
$\vec{\phi}_{W_m}^C$	対称ホイール m のスピン軸に垂直な方向の運動を拘束する拘束トルク
$c \vec{L}_m$	対称ホイール m にボディ $MO(m)$ のメカニズムにより働くトルク (制御トルク)

得られるが、 $\vec{r}_{i,\lambda}$ や $\vec{\omega}_\lambda$ のような慣性系に対する絶対量が含まれているのであとの計算に不便である。そこで

$$\vec{r}_{i,\lambda} = \vec{\beta}_1 + \sum_{\substack{i \in S_{0,\lambda-1} \\ i \neq 1}} \vec{\beta}_i + \vec{\alpha}_\lambda$$

$$\vec{\omega}_\lambda = \sum_{i \in S_{0,\lambda-1}} \vec{\omega}_i$$

の關係を用いて $\vec{r}_{i,\lambda}$ と $\vec{\omega}_\lambda$ を相対量にかき直す。すなわち、

$$\vec{\omega}_\lambda = \sum_{i \in S_{0,\lambda-1}} \vec{\omega}_i \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{i,\lambda} = & \ddot{\vec{\beta}}_1 + \sum_{\substack{i \in S_{0,\lambda-1} \\ i \neq 1}} \ddot{\vec{\beta}}_i + \ddot{\vec{\alpha}}_\lambda + \sum_{i \in S_{0,\lambda-1}} \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i-1,\lambda} \\ & + \sum_{\substack{i \in S_{0,\lambda-1} \\ i \neq 1}} \{ \vec{\omega}_{f(i)} \times (\vec{\omega}_{f(i)} \times \vec{\beta}_i) + 2\vec{\omega}_{f(i)} \times \dot{\vec{\beta}}_i \} \\ & + \vec{\omega}_\lambda \times (\vec{\omega}_\lambda \times \vec{\alpha}_\lambda) + 2\vec{\omega}_\lambda \times \dot{\vec{\alpha}}_\lambda \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

(2.5.16), (2.5.17) 式を表 2.5.3 に代入して得られた

$\vec{G}_{i,\lambda}$, $\vec{L}_{i,\lambda}$ を (2.5.12), (2.5.15) 式に代入すると、ネステッド・ボディの並進と回転の運動方程式が得られる。また表 2.5.3 と (2.5.14) 式から得られるホイールの運動方程式と、表 2.5.4 の弾性運動の運動方程式に (2.5.16), (2.5.17) 式を代入すると、上と同様加速度を $\ddot{\vec{\omega}}_i$, $\ddot{\vec{\omega}}_{W_m}$, $\ddot{\vec{\beta}}_1$, $\ddot{\vec{\beta}}_i$ にとった方程式が得られる。これらを整理すると運動方程式は表 2.5.6 のようになる。ただしこの表で

$$G_{k-1,i-1}^\lambda = m_\lambda \{ (\vec{r}_{i-1,\lambda} \cdot \vec{r}_{k-1,\lambda}) 1 - \vec{r}_{i-1,\lambda} \vec{r}_{k-1,\lambda} \}$$

$$\Gamma_{k-1,\lambda} = \varphi(\vec{r}_{k-1,\lambda}) \quad \varphi(\vec{V}) = \begin{bmatrix} 0 & V_3 & -V_2 \\ -V_3 & 0 & V_1 \\ V_2 & -V_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{c}_\lambda = & m_\lambda \left\{ \sum_{\substack{i \in S_{0,\lambda-1} \\ i \neq 1}} (\vec{\omega}_{f(i)} \times (\vec{\omega}_{f(i)} \times \vec{\beta}_i) + 2\vec{\omega}_{f(i)} \times \dot{\vec{\beta}}_i) \right. \\ & \left. + \vec{\omega}_\lambda \times (\vec{\omega}_\lambda \times \vec{\alpha}_\lambda) + 2\vec{\omega}_\lambda \times \dot{\vec{\alpha}}_\lambda \right\} \end{aligned}$$

(\vec{c}_λ はコリオリ力と遠心力に相当)

2.5.2.3 システム全体の運動方程式

(1) 物体間の自由度と独立変数

さて、こうして得られた表 2.5.6 の運動方程式が

表 2.5.6 ネステッド・ボディ, ホイール, 弾性運動の運動方程式
(Frisch¹⁾ より転載)

● Rotation equation for nest k-1, $k \in S_R$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i \in S_{0,k-1} \\ i \neq k}} \left[\sum_{\substack{\lambda \in S_{k-1} \\ \lambda \notin S_L}} \phi_\lambda + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} G_{k-1,i-1}^\lambda \right] \cdot \ddot{\vec{\omega}}_i \\ & + \sum_{\substack{i \in S_{k-1} \\ i \in S_R}} \left[\sum_{\substack{\lambda \in S_{i-1} \\ \lambda \notin S_L}} \phi_\lambda + \sum_{\lambda \in S_{i-1}} G_{k-1,i-1}^\lambda \right] \cdot \ddot{\vec{\omega}}_i \\ & + \sum_{\substack{\lambda \in S_{k-1} \\ \lambda \in S_L}} \left[-m_\lambda \Gamma_{k-1,\lambda} \cdot \ddot{\vec{\alpha}}_\lambda \right] + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \left[-m_\lambda \Gamma_{k-1,\lambda} \cdot \ddot{\vec{\beta}}_1 \right] \\ & + \sum_{\substack{i \in S_{0,k-1} \\ i \neq k \\ i \neq 1}} \left[\sum_{\lambda \in S_{k-1}} -m_\lambda \Gamma_{k-1,\lambda} \cdot \ddot{\vec{\beta}}_i \right] + \sum_{i \in S_{k-1}} \left[\sum_{\lambda \in S_{i-1}} -m_\lambda \Gamma_{k-1,\lambda} \cdot \ddot{\vec{\beta}}_i \right] \\ & + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \left[\sum_{\substack{m: \\ MO(m)=\lambda}} I_{W_m} \cdot \ddot{\vec{\omega}}_{W_m} + \sum_{\substack{n,\lambda \\ \lambda \in S_F}} (-m_\lambda \Gamma_{k-1,\lambda} \cdot \vec{A}_{n,\lambda} + \vec{Q}_{n,\lambda}) \ddot{a}_{n,\lambda}(t) \right] \\ & = - \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \left[\vec{\phi}_\lambda \cdot \vec{\omega}_\lambda + \vec{\omega}_\lambda \times \vec{L}_{\lambda,\lambda} + \vec{r}_{k-1,\lambda} \times \vec{C}_\lambda \right] \\ & + \vec{\phi}_{k-1}^H + \vec{\phi}_{k-1}^c + \sum_{\lambda \in S_{k-1}} \left[\vec{r}_{k-1,\lambda} \times \vec{F}_\lambda^{(e)} + \vec{\phi}_\lambda^{(e)} \right] \end{aligned}$$

- 対称ホイール m とボディ $MO(m)$ の相対角速度；

$$\vec{\omega}_{W_m} = \vec{\omega}_{W_m} + \Delta \vec{\theta}_{W_m}$$

$$\text{ただし } \Delta \vec{\theta}_{W_m} = \sum_{n, MO(m)} \dot{a}_{n, MO(m)}(t) \vec{\varphi}_{n, W(m), MO(m)}^R$$

$\vec{\varphi}_{n, W(m), MO(m)}^R$: ボディ $MO(m)$ の n 番目の
回転振動モードのホイール
取付点における値

- ヒンジ点 $\lambda-1$ の変形前の位置に対する並進速度

$$\vec{\beta}_\lambda$$

$$\vec{\beta}_\lambda = \Delta \vec{\beta}_\lambda$$

$$\text{ただし } \Delta \vec{\beta}_\lambda = \sum_{n, J(\lambda)} \dot{a}_{n, J(\lambda)}(t) \vec{\varphi}_{n, H(\lambda-1), J(\lambda)}^T$$

$\vec{\varphi}_{n, H(\lambda-1), J(\lambda)}^T$: ボディ $J(\lambda)$ の n 番目の並
進振動モードのヒンジ点
 $\lambda-1$ における値

以上より独立変数には $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}_\lambda$ と $\vec{\beta}_1$ 及びボディ λ
が質点のときの $\vec{\alpha}_\lambda$) , $\vec{\omega}_w$, \dot{a} ととることができる。
このとき $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}_\lambda$ と $\vec{\beta}_1$ 及びボディ λ が質点のときの
 $\vec{\alpha}_\lambda$) , $\vec{\omega}_w$, \dot{a} , $\vec{\beta}$ と $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_w$, \dot{a} との関係は表 2.5.7 の
ようになる。

(2) 運動方程式の行列表現

表 2.5.6 の 4 式を $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_w$, \dot{a} , $\vec{\beta}$ を加速度にとって
あらわすと表 2.5.8 に示す形になる。

ここで N : 剛体, 柔軟体, 質点の総数

M : 対象ホイールの総数

N_m : 柔軟モードの総数

N_R : 剛体, 柔軟体の総数 (N - 質点数)

とすると,

表 2.5.8 の第 1 行 = ($N+1$) 個の方程式

$$\begin{cases} \text{ネステッド・ボディの回転の運動方程式} \\ \text{質点の並進の運動方程式} \\ \text{全体の並進の運動方程式} \end{cases}$$

表 2.5.8 の第 2 行 = M 個の方程式

各対称ホイールの運動方程式

表 2.5.8 の第 3 行 = N_m 個の方程式

柔軟体の各振動モードの運動方程式

表 2.5.8 の第 4 行 = N_R 個の方程式

ネステッド・ボディの並進の運動方程式

ここで第 4 行の方程式は第 1 ~ 3 行の方程式と独立
ではないが, 拘束力 F^c を求めたい時に役立つ。

(3) 拘束トルクの消去 (質点のときは拘束力)

表 2.5.8 の運動方程式には右辺に拘束トルクが含ま
れているので, 方程式を解くためにはこれを消去

表 2.5.7 速度変数間の関係 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{\omega}_w \\ \dot{a} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi_H^R \\ 0 & 1 & \varphi_w^R \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varphi_H^T \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{\omega}_w \\ \dot{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{\omega}} \\ \dot{\vec{\omega}}_w \\ \ddot{a} \\ \ddot{\vec{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi_H^R \\ 0 & 1 & \varphi_w^R \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varphi_H^T \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\vec{\omega}} \\ \dot{\vec{\omega}}_w \\ \ddot{a} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \times \varphi_H^R \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{\omega}_w \\ \dot{a} \end{pmatrix}$$

表 2.5.8 運動方程式の行列表現 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{bmatrix} X & I^c & F & \Gamma \\ f^T & I^s & 0 & 0 \\ F^T & 0 & M^1 & A \\ \Gamma^T & 0 & M^T & M^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\vec{\omega}} \\ \dot{\vec{\omega}}_w \\ \ddot{a} \\ \ddot{\vec{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^c \\ \phi_w^c \\ 0 \\ F^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^{(e)} \\ CL \\ 0 \\ F^{(e)} \end{pmatrix}$$

表 2.5.9 速度変数間の関係 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_w \\ \dot{a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{a} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\omega} \\ \ddot{\omega}_w \\ \ddot{a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_w \\ \ddot{a} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{a} \end{Bmatrix}$$

表 2.5.10 拘束トルクの消去 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{bmatrix} q^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi^c \\ \phi_w^c \\ 0 \\ F^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F^c \end{Bmatrix}$$

表 2.5.11 最終的な運動方程式 (Frisch¹⁾ より転載)

$$\begin{bmatrix} q^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & I^c & F & \Gamma \\ I^{cT} & I^s & 0 & 0 \\ F^T & 0 & M^1 & A \\ \Gamma^T & 0 & A^T & M^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_H^R \\ 0 & 1 & \phi_w^R \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \phi_H^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_w \\ \ddot{a} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ - \begin{bmatrix} X & I^c & F & \Gamma \\ I^{cT} & I^s & 0 & 0 \\ F^T & 0 & M^1 & A \\ \Gamma^T & 0 & A^T & M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_H^R \\ 0 & 1 & \phi_w^R \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \phi_H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{a} \end{Bmatrix} \right.$$

$$- \begin{bmatrix} X & I^c & F & \Gamma \\ I^{cT} & I^s & 0 & 0 \\ F^T & 0 & M^1 & A \\ \Gamma^T & 0 & A^T & M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \times \phi_H^R \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\omega}_w \\ \dot{a} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \phi^{(e)} \\ CL \\ 0 \\ F^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F^c \end{Bmatrix}$$

する必要がある。ここでは自由な回転軸の方向と拘束トルクの方向が直交していることから、両者の内積をとることによりこれを消去する。

$\vec{\omega}_k, \vec{\omega}_{W_m}, \vec{\alpha}_k$ を、自由な方向を \vec{q}_m, \vec{h} にとって次のようにあらわす。

$$\vec{\omega}_k = \sum_{m @ k-1} \dot{\theta}_m \vec{q}_m$$

$$\vec{\omega}_{W_m} = \dot{\theta}_w \vec{h}$$

$$\vec{\alpha}_k = \sum_{m @ k-1} \ddot{\theta}_m \vec{q}_m$$

ここで $\sum_{m @ k-1}$ はヒンジ点 $k-1$ のすべての自由な運動軸についての和。

これをまとめて $\vec{\omega}, \vec{\omega}_w, \dot{\alpha}$ は $\dot{\theta}, \dot{\theta}_w, \dot{\alpha}$ により表 2.5.9 のように表わすことができる。

また、拘束トルクと自由な回転軸の方向が直交することにより、表 2.5.10 の関係が成立つ。

最終的に $\dot{\theta}, \dot{\theta}_w, \dot{\alpha}$ を独立変数にとり、表 2.5.10 の直交関係を用いて拘束力を消去すると、運動方程

式は表 2.5.11 のようになる（表 2.5.7, 表 2.5.9, 表 2.5.10 の結果を表 2.5.8 の運動方程式に代入）。

2.5.2.4 柔軟性のモデリングの比較

柔軟なアペンデージ（ターミナル・ボディ）のモデリングでは、アペンデージをバネ結合された剛体とみなすか、いくつかの振動モードをもつ柔軟体とみなすかの 2通りの方法が考えられる。この 2通りの方法でアペンデージの全体システムに及ぼす影響がほぼ等しくなるためには、両者の運動を記述する変数の間にある種の関係が成立せねばならない。この関係は表 2.5.6 などアペンデージを 2通りの方法でモデル化し、両者の影響を比較することで得られるが、ここではその結論だけを述べると、それらは表 2.5.12 の 3つの関係式に集約される。（表中 $E_{n,\lambda} = D_{n,\lambda} + D_{n,\lambda}^T$, $D_{n,\lambda}$ は表 2.5.4 参照）

表 2.5.12 の関係式により、アペンデージをバネ結合された剛体で近似するときの近似方法や、あるいは振動モードをもつ柔軟体で近似するときのモード

表 2.5.12 柔軟なアペンデージのモデリングの比較 (Frisch¹⁾より転載)

- Relative linear velocity of the center-of-mass of body λ

The linear velocity of the center-of-mass of body λ relative to a reference frame fixed in the contiguous body, body $J(\lambda)$, must be modeled by both techniques. The equivalence relation is given by

$$\vec{\omega}_\lambda \times \vec{a}_\lambda \approx \sum_{n,\lambda} \dot{a}_{n,\lambda}(t) \vec{A}_{n,\lambda}$$

where the left-hand side pertains to a rigid body λ and the right-hand side to a flexible body simulation of the same body λ .

- Relative derivative of the inertia tensor of body λ

The time derivative of the inertia tensor of body λ relative to the reference frame fixed in body $J(\lambda)$ must be modeled by both techniques. The equivalence relation is given by

$$\vec{\omega}_\lambda \times \phi_\lambda - \phi_\lambda \times \vec{\omega}_\lambda \approx \sum_{n,\lambda} \dot{a}_{n,\lambda}(t) E_{n,\lambda}$$

- Relative angular momentum of body λ about its center-of-mass

The angular momentum of body λ about its own center-of-mass relative to the reference frame fixed in body $J(\lambda)$ must be modeled by both techniques. The equivalence relation is given by

$$\phi_\lambda \cdot \vec{\omega}_\lambda \approx \sum_{n,\lambda} \dot{a}_{n,\lambda}(t) \vec{Q}_{n,\lambda}$$

次数などについての知見が得られる。一般に高次の振動を考えるとときは柔軟体モデルが、大きな弾性変形を考えるとときは剛体モデルが適している。

2.5.3 まとめ及び評価

Frischの方法は、Newton-Euler方程式とネステッド・ボディ・アプローチに基づいて多体系の運動方程式を導出するものである。式の誘導は一般的かつ平易であり、FEMの考え方やアペンデージのモデル化に対する記述もあり、考察が行き届いている。ただし、物体間の関係を記述する方法やヒンジ自由度を指定する方法には触れておらず、このアルゴリズムを汎用プログラム化する際の手続きは不明確である。結局このFrischの方法は、ループを含まない柔軟多体系の運動方程式をNewton-Euler方程式から導く際の典型的なアルゴリズムとして評価されよう。

2.6 Ho¹⁾ Ho/Herber

2.6.1 概 要

Hoの方法はダイレクト・パスを導入してシステムの幾何学的関係の記述を容易にしたところに特徴がある。まずトリー構造の剛体に関する運動方程式をダイレクト・パスを用いて導出し、¹⁾次にそれを柔軟体の場合に拡張している。²⁾ここでは前者をHo 1、後者をHo 2として、その対象や力学上の原理等を述べる。

〔Ho 1〕

対象：トポロジー木構造、剛体（先端のみ柔軟体でも可）

ヒンジ自由度：回転 3 自由度

力学上の原理：Newton-Euler 方程式(Lagrange 方程式の場合も示してあるが、本質的にはNewton-Euler 方程式)

内力消去法：すべてのボディの方程式の和

内トルク消去法：あるヒンジ点から先端側のボディについての和、このことによってそれ以外のヒンジ点に働く内トルクは式にあらわれない。また、そのヒンジ点に働くトルクのうちにも拘束トルクのある場合が考えられるが、このような拘束トルクの消去については言及していない。

注目点：ダイレクト・パス

独立変数：メイン・ボディの変位量

ヒンジ回転角（メイン・ボディの場合はリファレンス・フレームに対する回転角）

モード変位（先端が柔軟体のとき）

〔Ho 2〕

対象：トポロジー木構造、柔軟体

ヒンジ自由度：回転 3 自由度

力学上の原理：Newton-Euler 方程式

内力・内トルク消去法：〔Ho 1〕と同じ。ただし内トルクの消去では回転軸方向の単位ベクトルとの内積をとるという操作も行っており、ヒンジ自由度が 3 以下の場合にも対応できる。

注目点：ダイレクト・パス

コンポーネント・モード・シンセシス³⁾の採用

汎用プログラム化(ALLFLEX)

独立変数：〔Ho 1〕と同じだが、すべてのボディでモード変位をとりうる。

その他：弾性運動は剛体運動に対する摂動として扱っており、得られる方程式は剛体運動と弾性運動に分離される。弾性運動の影響は剛体運動の方程式に入っていない。

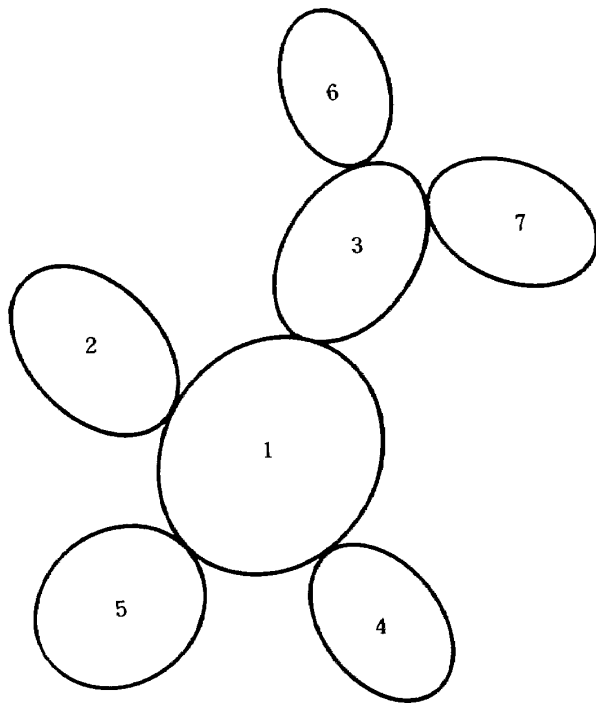
Hoの方法で対象とするシステムの概略図を図 2.6.1 に示す。〔Ho 2〕では各ボディが柔軟体であってもよい。

2.6.2 本 論

まず〔Ho 1〕の方法に基づいて各ボディが剛体である場合の運動方程式の導出法を述べる。次に〔Ho 2〕の方法により、各ボディが柔軟体である場合の取扱い方を略述する。主な記号の説明を表 2.6.1 及び図 2.6.2 に示す。

2.6.2.1 ダイレクト・パスの定義

図 2.6.3 に示すような多くのボディからなるシステムを考える。この図で 1 をメイン・ボディとし、各ボディをメイン・ボディからの隔たりでレベルづけて低レベルのボディから番号をつける。メイン・ボディから各ボディに至る径路をそのボディのダイレクト・パスという。さらにインシデンス・マトリクス ε^{vj} ($v, j=1, 2, \dots, N$; N は全ボディ数)



メインボディをレベル0、ボディ番号1とし、メインボディからの隔たりで各ボディをレベルづけて低レベルのボディから番号をつける。

図 2.6.1 Hoの方法で対象とするシステム

を次のように定義する。

$\epsilon^{vj}=1$: ボディ v がボディ j のダイレクト・パス上にある。

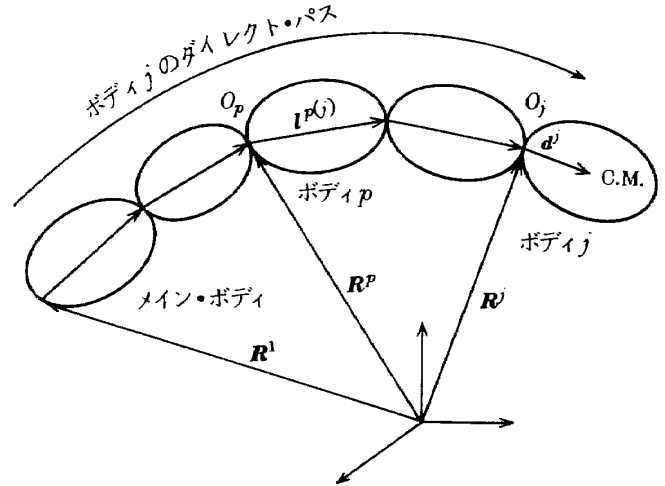


図 2.6.2 記号の説明

$\epsilon^{vj}=0$: ボディ v がボディ j のダイレクト・パス上にない。

たとえば図 2.6.3 のシステムでインシデンス・マトリクスを求めると表 2.6.2 のようになる。インシデンス・マトリクスを用いると、ボディ j のヒンジ点 O_j の位置ベクトル R^j や角速度 ω^j を、メイン・ボディのヒンジ点の位置ベクトル R^1 とリファレンス・フレームの角速度 ω^1 を用いて次のように記述できる。（図 2.6.2 参照）

表 2.6.1 記号表

ω^r	リファレンス・フレームの慣性系に対する角速度
R^j	リファレンス・フレームの原点からボディ j のヒンジ点 O_j に至る位置ベクトル
ω^j	ボディ j の慣性系に対する角速度
θ^j	ボディ j のひとつ手前のボディに対する回転角（Euler 角）
d^j	ボディ j のヒンジ点 O_j からボディ j の質量中心をさすベクトル
$l^{p(j)}$	ボディ j のダイレクト・パスのボディ p 上の部分
\dot{R}^j	ベクトル R^j の慣性系における微分
\dot{R}^j	ベクトル R^j のボディ j に固定された座標系における微分
F^j	ボディ j のヒンジ点 O_j においてボディ j に働く力
T^j	ボディ j のヒンジ点 O_j においてボディ j に働くトルク
ϵ^{vj}	インシデンス・マトリクスの成分
	ボディ v がボディ j のダイレクト・パス上のとき 1, それ以外は 0
η^{vj}	リムブランチ・マトリクスの成分
	ボディ v がボディ j のダイレクト・パス上で隣接するとき 1, それ以外は 0

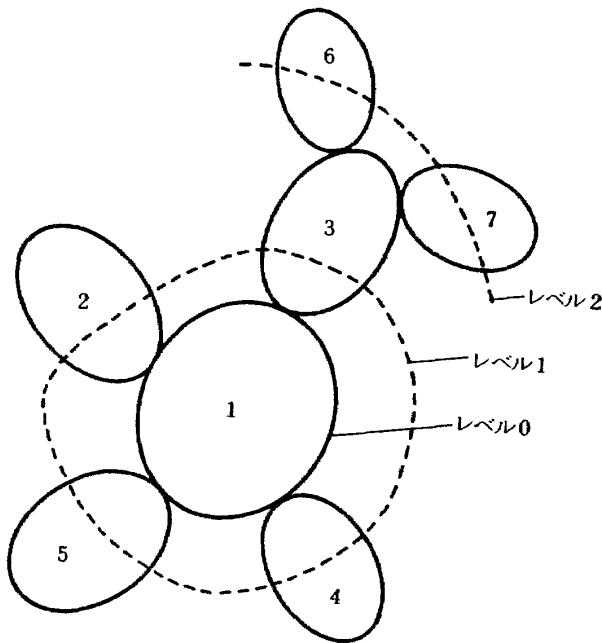


図 2.6.3 対象とするシステム
(図 2.6.1 を再掲)

表 2.6.2 図 2.6.3 のシステムのインシデンス・マトリクス

$v \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2		1					
3			1			1	1
4				1			
5					1		
6						1	
7							1

$$\begin{cases} \mathbf{R}^j = \mathbf{R}^1 + \sum_{p=1}^j \epsilon^{pj} \mathbf{l}^{p(j)} - \mathbf{l}^{j(j)} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^j = \boldsymbol{\omega}^1 + \sum_{p=1}^j \epsilon^{pj} [G^p \dot{\theta}^p] \end{cases} \quad (2.6.2)$$

ただし θ^p はヒンジ p の回転角であり, G^p は $\dot{\theta}^p$ を角速度に変換するための変換マトリクスである。上式より, ヒンジ点 O_j の加速度 $\ddot{\mathbf{R}}^j (= \ddot{\mathbf{R}}^1 + 2\boldsymbol{\omega}^1 \times \dot{\mathbf{R}}^1 + \boldsymbol{\omega}^1 \times (\boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{R}^1))$ はメイン・ボディの加速度 $\ddot{\mathbf{R}}^1$ とボディ j のダイレクト・パス上にある各ボディの回転角によって表現することができる。

2.6.2.2 運動方程式の導出

ダイレクト・パスを用いた運動方程式の導出は, 図 2.6.4 のように各ステップに分けて考えることができる。ただし, ここではより直接的な Newton-Euler 方程式を用いた場合を対象としている。

(1) ボディ j 単体の運動方程式

いまボディ j にヒンジ点 O_j を通して働く力を \mathbf{F}^j , トルクを \mathbf{T}^j とする。ボディ j が図 2.6.5 のような結合状態であれば,

$$\begin{aligned} \text{ボディ } j \text{ に働く力} &= \mathbf{F}^j - \mathbf{F}^k - \mathbf{F}^l \\ &= \mathbf{F}^j - \sum_m^{(j)} \mathbf{F}^m \\ \text{ヒンジ点 } O_j \text{ まわりでボディ } j \text{ に働くトルク} &= \mathbf{T}^j - (\mathbf{T}^k + \mathbf{h}^{jk} \times \mathbf{F}^k) \\ &\quad - (\mathbf{T}^l + \mathbf{h}^{jl} \times \mathbf{F}^l) \\ &= \mathbf{T}^j - \sum_m^{(j)} (\mathbf{T}^m + \mathbf{h}^{jm} \times \mathbf{F}^m) \end{aligned}$$

ボディ j の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} m^j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} & -\mathbf{d}^j \times \\ \mathbf{d}^j \times & \mathbf{I}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^j + \ddot{\mathbf{R}}^j \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^j \end{bmatrix} + m^j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^j \times (\boldsymbol{\omega}^j \times \mathbf{d}^j) \\ \boldsymbol{\omega}^j \times \mathbf{I}^j \cdot \boldsymbol{\omega}^j \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^j - \sum_m^{(j)} \mathbf{F}^m \\ \mathbf{T}^j - \sum_m^{(j)} (\mathbf{T}^m + \mathbf{h}^{jm} \times \mathbf{F}^m) \end{bmatrix} \quad (2.6.3) \end{aligned}$$

ただし $\ddot{\mathbf{R}}^j$: リファレンス・フレームの加速度, m^j : ボディ j の質量, \mathbf{I}^j : ボディ j の質量中心まわりの慣性ダイアディック $\times \frac{1}{m^j}$, $\boldsymbol{\delta}$: 単位ダイアディック, である。

(2) ボディ j の慣性力, 慣性トルク

ボディ j の運動方程式が (2.6.3) 式のように求まったので, ヒンジ点での力の釣合を考えるとヒンジ点に働く慣性力 \mathbf{F}^{Ij} , 慣性トルク \mathbf{T}^{Ij} を求めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{Ij} \\ \mathbf{T}^{Ij} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{F}^j - \sum_m^{(j)} \mathbf{F}^m \\ \mathbf{T}^j - \sum_m^{(j)} (\mathbf{T}^m + \mathbf{h}^{jm} \times \mathbf{F}^m) \end{bmatrix} \\ &= -m^j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} & -\mathbf{d}^j \times \\ \mathbf{d}^j \times & \mathbf{I}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^j + \ddot{\mathbf{R}}^j \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

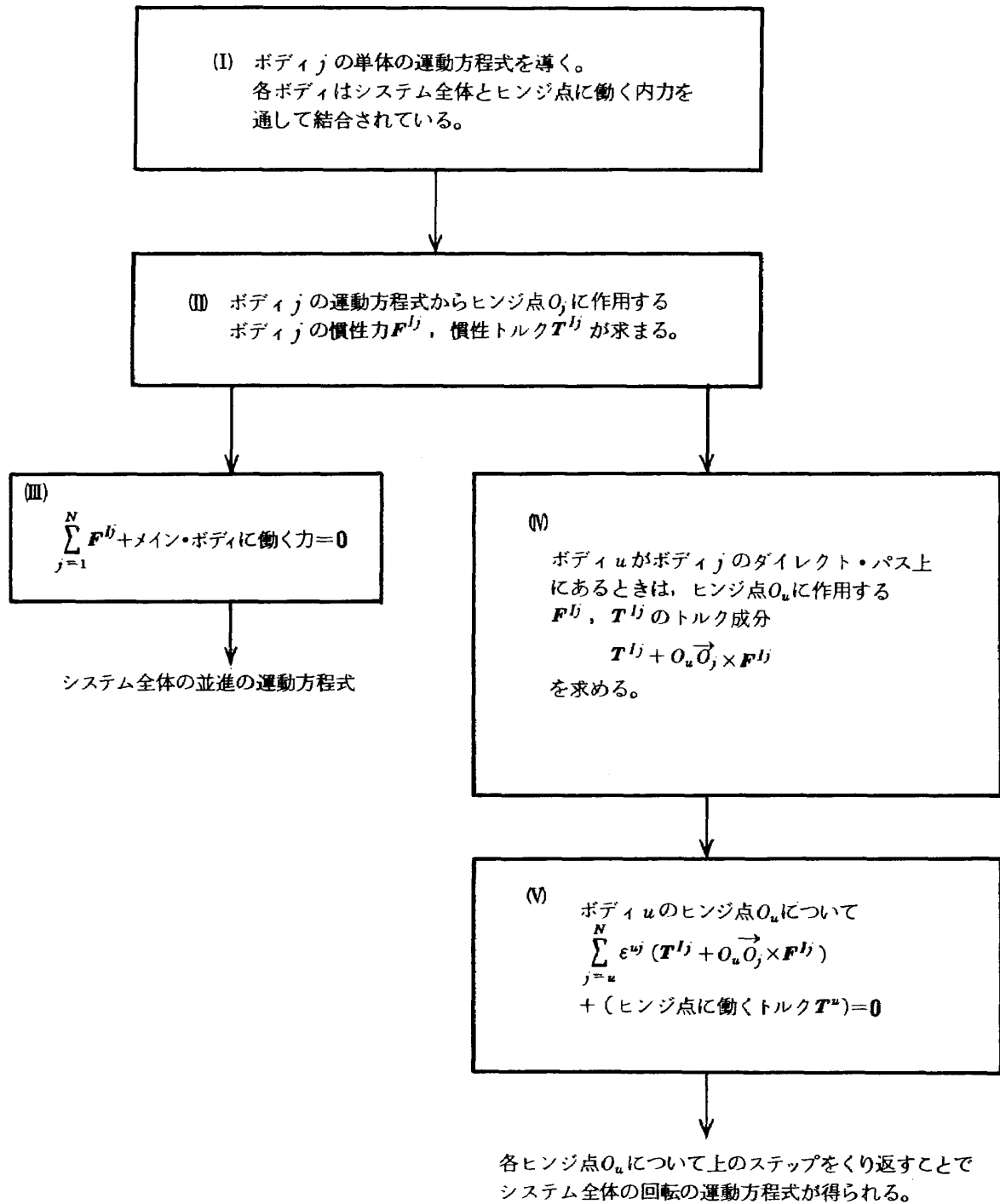


図 2.6.4 運動方程式の導出

$$-m^j \left\{ \frac{\boldsymbol{\omega}^j \times (\boldsymbol{\omega}^j \times \mathbf{d}^j)}{\boldsymbol{\omega}^j \times \mathbf{I}^j \cdot \boldsymbol{\omega}^j} \right\} \quad (2.6.4)$$

(2.6.4) 式の $\ddot{\mathbf{R}}^j$ 及び $\dot{\boldsymbol{\omega}}^j$ に (2.6.1), (2.6.2) 式を代入すれば, \mathbf{F}^{Ij} , \mathbf{T}^{Ij} を \mathbf{R}^1 , $\boldsymbol{\theta}^v$ ($v=1, 2, \dots, N$) によってあらわすことができる。

(3) 並進の運動方程式

メイン・ボディに働く力を \mathbf{F}^1 とすると, 力のつりあいから,

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{Ij} + \mathbf{F}^1 = 0 \quad (2.6.5)$$

(2.6.5) 式に (2.6.4) 式 ((2.6.1), (2.6.2) 式を用いて \mathbf{R}^j , $\boldsymbol{\omega}^j$ を \mathbf{R}^1 , $\boldsymbol{\theta}^v$ で置き換えたもの) を代入すればシステム全体の並進の運動方程式が得られる。

(4) 回転の運動方程式

次にヒンジ点 O_u におけるトルクのつりあいから回転の運動方程式を導く。まずボディ j のダイレクト

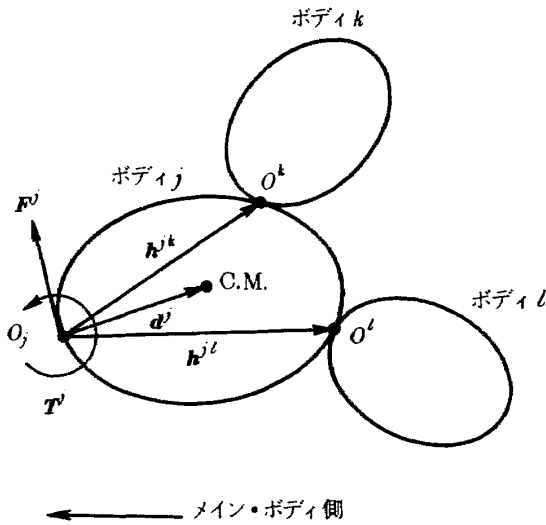


図 2.6.5 ボディ j 単体の運動方程式

・パス上にあるボディ u のヒンジ点 O_u に対するボディ j の慣性力の影響を求めると、

$$O_u \text{ に作用する } F^{lj}, T^{lj} \text{ の影響} \\ = T^{lj} + \overrightarrow{O_u O_j} \times F^{lj} \quad (2.6.6)$$

上式を基にして O_u におけるトルクのつりあいから回転の方程式を導く。回転の方程式の数は $3 \times N$ 個である。まずボディ j のダイレクト・パス上のヒンジ点 O_u において、システムをメイン・ボディ側とターミナル・ボディ側に分離して考える。ターミナル・ボディ側から O_u に働くトルクは (2.6.6) 式から

$$\sum_{j=u}^N \epsilon^{uj} (T^{lj} + \overrightarrow{O_u O_j} \times F^{lj})$$

一方メイン・ボディ側から O_u に働くトルクは T^u だから、 T^u が与えられるものとすれば (文献(1)では $T^u = -(K_p \theta_u + K_v \dot{\theta}_u)$ の形で与えられる。), ヒンジ点 O_u におけるトルクのつりあいの式は

$$\sum_{j=u}^N \epsilon^{uj} (T^{lj} + \overrightarrow{O_u O_j} \times F^{lj}) + T^u = 0 \quad (2.6.7)$$

ヒンジは $(N-1)$ 個なので (2.6.7) 式も $(N-1)$ 個得られるがさらにメイン・ボディに対してつりあいの式

$$\sum_{j=1}^N (T^{lj} + \overrightarrow{O_u O_j} \times F^{lj}) = 0 \quad (2.6.8)$$

が成立し、結局方程式の数は $3 \times N$ 個となる。(2.6.8)

式は (2.6.7) 式の特例な場合である。

2.6.2.3 ボディが柔軟体の場合

ターミナル・ボディのみが柔軟体である場合は式の導出過程に柔軟体の影響があらわれないので 2.6.2.2 の手法をそのまま適用できる。文献(1)はこの場合である。一方すべてのボディが柔軟体である場合には弾性運動を摂動として取り扱い剛体運動から分離して考える。この場合弾性運動を図 2.6.6 のように分類する。図より弾性運動のないノミナルな状態でヒンジ点 O_j から r^j の位置にある点の、弾性運動を含むときの位置ベクトル ρ^j は、図の 5 種類の弾性運動の影響で次のようにあらわすことができる。

$$\rho^j = R^j + R^j + r^j + \Delta R^j + \Delta \phi^j \times r^j \\ + \sum_{t=j}^N \eta^{jt} (u^{jTt} + u^{jRt}) + u^{jV} \quad (2.6.9)$$

ただし η^{jt} はリムブランチ・マトリクスであり、次のように定義される。

$\eta^{jt} = 1$: ボディ j がボディ t のダイレクト・パス上にあり、ボディ t と隣接している。

$\eta^{jt} = 0$: 上記以外の場合

ここで u^{jTt} , u^{jRt} , u^{jV} については次のようにモード展開する。

$$u^{jTt} = \sum_{\beta=1}^3 \phi_{\beta}^{jTt}(r^j) q_{\beta}^{jTt}(t) \quad (2.6.10)$$

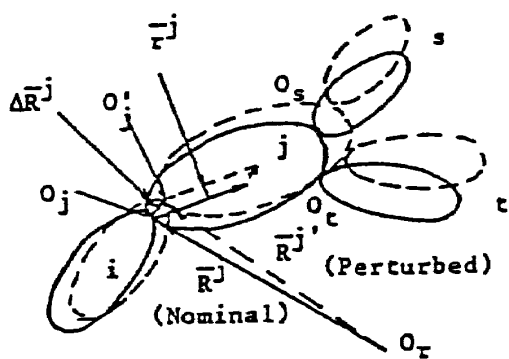
$$u^{jRt} = \sum_{\beta=1}^3 \phi_{\beta}^{jRt}(r^j) q_{\beta}^{jRt}(t) \quad (2.6.11)$$

$$u^{jV} = \sum_{l=1}^{n_j} \phi_l^{jV}(r^j) q_l^{jV}(t) \quad (2.6.12)$$

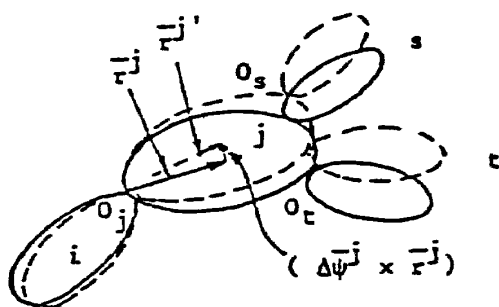
また (2.6.1), (2.6.2) 式を導いた場合と同様にして ΔR^j , $\Delta \phi^j$ は次のようにあらわすことができる。

$$\Delta R^j = \Delta R^1 + \sum_{p=1}^j \epsilon^{pj} \Delta \phi^p \times l^{p(j)} \\ - \Delta \phi^j \times l^{j(j)} + \sum_{p=1}^j \sum_{b=p}^j \eta^{pb} \epsilon^{bj} q^{pTb} \quad (2.6.13)$$

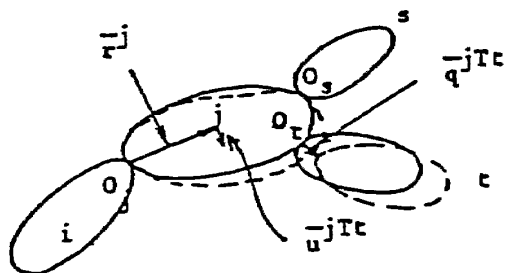
$$\Delta \phi^j = \sum_{p=1}^j \epsilon^{pj} [G^p \Delta \theta^p] + \sum_{p=1}^j \sum_{c=p}^j \eta^{pc} \epsilon^{cj} q^{pTc} \quad (2.6.14)$$



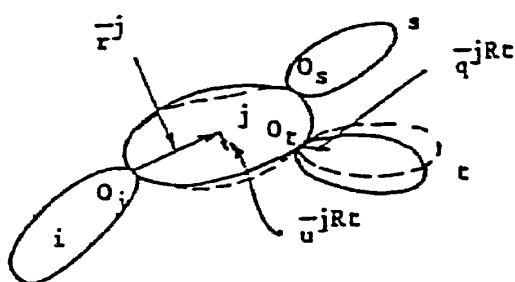
(a) Perturbed Rigid Body Translation



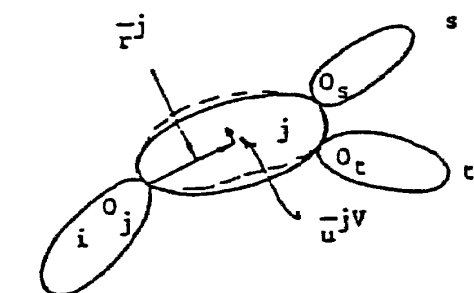
(b) Perturbed Rigid Body Rotation



(c) Quasi-Static Translation



(d) Quasi-Static Rotation



(e) Homogeneous Natural Vibration

図 2.6.6 弾性運動の分類 (Ho²)より抜粋)

以上より弾性変位を ΔR^j , $\Delta \theta^j$, $q^{jTt} (= (q_1^{jTt}, q_2^{jTt}, q_3^{jTt}))$, $q^{jRt} (= (q_1^{jRt}, q_2^{jRt}, q_3^{jRt}))$, $q^{jV} (= (q_1^{jV}, q_2^{jV}, \dots, q_{n_j}^{jV}))$ の諸量であらわすことができる。(2.6.10)~(2.6.14)式を(2.6.9)式に代入するとボディ j 中の任意の点の位置ベクトルを剛体運動の変位と弾性運動の変位で表現できるので、これから Newton-Euler 方程式あるいは Lagrange 方程式を用いて系全体の運動方程式を導けばよい。

たとえば Newton-Euler 方程式の場合、(2.6.9)式の p^j からボディ j に対する運動方程式を導けば前述の場合と全く同様にして剛体運動の方程式を求めることができる。文献(2)では剛体運動を考える場合弾性運動を無視してしまうので、運動方程式は(2.6.5), (2.6.7), (2.6.8)と同じ形になる。一方弾性変位については Newton-Euler 方程式を用いる場合、エネルギー収支から運動方程式を導く。文献(2)に得られた方程式の形は記されているが、導き方の詳細は不明である。

勿論 Lagrange 方程式から運動方程式を導くこともでき、その場合導出の手続きは簡単化する。

2.6.3 まとめ及び評価

Hoの方法はダイレクト・パスを導入して多体系の記述を簡略化したところに特徴がある。特にメイン・ボディからの隔たりによって各ボディをレベルづけし、低レベルのボディから番号をつけたので、式の記述が(2.6.1), (2.6.2), (2.6.7)等にもみられるように簡略化している。ボディ間の関係を記述する場合にはダイレクト・パス以外にも類似の方法が数多くあるが、その中で最も簡単なものが、このダイレクト・パスによる記述といえるであろう。

運動方程式の記述では、まず内力、内トルクを考慮して各ボディの運動方程式を導き、全体の和をとることによって内力を、またあるヒンジから外側のボディの和をとることによってそのヒンジ点以外の内トルクを消去するという一般的な方法によっている。その他、弾性運動を摂動として扱い、弾性モードに Hurty のコンポーネント・モード・シンセシスを採用するなど、実用的な観点から方程式の単純化、低次元化をはかっている。

Hoの方法は(ダイレクト・パスを除き)手法的に特に目新しいわけではないが、従来の手法を統合し

て汎用プログラム化したという点で評価されるものである。

2.7 Bodley/Devers/Park/Frisch (DISCOS)¹⁾

2.7.1 概 要

本手法は図 2.7.1 のような接続された複数個の物体から成る系の動的応答を解析するものである。各物体はどれも剛体であってもよいし、柔軟体であっ

てもよく、物体間のヒンジも、図 2.7.2 のように 6 自由度の相対運動が許される。また、システム全体は閉ループ構造になっていてもよく、センサやモーメンタム・ホイール、リアクション・ジェットを搭載することも可能である。外力として、重力、重力傾度トルク、太陽輻射圧、熱的勾配、空力抵抗等も考慮できる。DISCOS プログラムの能力としては、

- (1) 柔軟体（あるいは剛体）の結合体として理想化される全システムの非線型微分方程式の組立

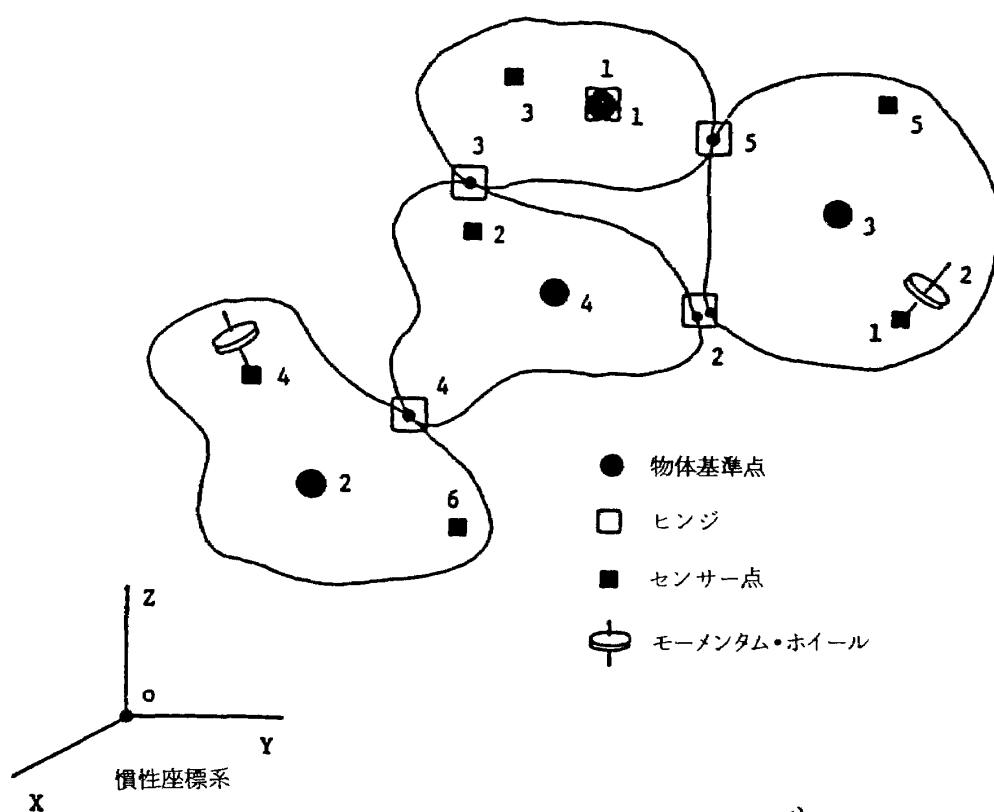


図 2.7.1 全システムとそのラベリング法の例 (Bodley 他¹⁾による)

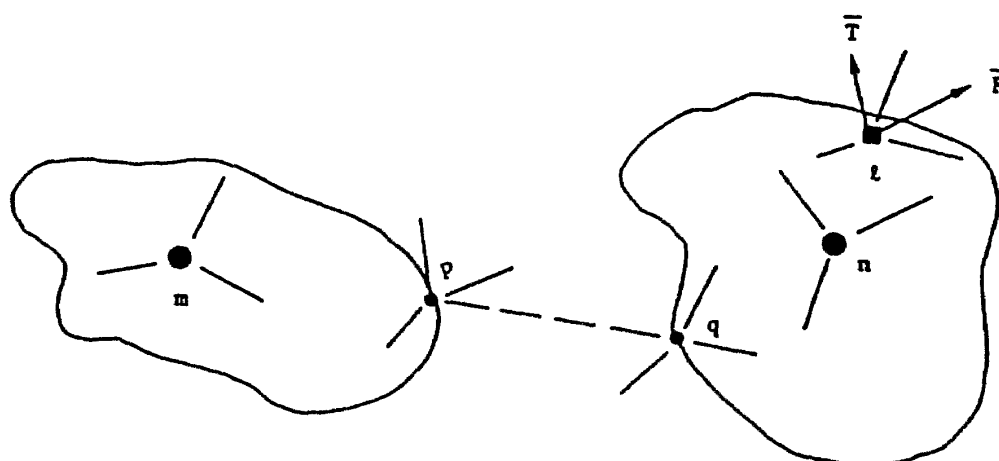


図 2.7.2 システム中の典型的な隣接する 2 物体 (Bodley 他¹⁾による)

て及び時間領域での解。

- (2) 数値的方法による運動方程式の線型化。
- (3) ノミナル運動まわりでの微小じょう乱運動の時間領域での解。
- (4) 周波数領域での安定性の解析。

DISCOSでは、運動をシミュレートするために、まず個々の物体について、非ホロノミックでしかもレオノーマスな拘束を許すように、Lagrangeの運動方程式を解いている。柔軟体については、あらかじめそのモード関数を与えなければならない。また、システムの制御に関しては、すべてユーザ側が用意しなければならない。

さて、柔軟体を結合して構成されるシステムの動的応答を支配する状態方程式は、

$$\{\dot{U}\}_j = [m]_j^{-1} (\{G\}_j + [b]_j^T \{\lambda\}) \quad (\text{II-1})$$

$$\{\dot{\xi}\}_j = [S_\xi]_j \{U\}_j \quad j=1 \sim n \quad (\text{II-2})$$

$$\{\dot{\rho}\}_j = \sum_j [\rho]_j \{U\}_j \quad (\text{II-3})$$

$$\{\dot{\delta}\}_j = f(\{\rho\}_j, \{\dot{\rho}\}_j, \{\xi\}_j, \{\dot{\xi}\}_j, \{S\}) \quad (\text{II-4})$$

また、拘束条件式は

$$\sum_j [b]_j \{U\}_j = \{\dot{\alpha}\} \quad (m \text{ 次}) \quad (\text{II-5})$$

ここで、

$\{U\}_j$ = 非ホロノミック速度ベクトル

$\{\xi\}_j$ = モード変位座標系

$\{\rho\}_j$ = ヒンジ点でのキネマティックな座標系

$\{\delta\}_j$ = 制御その他のための付属変数

以下、簡単に(II-1)~(II-5)式を説明すると、

(II-1)：システムの第 j 番目の物体についての動的平衡方程式。変形に依存する質量行列 $[m]_j$ と相対加速度 $\{\dot{U}\}_j$ をかけ合わせたものが、慣性力 $\{G\}_j$ と拘束力 $[b]_j^T \{\lambda\}$ に等しい。 $\{G\}_j$ ベクトルには、遠心力、コリオリ力、弾性的復元力、ダンピング力、制御アクチュエータ力などが含まれる。

(II-2)：モード速度ベクトル $\{\dot{\xi}\}_j$ は $\{\dot{U}\}_j$ の部分ベクトルであることを意味しており、 $[S_\xi]_j$ は、 I_N を N 次の正方単位行列として、 $[S_\xi]_j = [0 : 0 : I_N]$ (II-44)

と表現できる。

(II-3)：非ホロノミック速度とヒンジ点でのキネマティックな座標系との間の関係式。

(II-4)：制御ダイナミックスやフィードバック効果を出すためのユーザが定義する微分方程式。

(II-5)：拘束条件式。 $\{U\}_j$ ベクトルの独立な要素と速度 $\{\dot{\alpha}\}$ ベクトルから、 $\{\dot{U}\}_j$ ベクトルの従属な m 個の要素を計算する。

一般に、一般化座標を導入すると、Lagrangeの未定乗数や独立でない変数は運動方程式から消去されるが、DISCOSではこれらの変数が残されている。それは、

(1) 内力や内部トルクをモニターするため。

(2) (II-1) 式の中で $\{\lambda\}$ ベクトルを使って計算する方が汎用性がある。

の2点による。 $\{\lambda\}$ は(II-5)式を微分して(II-1)を結びつけて、

$$\{\lambda\} = \left(\sum_j [b]_j [m]_j^{-1} [b]_j^T \right)^{-1} [\{\dot{\alpha}\} - ([\dot{b}]_j \{U\}_j + [b]_j [m]_j^{-1} \{G\}_j)] \quad (\text{II-6})$$

より求められる。解法のプロセスは次のi)~v)ステップに分けられる。

i) 位置やモード変位座標系に依存する行列 $[B]_j$, $[b]_j$

ii) (II-5)式を用いて $\{U\}_j$ ベクトルの独立でない要素の計算。独立な要素は(II-1)式より $\{\dot{U}\}_j$ を数値的に積分する。

iii) (II-2), (II-3)式より $\{U\}_j$ ベクトルからモード速度 $\{\dot{\xi}\}_j$ 及びヒンジでのキネマティックな変数 $\{\dot{\rho}\}_j$ の計算。

iv) (II-4)式より制御変数 $\{\dot{\delta}\}$ の計算。その結果から $\{G\}_j$, $[m]_j$, $[b]_j$ が数値的に求められる。

v) $\{\lambda\}$ を求めて(II-1)式へ代入、 $\{\dot{U}\}_j$ の計算。ユーザは $\{\xi\}_j$, $\{\dot{\xi}\}_j$, $\{\rho\}_j$, $\{\dot{\rho}\}_j$, $\{\delta\}$ 及び可変速度モーメント・ホイールのスピン速度 $\dot{\theta}$ の初期値を規定しなければならない。非ホロノミック速度ベクトル $\{U\}_j$ の初期値は、抽象的でわかりにくいので、DISCOSプログラムの中で、(II-3)式と(II-5)式を用いて自動的に作られる。システムがトポロジ一木構造の場合には(II-3), (II-5)の式数が物体速

度を作るために必要十分な数となるが、システムが非トポロジー木構造の場合は、拘束式が増えるために 1 つ以上の物体が柔軟体でなければならない。

2.7.2 本 論

2.7.2.1 (II-1), (II-2) 及び (II-5) 式の導出

DISCOS プログラムでは、Lagrange の運動方程式が基本となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^n a_{ji} \lambda_i \quad (\text{II-18a})$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \dot{q}_i + a_{ji} = 0 \quad i=1 \sim m, j=1 \sim n \quad (\text{II-18b})$$

ここで、 T は運動エネルギー、 V はポテンシャルエネルギー、 D はダンピング力に関する散逸関数である。第 r 番目の物体についての一般化座標 $\{q_r\}$ を

$$\{q_r\} = [\underbrace{\phi \ \theta \ \phi}_{\text{オイラー 姿勢角}} : \underbrace{XYZ}_{\text{物体の基準点の座標}} : \underbrace{\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_N}_{\text{弾性変形座標系}}]^T_r$$

と定義し、非ホロノミック速度ベクトル $\{U\}_r$ を

$$\{U\}_r = [\underbrace{\omega_x \ \omega_y \ \omega_z}_{\text{角速度}} : \underbrace{u, v, w}_{\text{機体軸からみた速度}} : \underbrace{\dot{\xi}_1 \ \dot{\xi}_2 \ \dots \ \dot{\xi}_N}_r]^T$$

と定義すると、 $\{q\}_r$ と $\{U\}_r$ の間の関係は (II-19) 式で結びつけられる。この式の中で、 π_{ij} は角速度と Euler 角との関係式であり、 γ_{ij} は機体軸上での速度と慣性軸上での速度との間の方向余弦行列である。

(II-19) 式は簡単に (II-20) 式のように書き表わせる。

($[\beta]$ は Euler 角の関数である。)

$$\{U\} = [\beta] \{q\} \quad (\text{II-20})$$

以上の準備をもとにして、(II-18) 式を具体的に表現する。まず、運動エネルギー T は、その物体の全体的積 V にわたって、

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \sigma dV \quad (\text{II-21})$$

ここで、 \mathbf{V} は速度ベクトル、 σ は密度であり、図 2.7.3 より

$$\eta(X, Y, Z, t) = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \phi_{Xk}(X, Y, Z) \\ \phi_{Yk}(X, Y, Z) \\ \phi_{Zk}(X, Y, Z) \end{bmatrix} \xi_k(t) \quad (\text{II-24})$$

とすれば

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \omega \times (\rho_0 + \eta) + \sum_{k=1}^N \phi_k \dot{\xi}_k \quad (\text{II-25})$$

と書けることがわかる。基準点 R の速度は慣性軸、機体軸どちらでも表現でき、

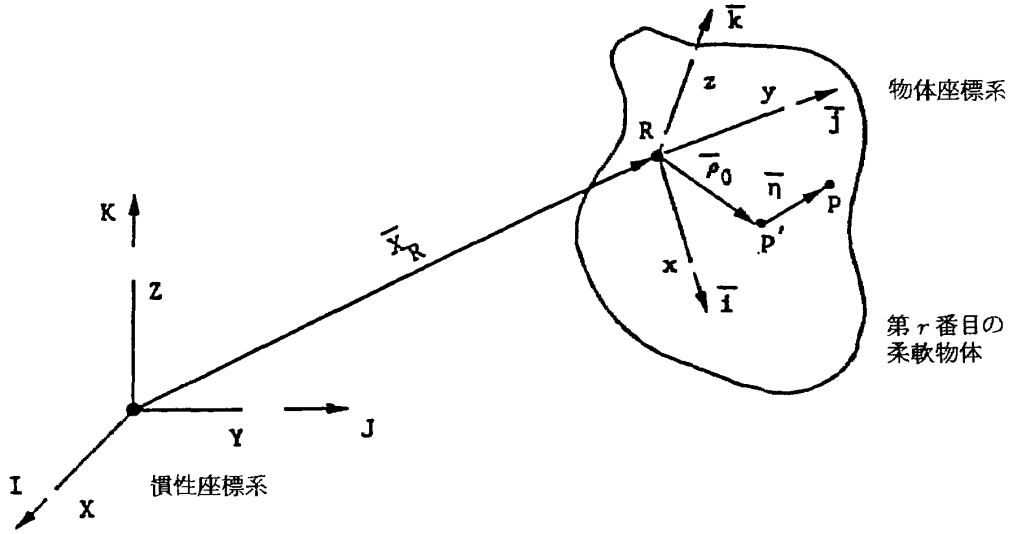
$$\mathbf{V}_R = \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} = [\mathbf{I} \ \mathbf{J} \ \mathbf{K}] \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{II-26})$$

(II-25) 式を (II-26) 式へ代入すると

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_V \{ & \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{V}_R + [\omega \times (\rho_0 + \eta)] \cdot [\omega \times (\rho_0 + \eta)] \\ & + \phi_k \cdot \phi_j \dot{\xi}_k \dot{\xi}_j \\ & + 2\mathbf{V}_R \cdot [\omega \times (\rho_0 + \eta)] + 2\mathbf{V}_R \cdot \phi_k \dot{\xi}_k \\ & + 2[\omega \times (\rho_0 + \eta)] \cdot \phi_k \dot{\xi}_k \} \sigma dV \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$

$$= \frac{1}{2} m [u \ v \ w] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ u \\ v \\ w \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & & & & & & \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & & & & & & \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & & & & & & \\ & & & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & & & \\ & & & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & & & \\ & & & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_N \end{bmatrix} \quad (\text{II-19})$$

図 2.7.3 第 r 番目の柔軟物体 (Bodley 他¹⁾による)

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} [\omega_x \omega_y \omega_z] \begin{bmatrix} J_{xx} - J_{xy} - J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} - J_{yz} \\ -J_{zx} - J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} e_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k + [u \ v \ w] \begin{bmatrix} 0 & S_x - S_y \\ -S_x & 0 & S_z \\ S_y - S_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
 & + [u \ v \ w] \begin{bmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \\ a_{zk} \end{bmatrix} \dot{\xi}_k + [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z] \begin{bmatrix} d_{xk} \\ d_{yk} \\ d_{zk} \end{bmatrix} \dot{\xi}_k
 \end{aligned}
 \quad (\text{II-29})$$

(II-29)式は最終的に T が $\{U\}$ の二次形式

$$T = \frac{1}{2} \{U\}^T [m] \{U\} \quad (\text{II-38})$$

で表現できることを示している。 $[m]$ はモード座標 ξ_k のみの関数であり,

$$[m] = \begin{bmatrix} J_{xx} - J_{xy} - J_{xz} & 0 & -S_z & S_y & d_{x1} & d_{x2} & \cdots & d_{xN} \\ J_{yy} - J_{yz} & S_z & 0 & -S_x & d_{y1} & d_{y2} & \cdots & d_{yN} \\ J_{zz} & -S_y & S_x & 0 & d_{z1} & d_{z2} & \cdots & d_{zN} \\ \hline & m & 0 & 0 & a_{x1} & a_{x2} & \cdots & a_{xN} \\ & & m & 0 & a_{y1} & a_{y2} & \cdots & a_{yN} \\ & & & m & a_{z1} & a_{z2} & \cdots & a_{zN} \\ \hline (\text{対 称}) & & & & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1N} \\ & & & & & e_{22} & \cdots & e_{2N} \\ & & & & & & \cdots & e_{NN} \end{bmatrix}
 \quad (\text{II-39})$$

あるいは、簡単にまとめて,

$$[m] = \begin{bmatrix} J & -S & d \\ S & m & a \\ d^T & a^T & e \end{bmatrix} \quad (\text{II-40})$$

(II-38)式は一般化座標を用いると,

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_r [\beta]^T [m] [\beta] \{\dot{q}\}_r \quad (\text{II-41})$$

と書き表わせる。同様に、ポテンシャル・エネルギー V と散逸関数 D も二次形式で表現できるものとする。

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2} \{\xi\}^T [K] \{\xi\} \\ = \frac{1}{2} \{q\}^T [S_\xi]^T [K] [S_\xi] \{q\} \\ D = \frac{1}{2} \{q\}^T [S_\xi]^T [C] [S_\xi] \{q\} \end{cases}
 \quad (\text{II-45})$$

$$\quad (\text{II-46})$$

ここで

$$\{\xi\} = [0 : 0 : I_N] \{q\} = [S_\xi] \{q\} \quad (\text{II-44})$$

は (II-2) 式と同値である。これらを (II-18) 式に代入すれば, (II-18a) 式からは,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} ([\beta]^T [m] [\beta] \{\dot{q}\}) &= -[S_\xi]^T ([k] [S_\xi] \{q\} \\ &\quad + [c] [S_\xi] \{\dot{q}\}) \\ &\quad + \{Q\} + \frac{1}{2} \{\{\dot{q}\}^T [\beta_j]^T [m] [\beta_j] \{\dot{q}\}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{\{\dot{q}\}^T [\beta]^T [m] [\beta] \{\dot{q}\}\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{\{\dot{q}\}^T [\beta]^T [m_j] [\beta] \{\dot{q}\}\} \\ &\quad + [a]^T \{\lambda\} \end{aligned}
 \quad (\text{II-47})$$

(II-18b) 式からは

$$[a] \{\dot{q}\} = -\{a_t\} \quad (\text{II-48})$$

ここで $[m_j]$ は $[m]$ の各要素を第 j 番目の一般化

座標; q_r の各成分で偏微分した, 行列をさらにたて型に並べた行列を表わす。

$$[m, j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [m]}{\partial \phi} \\ \frac{\partial [m]}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \frac{\partial [m]}{\partial \xi_N} \end{bmatrix}_j$$

次に一般的な運動量 $\{p\}$ を定義する。

$$\{p\} = [m][\beta]\{\dot{q}\} = [m]\{U\} \quad (\text{II-49})$$

この式を用いて, (II-47), (II-48) 式を書き直すと,

$$\begin{aligned} \{\dot{p}\} &= -[\beta]^{-T} [S_i]^T ([k][S_i]\{q\} + [c][S_i]\{\dot{q}\}) \\ &\quad + [\beta]^{-T} \{Q\} + [\beta]^{-T} (\{\dot{q}\}^T [\beta, j]^T \{p\}) - [\dot{\beta}]^T \{p\} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\beta]^{-T} \{[U]^T [m, j]\{U\}\} + [\beta]^{-T} [a]^T \{\lambda\} \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

また,

$$[a][\beta]^{-1}\{U\} = \{-a_i\} \quad (\text{II-52})$$

さらに変形を行うことによってこれらの式は,

$$\begin{aligned} \{\dot{p}\} &= \{G_{ex}\} - \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \{\xi\} - \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \{\dot{\xi}\} + [\tilde{Q}]\{p\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{[U]^T [m, j]\{U\}\} + [b]^T \{\lambda\} \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

$$[b]\{U\} = \{\dot{a}\} \quad (\text{II-60})$$

このとき,

$$\begin{aligned} \{G_{ex}\} &= [\beta]^{-T} \{Q\} \\ [\tilde{Q}]\{p\} &= [\beta]^{-T} (\{\dot{q}\}^T [\beta, j]^T \{p\} - [\dot{\beta}]^T \{p\}) \end{aligned} \quad (\text{II-58})$$

$$[b] = [a][\beta]^{-1} \quad (\text{II-61})$$

$$\{\dot{a}\} = \{-a_i\} \quad (\text{II-62})$$

ここで $\{G\}$ ベクトルを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \{G\} &= \{G_{ex}\} - \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \{\xi\} - \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \{\dot{\xi}\} + [\tilde{Q}][m]\{U\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{[U]^T [m, j]\{U\}\} - [\dot{m}]\{U\} \end{aligned} \quad (\text{II-63})$$

この $\{G\}$ を用いて, (II-49) 式を微分して (II-59) 式に代入することで, (II-1), (II-5) 式が得られる。

$$\{\dot{U}\} = [m]^{-1} (\{G\} + [b]^T \{\lambda\}) \quad (\text{II-1})$$

$$[b]\{U\} = \{\dot{a}\} \quad (\text{II-5})$$

2.7.2.2 キネマティックスとシステム・トポロジ - ($\{G_{ex}\}$ と (II-3) 式の導出)

(1) $\{G_{ex}\}$ の導出

ポテンシャル関数から導き出せない一般化力はすべて, ラグランジュの運動方程式の $\{Q\}$ の中に現われる。点 p に作用する一般化力あるいは一般化トルクを f_p, T_p とすると, 仮想仕事 δw は,

$$\delta w = f_p \cdot \delta r_p + T_p \cdot \delta \theta_p \quad (\text{II-66})$$

ここで, $\delta r_p, \delta \theta_p$ はそれぞれ仮想変位, 仮想回転を表わす。また,

$$\begin{aligned} \delta r_p &= \frac{dr_p}{dt} \delta t \\ &= v_p \delta t + \omega \times (\rho_0 + \eta_p) \delta t + \sum_{k=1}^N \phi_k \dot{\xi}_k \delta t \\ &= \delta r_p - (\rho_0 + \eta_p) \times \delta \theta + \sum_{k=1}^N \phi_k \delta \xi_k \\ &= [i \ j \ k] \left(\begin{bmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta r_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (z_p + \eta_{zp}) & -(y_p + \eta_{yp}) \\ -(z_p + \eta_{zp}) & 0 & (x_p + \eta_{xp}) \\ (y_p + \eta_{yp}) & -(x_p + \eta_{xp}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \begin{bmatrix} \phi_{xj}(x_p, y_p, z_p) \\ \phi_{yj}(x_p, y_p, z_p) \\ \phi_{zj}(x_p, y_p, z_p) \end{bmatrix} \delta \xi_j \right) \end{aligned} \quad (\text{II-67})$$

$$\delta \theta_p = [i \ j \ k] \left(\begin{bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^N \begin{bmatrix} \sigma_{xj}(x_p, y_p, z_p) \\ \sigma_{yj}(x_p, y_p, z_p) \\ \sigma_{zj}(x_p, y_p, z_p) \end{bmatrix} \delta \xi_j \right) \quad (\text{II-68})$$

これらを (II-66) 式に代入して,

$$\begin{aligned} \delta w &= \delta r_p^T \delta f_p + \delta \theta_p^T \delta T_p \\ &= [\delta \theta_p^T \delta r_p^T] \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix} \\ &= [\delta \theta_i^T \delta r_i^T \delta \xi_i^T] \begin{bmatrix} [I][*] \\ [0][I] \\ [\sigma][\phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} [I] &= 3 \times 3 \text{ の単位行列, } [0] = \text{ゼロ行列} \\ [*] &= \begin{bmatrix} 0 & (z_p + \eta_{zp}) & -(y_p + \eta_{yp}) \\ -(z_p + \eta_{zp}) & 0 & (x_p + \eta_{xp}) \\ (y_p + \eta_{yp}) & -(x_p + \eta_{xp}) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \sigma_{z1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{xN} & \sigma_{yN} & \sigma_{zN} \end{bmatrix}_p \quad [\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{x1} & \phi_{y1} & \phi_{z1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{xN} & \phi_{yN} & \phi_{zN} \end{bmatrix}_p$$

ところで

$$\begin{bmatrix} \delta \theta_i \\ \delta r_i \\ \delta \xi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ u \\ \xi \end{bmatrix} \delta t = [\beta] \{ \dot{q} \} \delta t = [\beta] \{ \delta q \}$$

という関係から δw は,

$$\begin{aligned} \delta w &= \{ \delta q \}^T [\beta]^T \begin{bmatrix} [I] [*] \\ [0] [I] \\ [\sigma] [\phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix} \\ &= \{ \delta q \}^T [\beta]^T [b_p]^T \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II-71})$$

となるが、一方、 $\delta w = \{ \delta q \}^T \{ Q \}$ という関係があるので、これらより、

$$\{ Q \} = [\beta]^T [b_p]^T \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix}$$

が得られる。 $\{ G_{ex} \}$ は (II-57) 式より

$$\{ G_{ex} \} = \sum_{pi}^{NP} \{ G_{ex} \}_{pi} = \sum_{pi}^{NP} [b_{pi}]^T \begin{bmatrix} \delta T_p \\ \delta f_p \end{bmatrix} \quad (\text{II-74})$$

(2) (II-3) 式の導出

(II-3) 式はヒンジ点におけるキネマティックな関係式であり、図 2.7.4 では、点 p と点 q がヒンジ点を、点 m 、点 n がそれぞれの物体の基準点を、点 s がセンサー点を表わしている。点 p に対する点 q の

相対角速度を $\{ \dot{\theta} \}$ 、点 p に対する点 q の相対速度を $\{ \dot{d} \}$ として、それぞれ q 、 p に関する物体座標系で表現する。即ち、第 k ヒンジについて

$$\{ \dot{\theta} \}_k = \begin{bmatrix} \{ \dot{\theta} \} \\ \{ \dot{d} \} \end{bmatrix}_k \quad (\text{II-80})$$

を考えると、相対角速度 $\{ \dot{\theta} \}$ は定義より、

$$\{ \dot{\theta} \} \triangleq [\pi]^{-1} (\{ \omega \}_q - \{ \omega \}_p)$$

ここで、 $[\pi]$ は $p-q$ 間の角速度と Euler 角の関係式である。

$$\begin{aligned} \{ \omega \}_q &= \{ \omega \}_n + [\sigma_q] \{ \dot{\xi} \}_n \\ &= \{ e_q \}^T [{}_q R_n] (\{ \omega \}_n + [\sigma_q] \{ \dot{\xi} \}_n) \\ \{ \omega \}_p &= \{ e_p \}^T [{}_p R_m] (\{ \omega \}_m + [\sigma_p] \{ \dot{\xi} \}_m) \\ &= \{ e_q \}^T [{}_q R_p] [{}_p R_m] (\{ \omega \}_m + [\sigma_p] \{ \dot{\xi} \}_m) \end{aligned}$$

以上の関係式を $\{ \dot{\theta} \}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \{ \dot{\theta} \} &= [\pi]^{-1} ([{}_q R_n] (\{ \omega \}_n + [\sigma_q] \{ \dot{\xi} \}_n) \\ &\quad - [{}_q R_p] [{}_p R_m] (\{ \omega \}_m + [\sigma_p] \{ \dot{\xi} \}_m)) \\ &= [-[\pi]^{-1} [{}_q R_p] [{}_p R_m] : 0 : \\ &\quad -[\pi]^{-1} [{}_q R_p] [{}_p R_m] [\sigma_p]] \{ U \}_m \\ &\quad + [[\pi]^{-1} [{}_q R_n] : 0 : \\ &\quad [\pi]^{-1} [{}_q R_n] [\sigma_q]] \{ U \}_n \end{aligned}$$

また、 $\{ \dot{d} \}$ は定義より、

$$\{ \dot{d} \} \triangleq \{ V \}_q - \{ V \}_p$$

となるが、 $\{ V \}_q$ は、

$$\begin{aligned} V_q &= V_n + \omega_n \times (\rho_0 + \eta_q) + \sum_k^N \phi_k \dot{\xi}_k \\ &= V_n - (\rho_0 + \eta_q) \tilde{\omega}_n + \sum_k^N \phi_k \dot{\xi}_k \end{aligned}$$

p フレームでは

$$\{ V \}_q = [{}_p R_q] [{}_q R_n] (\{ V \}_n + [S_{nq}^{(n)}] \{ \omega \}_n)$$

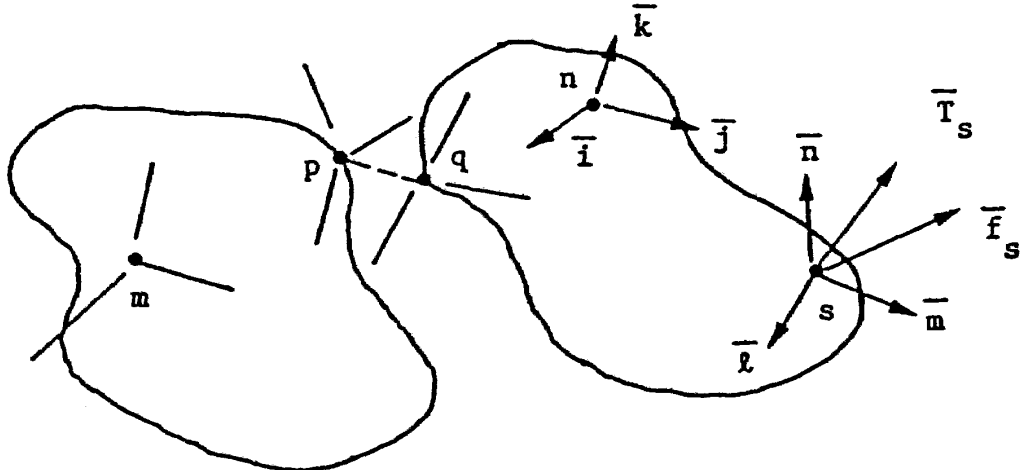


図 2.7.4 システム中の典型的な 2 つの隣接する物体 (Bodley 他¹⁾による)

$$+[h_q]\{\dot{\xi}\}_n$$

ここで, $[S_{nq}^{(n)}]$, $[h_q]$ はそれぞれ, $-(\rho_0 + \eta_q) \times$, $\sum_k^N \phi_k$ の n フレームでの行列表現である。 $\{V\}_p$ も同様に

$$\{V\}_p = [{}_p R_m] (\{V\}_m + [S_{mp}^{(m)}] \{\omega\}_m + [h_p] \{\dot{\xi}\}_m)$$

これより,

$$\begin{aligned} \{\dot{A}\} = & [-{}_p R_m] [S_{mp}^{(m)}] : -[{}_p R_m] : -[{}_p R_m] [h_p] \{U\}_m \\ & + [{}_p R_q] [{}_q R_n] [S_{nq}^{(n)}] : [{}_p R_q] [{}_q R_n] : \\ & [{}_p R_q] [{}_q R_n] [h_q] \{U\}_n \end{aligned}$$

以上の関係式をまとめると

$$\{\dot{\beta}\}_k = [b_p]_k \{U\}_m + [b_q]_k \{U\}_n \quad (\text{II-81})$$

$$[b_p] = \begin{bmatrix} -[\pi]^{-1} [{}_q R_p] [{}_p R_m] & [0] & -[\pi]^{-1} [{}_q R_p] \\ -[{}_p R_m] [S_{mp}^{(m)}] & -[{}_p R_m] & -[{}_p R_m] \\ \frac{[{}_p R_m] [\sigma_p]}{[h_p]} \end{bmatrix} \quad (\text{II-82})$$

$$[b_q] = \begin{bmatrix} [\pi]^{-1} [{}_q R_n] & [0] & [\pi]^{-1} [{}_q R_n] [\sigma_q] \\ [{}_p R_q] [{}_q R_n] [S_{nq}^{(n)}] & [{}_p R_q] [{}_q R_n] & [{}_p R_q] [{}_q R_n] [h_q] \end{bmatrix} \quad (\text{II-83})$$

(II-81)~(II-83)式は 2 物体間のひとつのヒンジについての関係式であるが, 図 2.7.5 のように 7 個の物体から成るシステムを例にして考えてみる。

このとき, 「ITOPOL」と名付けた整数の配列を次のように定義する。

$$[\text{ITOPOL}] = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \leftarrow \text{ヒンジ番号} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \text{ヒンジの属する物体番号}(n) \\ \leftarrow \text{ヒンジを通して隣接する物体番号}(m) \end{matrix} \end{matrix}$$

これを参考にしながら, 各ヒンジ点でのキネマティックな変換行列は, (II-84)式のように表わされ, これを一般的な表現に拡張した式が (II-3) 式である。

$$\{\dot{\beta}\}_j = \sum_j [B]_j \{U\}_j \quad (\text{II-3})$$

	Body (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Hinge							
(1)	$b_{q1,1}$						
(2)		$b_{q2,2}$	$b_{p2,3}$				
(3)		$b_{p3,2}$		$b_{q3,4}$			
(4)			$b_{q4,3}$			$b_{p4,6}$	
(5)			$b_{p5,3}$		$b_{q5,5}$		
(6)		$b_{p6,1}$				$b_{q6,6}$	
(7)					$b_{p7,5}$		$b_{q7,7}$
(8)		$b_{p8,2}$					$b_{q8,7}$

$$\begin{bmatrix} \{U\}_1 \\ \{U\}_2 \\ \{U\}_3 \\ \{U\}_4 \\ \{U\}_5 \\ \{U\}_6 \\ \{U\}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\dot{\beta}\}_1 \\ \{\dot{\beta}\}_2 \\ \{\dot{\beta}\}_3 \\ \{\dot{\beta}\}_4 \\ \{\dot{\beta}\}_5 \\ \{\dot{\beta}\}_6 \\ \{\dot{\beta}\}_7 \\ \{\dot{\beta}\}_8 \end{bmatrix} \quad (\text{II-84})$$

2.7.2.3 モーメンタム・ホイールの干渉

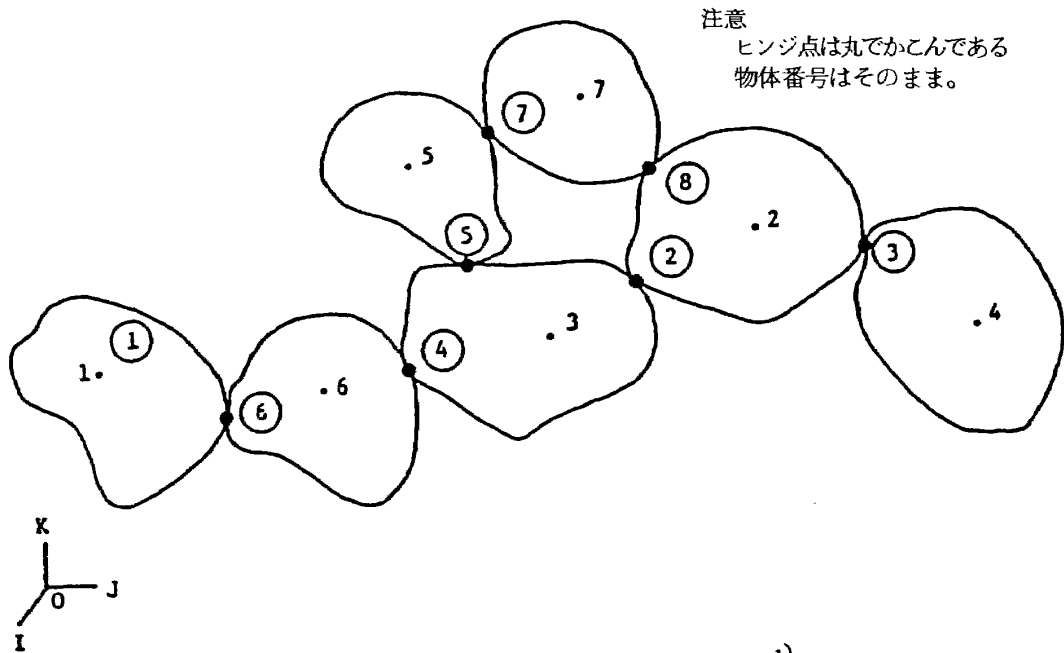
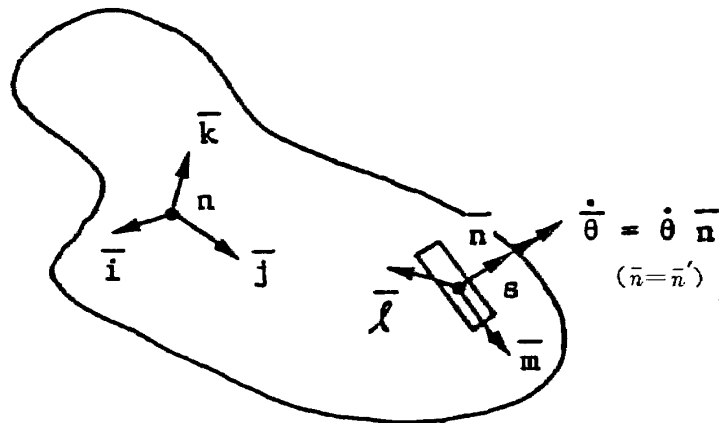
DISCOS で扱えるモーメンタム・ホイールは, その回転軸について慣性的に軸対称であるものに限られるが, 以下, 典型的なモーメンタム・ホイールのカップリング効果について検討する。

$$\{e\}_n = \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} : \text{機体座標系} \quad (\text{II-98})$$

$$\{e\}_s = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} : \text{センサ座標系} \quad (\text{II-99})$$

$$\{e\}_w = \begin{bmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} : \text{ホイール座標系} \quad (\text{II-100})$$

このとき, モーメンタム・ホイールのスピン軸 (l' , m' , n' のどれか) は, センサ座標系の 3 つの軸のどれかと一致するように, センサ座標系を規定しなければならない。図 2.7.6 の例では, スピン軸とセン

図 2.7.5 典型的なシステムのトポロジー (Bodley 他¹⁾による)図 2.7.6 物体とモーメント・ホイールの関係 (Bodley 他¹⁾による)

サ座標系第3軸が一致している。

さて, $\{e\}_w$ 系の慣性系に対する角速度ベクトル ω_w は

$$\begin{aligned}\omega_w &= \{e_w\}^T \{\omega_w\} \\ &= \{e_w\}^T [{}_wR_s] (\{\omega_s\} + \{P_w\} \dot{\theta}) \quad (\text{II-101})\end{aligned}$$

ただし,

$\{\omega_s\}$: $\{e\}_s$ 系の慣性系に対する角速度ベクトル

$[{}_wR_s]$: $\{e\}_s$ 系から $\{e\}_w$ 系への方向余弦行列

$\{P_w\}$: l, m, n のどれがスピン軸に一致するかを示す 3×1 の行列。図 2.7.6 では $\{P_w\} = (001)$

$\dot{\theta}$: $\{e\}_w$ 系の $\{e\}_s$ 系に対する相対的角速度 (スピンレート)

一般に, ホイールの角運動量 h は,

$$h \equiv J \cdot \omega$$

ここで, J はホイールのイナーシャ・ダイアディックであり,

$$J = \{e\}_w^T [J_w] \{e\}_w$$

$[J_w]$ は図 2.7.6 のように $n = n'$ の場合は,

$$[J_w] = \begin{bmatrix} J_T & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & J_s \end{bmatrix}$$

となるので, $[{}_wR_s]^T [J_w] [{}_wR_s] = [J_w]$ より,

$$h = \{e\}_s^T [J_w] (\{\omega_s\} + \{P_w\} \dot{\theta}) \quad (\text{II-102})$$

次にモーメントホイールに作用する力 T は,

$$T = \frac{d}{dt} h$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \\
&= \{\mathbf{e}\}_s^T ([J_w] \{\dot{\omega}_s\} + \{P_w\} \ddot{\theta} + \{\omega_s\} \times [J_w] \{\omega_s\} \\
&\quad + \{\omega_s\} \times \{P_w\} J_s \dot{\theta}) \\
&= \{\mathbf{e}\}_s^T ([J_w] \{\dot{\omega}_s\} + \{P_w\} J_s \ddot{\theta} - [\mathcal{Q}_s] [J_w] \{\omega_s\} \\
&\quad - [\mathcal{Q}_s] \{\omega_s\} J_s \dot{\theta}) \quad (\text{II-103})
\end{aligned}$$

ただし, $[\mathcal{Q}_s] = \{\omega_s\} \times$ である。モーメンタム・ホイールから物体本体に作用するトルクは $-\mathbf{T}$ であり,
 $-\mathbf{T} = \{\mathbf{e}\}_n \{G_{mw}\}$

と書くことができる。 $\{\mathbf{e}\}_s$ 系の慣性系に対する角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_s$ を $\{\mathbf{e}\}_n$ 系で表現すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_s &= \{\mathbf{e}\}_n^T [[I]:[0]:[\sigma_s]] \{U\}_n \\
&= \{\mathbf{e}\}_s^T [{}_s R_n] [[I]:[0]:[\sigma_s]] \{U\}_n \\
&= \{\mathbf{e}\}_s^T \{\omega_s\}
\end{aligned}$$

従って

$$\{\omega_s\} = [{}_s R_n] [[I]:[0]:[\sigma_s]] \{U\}_n = [\hat{b}_s] \{U\}_n \quad (\text{II-106})$$

この式を微分すると,

$$\{\dot{\omega}_s\} = [\dot{\hat{b}}_s] \{U\}_n + [\hat{b}_s] \{\dot{U}\}_n$$

これを用いて,

$$\begin{aligned}
\{G_{mw}\} &= -[\hat{b}_s]^T ([J_w] [\hat{b}_s] \{\dot{U}\}_n + [J_w] [\hat{b}_s] \{U\}_n \\
&\quad + \{P_w\} J_s \ddot{\theta} - [\mathcal{Q}_s] [J_w] \{\omega_s\} \\
&\quad - [\mathcal{Q}_s] \{P_w\} J_s \dot{\theta}) \quad (\text{II-105})
\end{aligned}$$

が得られる。この式の中で $[\dot{\hat{b}}_s]$ 項は方向余弦行列の微分であり,

$$[\dot{\hat{b}}_s] = ({}_s R_n) [\sigma_s] \{\dot{\xi}\}_n^T [\hat{b}_s] \quad (\text{II-107})$$

と書ける。シャフト・トルク T_s は \mathbf{T} のスピン軸への投影だから

$$T_s = \mathbf{P}_w \cdot \mathbf{T} = \{P_w\}^T \{T\}$$

このとき, $\{T\}$ は (II-105) 式を代入するわけであるが (II-105) 式中の $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}$ から得られる項は明らかにスピン軸と直交しているので,

$$\begin{aligned}
T_s &= \{P_w\}^T ([J_w] [\hat{b}_s] \{\dot{U}\}_n + [J_w] [\hat{b}_s] \{U\}_n \\
&\quad + \{P_w\} J_s \ddot{\theta}) \\
&= J_s \{P_w\}^T [\hat{b}_s] \{\dot{U}\}_n + J_s \{P_w\}^T [\hat{b}_s] \{U\}_n \\
&\quad + J_s \ddot{\theta} \quad (\text{II-108})
\end{aligned}$$

以上から, システムの運動方程式に (II-105) 式を加え, モーメンタム・ホイールの制御則として, (II-108) 式を組めばモーメンタム・ホイールと物体 n とのカップリング方程式が導かれる。まず (II-1) 式を変形して,

$$[m]_j \{\dot{U}\}_j = \{G\}_j + [b]_j^T \{\lambda\}$$

この中の $\{G\}_j$ ベクトルは

$$\{G\}_j = \{\hat{G}\}_j + \{G_{mw}\}_j$$

として, $\{\hat{G}\}_j$ には遠心力, コリオリ力, 弾性復元力, 減衰力が含まれ, $\{G_{mw}\}_j$ がモーメンタム・ホイールによる制御力を表わしている。従って, 例えばモーメンタム・ホイールが 2 個の場合には,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} m_j + \hat{b}_1^T J_{w1} \hat{b}_1 + \hat{b}_2^T J_{w2} \hat{b}_2 & \hat{b}_1^T P_{w2} J_{s1} & \hat{b}_2^T P_{w2} J_{s2} \\ J_{s1} P_{w1}^T \hat{b}_1 & J_{s1} & 0 \\ J_{s2} P_{w2}^T \hat{b}_2 & 0 & J_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{U}\}_j \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \{\hat{G}\}_j + [b]_j^T \{\lambda\} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \sum_w [\hat{b}_s]^T [\mathcal{Q}_s] [J_w] \{\omega_s\} - \sum_w [\hat{b}_s]^T [J_w] [\dot{\hat{b}}_s] \{U\}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} - \sum_w [\hat{b}_s]^T \{\tilde{P}_w\} [b_s] \{U\}_n J_s \dot{\theta} \\ {}^w T_{s1} - J_{s1} \{P_{w1}\}^T [\hat{b}_1] \{U\}_n \\ T_{s2} - J_{s2} \{P_{w2}\}^T [\hat{b}_2] \{U\}_n \end{bmatrix} \quad (\text{II-109})
\end{aligned}$$

が得られる。

最後に, モーメンタム・ホイールを組み込んだ場合についてまとめると,

- i) $\{U\}_j$ ベクトルにモーメンタム・ホイールの回転速度 $\dot{\theta}$ を組み込む。(DISCOS では, モーメンタム・ホイールがあると, $\{U\}_j$ の次元が大きくなる。)
- ii) 慣性質量行列 $[m]_j$ を拡張する。
- iii) (II-1) 式の右辺にモーメンタム・ホイール効果を表わす 2 つの項を加える。

(II-109) 式の右辺第 3 項に現われる T_s は, モーメンタム・ホイールが可変速の場合は, 別の制御則によって規定されなければならない。また, 定速ホイールの場合は T_s は 0 であるが, 同項の上段に $\dot{\theta}$ の項が残るが, これが, 定速モーメンタム・ホイールによる「ジャイロ効果」である。

2.7.3 まとめ及び効果

非トポロジカルな構造が取扱えて, しかも剛体, 柔軟体の区別を問わないという点で, DISCOS は汎用シミュレーション・プログラムとしては, 現在のところ最強であるといえよう。本報告では省略したが, DISCOS は重力傾度トルクや熱環境の影響も導入できることも高く評価できよう。しかし, 原論文

(NASA TP-1219)を読んだ限りでは、いくつか不明な点があげられる。

- 1) 非トポロジカルな構造では、すべてが剛体であると拘束式が解けなくなるので、1つ以上の物体が柔軟体でなければならないと原論文に明記されているが、これは常に正しいのか？
- 2) 柔軟モード座標系は(II-25)式のみが得られており、具体的な導入法がわからない。従って、有限要素法との整合性、境界条件など不明な点が多い。

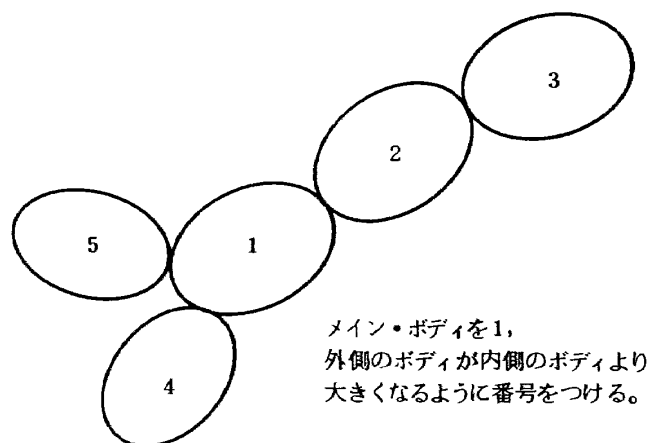


図 2.8.1 Jerkovsky の方法で対象とするシステム

2.8 Jerkovsky¹⁾

2.8.1 概 要

Jerkovsky の方法は運動方程式を拘束のない自由な方向と拘束のある方向に分離することによって未知の拘束力を消去するものである。

対象：トポロジー木構造，剛体

ヒンジ自由度：6 自由度

力学上の原理：Newton-Euler 方程式

内力，内トルクの消去法：運動方程式の分離

注目点：運動方程式を分離するという，いわば数学的側面にたって拘束力を消去する手法。

得られる式は通常の和+内積による拘束力消去の場合と変わらないが，式の導出がかなり機械的に行なわれる。

独立な変数：運動方程式の変数を速度にとる場合と運動量にとる場合の2つがあり，各表 2.8.1 のようになる。

Jerkovsky の方法で対象とするシステムの概略図を図 2.8.1 に示す。各ボディはすべて剛体である。

2.8.2 本 論

主な記号を表 2.8.2 に示す。

2.8.2.1 ボディ間の関係の定義

Jerkovsky の方法では図 2.8.2 に示すようなトリ-構造の剛体系を対象に運動方程式を導く。まずメイン・ボディの番号を1とし，ボディ1とボディ j のあいだのボディ i には $1 < i < j$ なる番号 i をつける。また表 2.8.3 のように用語を定義する。

さらにボディ間の関係を記述するマトリクスとしてパス・マトリクス π_{ij} を次のように定義する。

$\pi_{ij}=1$: ボディ $j \in \hat{i}$ (または ボディ $i \in \hat{j}$)

$\pi_{ij}=0$: 上記以外の場合

図 2.8.2 では

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.2.2 基礎方程式

基本的な各ボディの運動方程式を導くにあたって，次のように $6n$ 次のベクトルを定義する。(n は全ボディの数)

$$G = \begin{bmatrix} H_{c_1}^1 \\ H_{c_2}^2 \\ \vdots \\ H_{c_n}^n \\ P^1 \\ P^2 \\ \vdots \\ P^n \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} L_{c_1}^1 \\ L_{c_2}^2 \\ \vdots \\ L_{c_n}^n \\ F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^n \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \\ v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ \vdots \\ v_{c_n} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \omega^1 \times H_{c_1}^1 \\ \omega^2 \times H_{c_2}^2 \\ \vdots \\ \omega^n \times H_{c_n}^n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

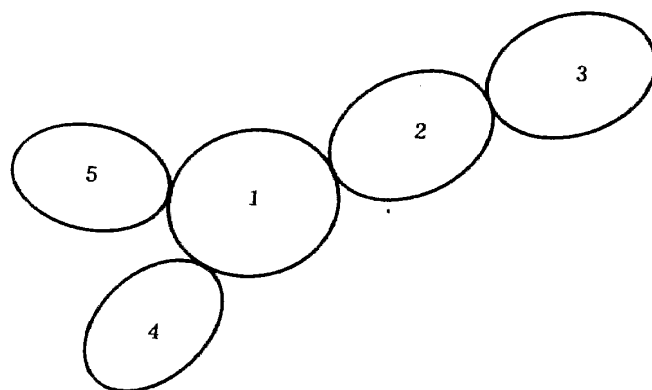


図 2.8.2 対象とするシステム (図 2.8.1 を再掲)

表 2.8.1 独立な変数

	速 度	運 動 量
並進方向の 独立変数	あるボディのリファレンス・ボディ（メイン・ボディ側で隣接するボディ）に対する相対速度*	あるボディから外側のボディの運動量の和
回転方向の 独立変数	あるボディのリファレンス・ボディに対する相対角速度*	あるボディから外側のボディの角運動量の和

* ボディがメイン・ボディのときは慣性系に対する速度となる。

表 2.8.2 記 号 表

ω^j	ボディ j の慣性系に対する角速度
v_{c_j}	ボディ j の質量中心 c_j の慣性系に対する速度
H_a^j	ボディ j の点 a のまわりの角運動量（慣性系）
P^j	ボディ j の運動量（慣性系）
$I_{c_j}^j$	ボディ j の質量中心 c_j のまわりの慣性テンソル
M^j	ボディ j の質量 M^j を対角成分とする 3×3 の対角行列
L_a^j	ボディ j の点 a まわりに働くトルク
F^j	ボディ j に働く力
G	運動量ベクトル
σ	速度ベクトル
K	力, トルクベクトル
Ω^j	ボディ j のリファレンス・ボディに対する相対角速度
U^j	ボディ j のリファレンス・ボディに対する相対速度
π_{ij}	パス・マトリクスの成分 ボディ j がメイン・ボディとボディ i の間のとき 1, それ以外は 0

表 2.8.3 $\underline{i}, \hat{j}, \bar{j}$ の定義（表中の値は図 2.8.2 に基づく）

	記 号	定 義	ボ デ ィ 番 号				
			1	2	3	4	5
リファレンス・ボディ	\underline{i}	ボディ j に内側で（メイン・ボディ側で）隣接するボディ	0	1	2	1	1
インワード・セット	\hat{j}	ボディ j の内側のボディの集合	1	1, 2	1, 2, 3	1, 4	1, 5
アウトワード・セット	\bar{j}	ボディ j の外側のボディの集合	1, 2, 3, 4, 5	2, 3	3	4	5

たとえば、ボディ 3 のインワード・セットは $\hat{3}$ とあらわし、図 2.8.2 では $\hat{3} = \{1, 2, 3\}$ である。

また $6n \times 6n$ の慣性マトリクス μ を

$$\mu = \text{diag} [I_{c_1}^1 I_{c_2}^2 \cdots I_{c_n}^n M^1 M^2 \cdots M^n]$$

とすると、この定義より明らかに

$$G = \mu \sigma \quad (2.8.1)$$

となる。さて運動方程式の定式化には変数を速度にとる場合と運動量にとる場合の2通りが考えられるが、運動量にとる場合の運動方程式は

$$\dot{G} + X = K \quad (2.8.2)$$

(ただし X は後の方程式と形式的に一致させるために設けた項で今の場合 $X = 0$)

また速度にとる場合は

$$\mu \dot{\sigma} + Y = K \quad (2.8.3)$$

になる。いずれの場合にも \cdot は慣性系における時間微分をあらわしている。

2.8.2.3 相対量に変換した運動方程式

(2.8.2) や (2.8.3) の運動方程式は速度や運動量を慣性系に対する絶対量にとっているのが拘束条件を導入できない。ここでは拘束条件を導入するためにこれらの絶対量をリファレンス・ボディに対する相対量に変換する。図 2.8.3 のようにボディ j のベース点 b_j はリファレンス・ボディ j 上に、ヒンジ点 h_j はボディ j 上にそれぞれ固定されている。またメイン・ボディのベース点 b_1 は慣性座標系の原点にとり、ヒンジ点 h_1 はメイン・ボディ上に適当に定める。さらに次のように記号を定義する。

$\mathcal{Q}^j = \omega^j - \omega^i$: ボディ j のボディ i に対する相対角速度

$U^j = \dot{R}_{h_j b_j}^j$: h_j の b_j に対する相対速度

(R_{ab} はベクトル \vec{ba} を, \hat{R}_{ab} はベクトル \vec{ba} のボディ c に固定した座標系での速度をあらわす。したがって U^1 は h_1 の慣性系に対する速度 v_{h_1} となる。)

明らかに

$$\omega^i = \sum_{j \in \hat{i}} \mathcal{Q}^j = \sum_{j=1}^n \pi_{ij} \mathcal{Q}^j \quad (2.8.4)$$

またボディ i の質量中心 c_i の速度 v_{c_i} は

$$\begin{aligned} v_{c_i} &= \sum_{j \in \hat{i}} (\omega^j \times h_j \vec{h_j} + U^j) + \omega^i \times h_i \vec{c_i} \\ &= \sum_{j \in \hat{i}} (\mathcal{Q}^j \times h_j \vec{c_i} + U^j) \end{aligned}$$

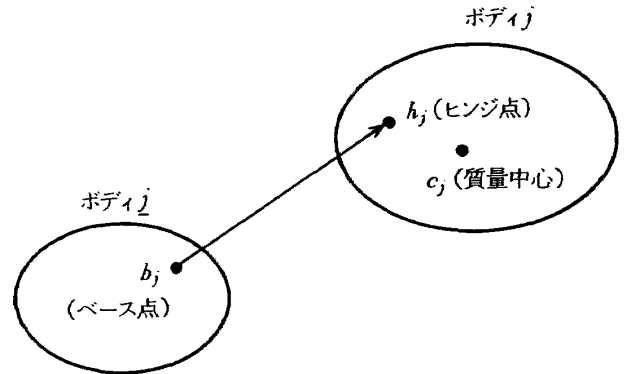


図 2.8.3 ベース点とヒンジ点

$$= \sum_{j=1}^n \pi_{ij} (\tilde{R}_{c_i h_j}^t \mathcal{Q}^j + U^j) \quad (2.8.5)$$

ただし $\tilde{R}_{c_i h_j}^t$ は $R_{c_i h_j}^t$ の行列表現である。いま σ のかわりに新しい速度変数

$$\bar{\sigma}^t = [\mathcal{Q}^1 \mathcal{Q}^2 \cdots \mathcal{Q}^n U^1 U^2 \cdots U^n]$$

をとることにすると、(2.8.4), (2.8.5) 式から

$$\sigma = A \bar{\sigma}$$

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{\pi}^{3n} & \overbrace{0}^{3n} \\ \pi_{11} \tilde{R}_{c_1 h_1}^t \cdots \pi_{1n} \tilde{R}_{c_1 h_n}^t & \pi \\ \vdots & \vdots \\ \pi_{m1} \tilde{R}_{c_m h_1}^t \cdots \pi_{mn} \tilde{R}_{c_m h_n}^t & \pi \end{bmatrix}$$

という関係が成り立つ。この関係から新たに

$$\bar{G} = A^t G, \quad \bar{K} = A^t K, \quad \bar{\mu} = A^t \mu A \quad (2.8.7)$$

として \bar{G} , \bar{K} , $\bar{\mu}$ を定義すると \bar{G} は

$$\bar{G}^t = (\bar{H}_{h_1}^1 \bar{H}_{h_2}^2 \cdots \bar{H}_{h_n}^n \bar{P}^1 \bar{P}^2 \cdots \bar{P}^n)$$

$$\bar{H}_{h_j}^j = \sum_{i=1}^n \pi_{ij} (\bar{H}_{c_i}^i + \tilde{R}_{c_i h_j}^t \bar{P}^i) = \sum_{i \in \bar{j}} (\bar{H}_{c_i}^i + \tilde{R}_{c_i h_j}^t \bar{P}^i)$$

$$\bar{P}^j = \sum_{i=1}^n \pi_{ij} \bar{P}^i = \sum_{i \in \bar{j}} \bar{P}^i \quad (2.8.8)$$

と表わすことができる。ここで \bar{P}^j はボディ j のアウトワード・セット \bar{j} の運動量の総和であり、 $\bar{H}_{h_j}^j$ はボディ j のアウトワード・セットのヒンジ点 h_j まわりの角運動量の総和であり、また $G = \mu \sigma$ の関係から明らかに

$$\bar{G} = \bar{\mu} \bar{\sigma} \quad (2.8.9)$$

が成り立つ。(2.8.6), (2.8.7) 式の関係を用いて (2.8.2), (2.8.3) 式に代入すると相対量に変換された運動方程式が得られる。すなわち

$$\dot{\bar{G}} + \bar{X} = \bar{K} \quad \bar{X} = A^t X - \dot{A}^t G \quad (2.8.10)$$

$$\mu \dot{\bar{\sigma}} + \bar{Y} = \bar{K} \quad \bar{Y} = A^t (Y + \mu \dot{A} \bar{\sigma}) \quad (2.8.11)$$

2.8.2.4 独立な変数と拘束された変数の分離

(2.8.10), (2.8.11) 式は相対量で表現されているので独立な変数と拘束された変数を分離することができる。すなわちヒンジの運動をあらわす座標系を設定し、その座標系に対してこれらの変数を分離する。

ヒンジ点 h_i の回転方向をあらわす単独ベクトル $\hat{\gamma}_j^i$ 、並進方向をあらわす単位ベクトル $\hat{\delta}_j^i$ とすると、 $\hat{\delta}_j^i$ ($j=1, 2, 3$) は互いに直交するが、 $\hat{\gamma}_j^i$ ($j=1, 2, 3$) は直交していない。そこで $\hat{\gamma}_j^i$ のレシプロカル・ベクトルを γ_j^{i*} ($j=1, 2, 3$) とおいて、これらを用いて \mathcal{Q}^i , U^i , $H_{h_i}^i$, P^i を次のように分解する。

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただしレシプロカル・ベクトル } \gamma_j^{i*} \text{ は次式で定義} \\ \text{される。} \quad \gamma_1^{i*} = (\hat{\gamma}_2^i \times \hat{\gamma}_3^i) / (\hat{\gamma}_1^i \times \hat{\gamma}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3^i) \\ \quad \gamma_2^{i*} = (\hat{\gamma}_3^i \times \hat{\gamma}_1^i) / (\hat{\gamma}_1^i \times \hat{\gamma}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3^i) \\ \quad \gamma_3^{i*} = (\hat{\gamma}_1^i \times \hat{\gamma}_2^i) / (\hat{\gamma}_1^i \times \hat{\gamma}_2^i \cdot \hat{\gamma}_3^i) \end{array} \right)$$

$$\mathcal{Q}^i = \mathcal{Q}_{\delta_1^i}^i \hat{\delta}_1^i + \mathcal{Q}_{\delta_2^i}^i \hat{\delta}_2^i + \mathcal{Q}_{\delta_3^i}^i \hat{\delta}_3^i = \Gamma^i \mathcal{Q}_{\delta}^i \quad (2.8.12)$$

$$U^i = U_{\delta_1^i}^i \hat{\delta}_1^i + U_{\delta_2^i}^i \hat{\delta}_2^i + U_{\delta_3^i}^i \hat{\delta}_3^i = \mathcal{A}^i U_{\delta}^i \quad (2.8.13)$$

$$\begin{aligned} H_{h_i}^i &= H_{h_i, \gamma_1^i}^i \gamma_1^{i*} + H_{h_i, \gamma_2^i}^i \gamma_2^{i*} + H_{h_i, \gamma_3^i}^i \gamma_3^{i*} \\ &= \Gamma^{i*} H_{h_i, \gamma}^{i*} \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

$$P^i = P_{\delta_1^i}^i \hat{\delta}_1^i + P_{\delta_2^i}^i \hat{\delta}_2^i + P_{\delta_3^i}^i \hat{\delta}_3^i = \mathcal{A}^{it} P_{\delta}^i \quad (2.8.15)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Gamma^i &= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1^i \\ \hat{\gamma}_2^i \\ \hat{\gamma}_3^i \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{i*} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{i*} \\ \gamma_2^{i*} \\ \gamma_3^{i*} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^i = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1^i \\ \hat{\delta}_2^i \\ \hat{\delta}_3^i \end{bmatrix} \\ \mathcal{Q}_{\delta}^i &= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\delta_1^i}^i \\ \mathcal{Q}_{\delta_2^i}^i \\ \mathcal{Q}_{\delta_3^i}^i \end{bmatrix}, \quad U_{\delta}^i = \begin{bmatrix} U_{\delta_1^i}^i \\ U_{\delta_2^i}^i \\ U_{\delta_3^i}^i \end{bmatrix}, \quad H_{h_i, \gamma}^{i*} = \begin{bmatrix} H_{h_i, \gamma_1^i}^{i*} \\ H_{h_i, \gamma_2^i}^{i*} \\ H_{h_i, \gamma_3^i}^{i*} \end{bmatrix} \\ P_{\delta}^i &= \begin{bmatrix} P_{\delta_1^i}^i \\ P_{\delta_2^i}^i \\ P_{\delta_3^i}^i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また Γ^i , Γ^{i*} , \mathcal{A}^i には次の関係がある。

$$\Gamma^{it} \Gamma^{i*} = 1, \quad \mathcal{A}^{it} \mathcal{A}^i = 1 \quad (2.8.16)$$

さて、ここで各座標系について独立な変数を先に、拘束された変数をあとにとるように決める。たとえば回転に対して拘束された方向が2つあるとすれば、独立な方向を $\hat{\gamma}_1^i$ の方向に、拘束される方向を $\hat{\gamma}_2^i, \hat{\gamma}_3^i$ の方向にとる。独立な方向に f 、拘束された方向に c の添字をつけることにして Γ , Γ^* , \mathcal{A} を次のように分離する。

$$\Gamma^i = \begin{bmatrix} \Gamma_f^i \\ \Gamma_c^i \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{i*} = \begin{bmatrix} \Gamma_f^{i*} \\ \Gamma_c^{i*} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_f^i \\ \mathcal{A}_c^i \end{bmatrix}$$

これを用いて次のように \mathcal{Q}^i , U^i , $H_{h_i}^i$, P^i を分離する。

$$\mathcal{Q}^i = \Gamma_f^{it} \mathcal{Q}_f^i + \Gamma_c^{it} \mathcal{Q}_c^i \quad (2.8.17)$$

$$U^i = \mathcal{A}_f^{it} U_f^i + \mathcal{A}_c^{it} U_c^i \quad (2.8.18)$$

$$H_{h_i}^i = \Gamma_f^{i*} H_{h_i, f}^i + \Gamma_c^{i*} H_{h_i, c}^i \quad (2.8.19)$$

$$P^i = \mathcal{A}_f^{it} P_f^i + \mathcal{A}_c^{it} P_c^i \quad (2.8.20)$$

(2.8.17), (2.8.18) 式を用いて σ を独立な変数 $\hat{\sigma}_f$ と拘束された変数 $\hat{\sigma}_c$ に分離する。

$$\bar{\sigma} = \hat{A} \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \Gamma_f^{it} & 0 & 0 & \cdots & \Gamma_c^{it} & 0 & 0 & \cdots \\ & \Gamma_f^{2it} & 0 & 0 & \cdots & & \Gamma_c^{2it} & 0 & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_f^{it} & & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_c^{it} & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_f^{2it} & & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_c^{2it} & \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_f^1 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_f^n \\ U_f^1 \\ \vdots \\ U_f^n \\ \mathcal{Q}_c^1 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_c^n \\ U_c^1 \\ \vdots \\ U_c^n \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{matrix}$$

(2.8.21)

(2.8.21) 式の変換行列 \hat{A} を用いて

$$\hat{G} = \hat{A}^t \bar{G} = \begin{bmatrix} \hat{A}_f^t \bar{G} \\ \hat{A}_c^t \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}_f \\ \hat{G}_c \end{bmatrix} \quad (2.8.22)$$

とおくと、(2.8.8), (2.8.19), (2.8.20) 式から

$$\bar{G}_f = \begin{bmatrix} H_f^1 \\ \vdots \\ H_f^n \\ P_f^1 \\ \vdots \\ P_f^n \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_c = \begin{bmatrix} H_c^1 \\ \vdots \\ H_c^n \\ P_c^1 \\ \vdots \\ P_c^n \end{bmatrix} \quad (2.8.23)$$

が成り立つ。すなわち (2.8.21), (2.8.22) 式の間を

用いば $\bar{\sigma}$, \bar{G} を独立な変数と拘束された変数に分離して $\hat{\sigma}$, \hat{G} で表わすことができる。さらに $\hat{\mu}$, \hat{K} を

$$\hat{\mu} = \hat{A}^t \bar{\mu} \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_f^t \bar{\mu} \hat{A}_f & \hat{A}_f^t \bar{\mu} \hat{A}_c \\ \hat{A}_c^t \bar{\mu} \hat{A}_f & \hat{A}_c^t \bar{\mu} \hat{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{ff} & \hat{\mu}_{fc} \\ \hat{\mu}_{cf} & \hat{\mu}_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.8.24)$$

$$\hat{K} = \hat{A}^t K = \begin{bmatrix} \hat{K}_f \\ \hat{K}_c \end{bmatrix} \quad (2.8.25)$$

と定義して、これらの関係式を用いて \hat{G} , $\hat{\sigma}$ に関する運動方程式を導くと次のようになる。

$$\dot{\hat{G}} + \hat{X} = \hat{K} \quad \hat{X} = \hat{A}^t \bar{X} - \hat{A}^t \bar{G} \quad (2.8.26)$$

$$\hat{\mu} \dot{\hat{\sigma}} + \hat{Y} = \hat{K} \quad \hat{Y} = \hat{A}^t (\bar{Y} + \bar{\mu} \dot{\bar{A}} \bar{\sigma}) \quad (2.8.27)$$

ここで (2.8.25) 式の \hat{K}_f は拘束されていない独立な変数に対応する力、トルク項であり拘束力を含まない。拘束力は拘束された変数に対応し \hat{K}_c であらわされる。また (2.8.9) 式より

$$\hat{G} = \hat{\mu} \hat{\sigma} \quad (2.8.28)$$

さて (2.8.26) ~ (2.8.28) 式はすでに独立な変数と拘束された変数に分離されているので、シミュレーションにおいては独立な変数についてのみ積分を行えばよい。これらの式で独立な部分は、

$$\dot{\hat{G}}_f + \hat{X}_f = \hat{K}_f \quad (2.8.29)$$

$$\hat{G}_f = \hat{\mu}_{ff} \hat{\sigma}_f + \hat{\mu}_{fc} \hat{\sigma}_c \quad (2.8.30)$$

$$\hat{\mu}_{ff} \dot{\hat{\sigma}}_f + \hat{\mu}_{fc} \dot{\hat{\sigma}}_c + \hat{Y}_f = \hat{K}_f \quad (2.8.31)$$

運動量による定式化では $\hat{\sigma}_f$ を得るために (2.8.29) 式を積分して \hat{G}_f を得たのち、(2.8.30) 式から $\hat{\mu}_{ff}^{-1}$ を両辺にかけて求めてやればよい。速度による定式化では $\hat{\mu}_{ff}^{-1}$ が必要な点は同じだが、同時に $\dot{\hat{\sigma}}_c$ を求める必要がある (通常は 0)。両定式化とも拘束力 K_c は積分に必要ないが、これを求めたいときには運動量による定式化ではさらに $\dot{\hat{G}}_c$ を必要とする。

2.8.3 まとめ及び評価

Jerkovsky の方法は、運動方程式を拘束をうけない自由な方向と拘束をうける方向に分離して拘束力の消去をはかるもので、Newton-Euler 方程式を基礎にした通常の内力消去法とは異なるが、得られる方程式に本質的な相違はない。この方法の利点は方程式の導出をかなり機械的に行なえる点で、欠点としては物理的な直観の得にくいことがあげられよう。他の Newton-Euler 方程式に基づく方法と同じく、ヒンジにおいてある自由度が拘束されるというよう

な拘束条件は扱いやすいが、形状がループになるような複雑な拘束の場合は容易ではない。結局 Jerkovsky の方法は拘束力の消去に新しい視点を与えたという点で評価されるが、汎用的なプログラムを作成するなどの実用的な面ではさほどの効果をもたらすものではないと思われる。

2.9 Sunada/Dubowsky^{1),2)}

2.9.1 概要

Sunada の方法は柔軟なリンクをもつマニピュレータのモデリングに用いられるもので、リンクの弾性運動は Ho と同じようにノミナルな運動 (剛体運動) からの摂動として扱っている。

対象：チェーン構造、柔軟体 (ただし地上用のマニピュレータが対象でありベース部は固定されている。)

ヒンジ自由度：回転 1 自由度

力学上の原理：Lagrange 方程式 (ただしリンク単体の運動方程式の導出)

内力消去法：コンパティビリティ・マトリクスの導入。独立変数だけをとりだして拘束力を自動的に消去する方法

注目点：マニピュレータ (1 自由度ヒンジ、チェーン構造) の特質をいかした計算の簡略化
コンポーネント・モード・シンセシス³⁾ の採用

汎用プログラム化 (FLEX-ARM; 地上のマニピュレータ用)

独立変数：(弾性運動に対して) インターフェース座標 + 正規モード座標
インターフェース座標は Hurty の拘束モードに対するモード変位にあたり、各リンク間の関係を記述する。正規モード座標は Hurty の正規モードに対するモード変位である。

Sunada の方法で対象とするシステムの概略図を図

2.9.1 に、またこの方法の概要を表 2.9.1 に示す。

2.9.2 本論

2.9.2.1 リンク間の幾何学的関係

対象とするマニピュレータのリンク間の関係を図 2.9.2 に示す。各リンクはジョイント部で回転 1 自

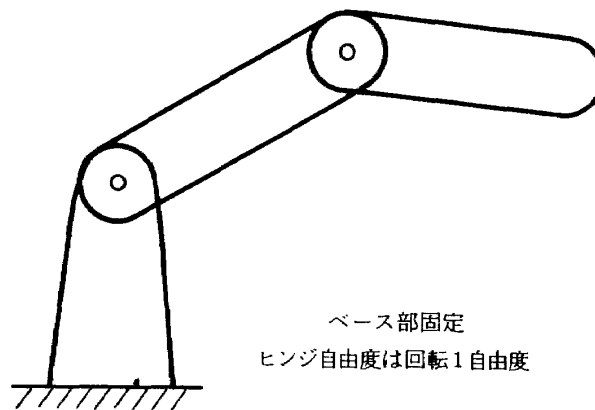
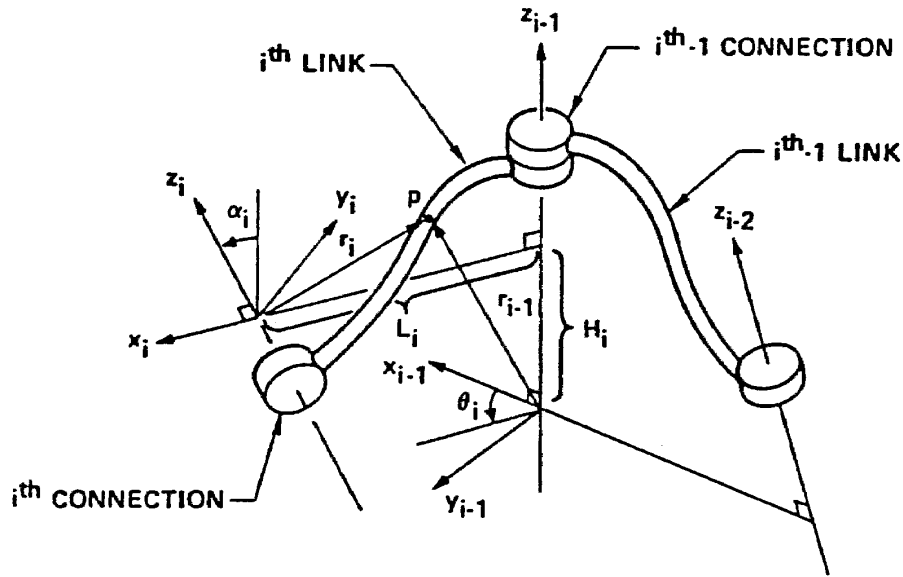


図 2.9.1 Sunadaの方法で対象とするシステム

表 2.9.1 Sunadaの方法の概要

モデル化とシミュレーション		弾性運動のモデル化の説明	座標の記号	弾性運動の自由度の数の例
剛体運動	弾性運動			
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">剛体運動のモデル</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">NASTRANによるモデル</div>	各リンク毎に行なう。 弾性座標 \mathbf{p} は ノミナル値からの変動分にとる。	\mathbf{p}	930
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">CMS (コンポーネント・モード・シンセシス)による座標数の低減</div>	各リンク毎に行なう。 各リンクの弾性座標をCMSによりインターフェース座標+正規モード座標として座標の数を減らす。	\mathbf{a}	48
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">コンパティビリティ・マトリクスによる拘束力の消去</div>	各リンク間の接続を行なう。 各リンクの座標を関係づけて独立なものだけを抽出する。 このための行列をコンパティビリティ・マトリクスという。	\mathbf{q}	27
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">弾性運動のモデル</div>	モデル化 ↓ シミュレーション 周波数応答		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">剛体運動のシミュレーション</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">弾性運動のシミュレーション etc.</div>			

図 2.9.2 リンク間の関係 (Sunada¹⁾より抜粋)

由度を有している。図で座標系 $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ はリンク $(i-1)$ ($i^{\text{th}-1}$ LINK) に固定され、座標系 $x_i y_i z_i$ はリンク i に固定されており、リンク i は z_{i-1} 軸まわりに回転する。また $x_i y_i z_i$ と $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ は θ_i , α_i , L_i , H_i によって図に示すように関係づけられている。いま、ある点 p の座標を $x_i y_i z_i$ 系で表現して

$$\mathbf{r}_i = [1 \ x_i \ y_i \ z_i]^T \quad (\text{最初の 1 は原点移動のための項})$$

とすると、図 2.9.2 より \mathbf{r}_i と \mathbf{r}_{i-1} の間には次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{T}_{i-1}^i \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{T}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_i \cos \theta_i \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i \\ L_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i \\ H_i & 0 & \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2.9.1)$$

ここで \mathbf{T}_{i-1}^i は $x_i y_i z_i$ 系から $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 系への座標変換行列である。慣性系を $x_0 y_0 z_0$ 系とすると、慣性系であらわした点 P の座標は

$$\text{慣性系でみた点 } P \text{ の座標} = \mathbf{T}_0^i \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \cdots \mathbf{T}_{i-1}^i \mathbf{r}_i \quad (2.9.2)$$

点 P の慣性系でみた速度を \mathbf{v}_i とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \frac{d}{dt} [\mathbf{T}_0^i \mathbf{r}_i] = \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{T}_0^i) \right] \mathbf{r}_i + \mathbf{T}_0^i \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i) \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij}^0 \dot{\theta}_j \right] \mathbf{r}_i + \mathbf{T}_0^i \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

ただし

$$\begin{aligned} j \leq i \text{ のとき } \mathbf{U}_{ij}^0 &= \frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial \theta_j} = \mathbf{T}_0^{j-1} \frac{\partial \mathbf{T}_{j-1}^j}{\partial \theta_j} \mathbf{T}_j^i \\ &= \mathbf{T}_0^{j-1} \mathbf{Q}^0 \mathbf{T}_{j-1}^i \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$j > i \text{ のとき } \mathbf{U}_{ij}^0 = 0$$

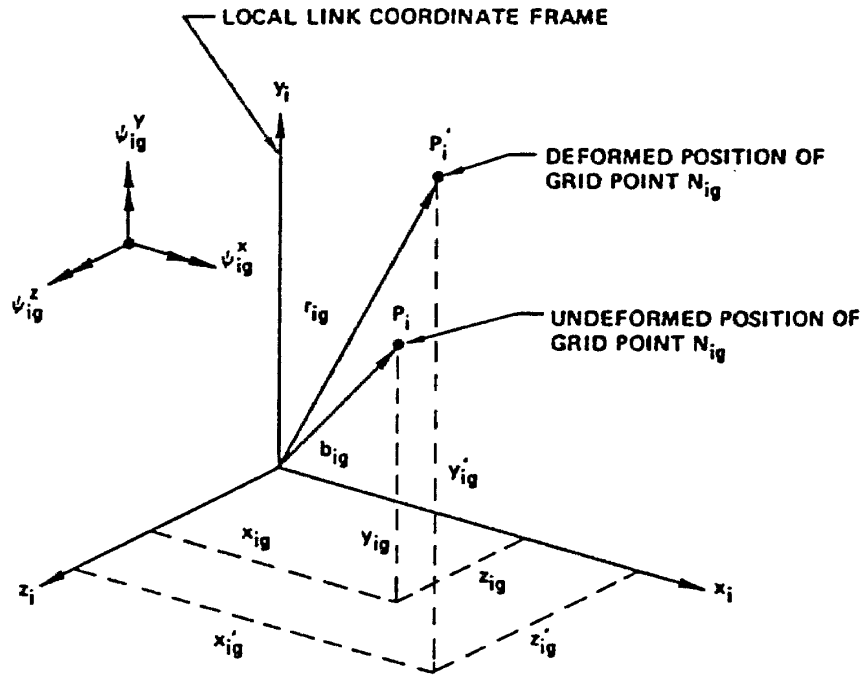
2.9.2.2 リンクの弾性座標

各リンクをいくつかの格子点に分割して各格子点の微小変位、微小回転角をリンクの弾性座標にとる。したがってリンク i の格子点の数を $NG(i)$ 、リンク i の弾性座標の数を $NP(i)$ とすると、 $NG(i)$ と $NP(i)$ の間には $NP(i) = 6 NG(i)$ の関係がある。いま図 2.9.3 に示すようにリンク i の g 番目の格子点がノミナルな位置で P_i 、弾性変形して P_i' の位置にあるとし、 P_i , P_i' の原点からの位置ベクトルを $x_i y_i z_i$ 系における表現で

$$\mathbf{b}_{ig} = (1 \ x_{ig} \ y_{ig} \ z_{ig})^T$$

$$\mathbf{r}_{ig} = (1 \ x'_{ig} \ y'_{ig} \ z'_{ig})^T$$

とする。たとえば $g=1$ のとき弾性座標を $p_{i1} \sim p_{i6}$ を次のようにとる。

図 2.9.3 格子点の弾性変形 (Sunada²⁾より転載)

$$\text{弾性変位} \begin{cases} p_{i1} = x'_{i1} - x_{i1} \\ p_{i2} = x'_{i2} - x_{i2} \\ p_{i3} = x'_{i3} - x_{i3} \end{cases} \quad \text{弾性回転} \begin{cases} p_{i4} = \phi_{i1}^x \\ p_{i5} = \phi_{i1}^y \\ p_{i6} = \phi_{i1}^z \end{cases}$$

すなわち \mathbf{r}_{ig} は \mathbf{b}_{ig} と弾性座標 \mathbf{p} によって次のようにあらわされる。

$$\mathbf{r}_{ig} = \sum_{\beta=1}^{NP(i)} \phi_{ig\beta} p_{i\beta} + \mathbf{b}_{ig} \quad (2.9.4)$$

ただし

$$\begin{aligned} \phi_{ig\beta} &= (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T; \quad \beta=1+6(g-1) \text{ のとき} \\ &= (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T; \quad \beta=2+6(g-1) \text{ のとき} \\ &= (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T; \quad \beta=3+6(g-1) \text{ のとき} \\ &= (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T; \quad \text{上記以外のとき} \end{aligned}$$

これより点 P'_i の慣性系でみた速度を \mathbf{v}_{ig} とすると (2.9.3) 式に代入して

$$\mathbf{v}_{ig} = \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij}^0 \left(\sum_{\beta=1}^{NP(i)} \phi_{ig\beta} p_{i\beta} + \mathbf{b}_{ig} \right) \dot{\theta}_j + \mathbf{T}_0^i \sum_{\beta=1}^{NP(i)} \phi_{ig\beta} \dot{p}_{i\beta} \quad (2.9.5)$$

2.9.2.3 各リンクの運動方程式

運動方程式はまず各リンク毎にたてる。リンク i の運動エネルギーを T_i 、ポテンシャル・エネルギーを V_i とするとリンク i の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T_i)}{\partial \dot{p}_{ia}} \right] - \frac{\partial(T_i)}{\partial p_{ia}} + \frac{\partial(V_i)}{\partial p_{ia}} = \tilde{f}_{ia} \quad (2.9.6)$$

ここで \tilde{f}_{ia} は非保存的な外力であり、ジョイント間の拘束力を含んでいる。 T_i と V_i は、リンク i の g 番目の格子点の質量を m_{ig} 、リンク i の剛性マトリクスを $\tilde{\mathbf{k}}_i$ (その βr 成分を $\tilde{k}_{i\beta r}$) とすれば次のように表現される。

$$T_i = \sum_{g=1}^{NG(i)} T_{ig} = \sum_{g=1}^{NG(i)} \frac{1}{2} m_{ig} T_r(\mathbf{v}_{ig} \mathbf{v}_{ig}^T) \quad (2.9.7)$$

$$V_i = \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T \tilde{\mathbf{k}}_i \mathbf{p}_i = \sum_{\beta=1}^{NP(i)} \sum_{\tau=1}^{NP(i)} \tilde{k}_{i\beta\tau} p_{i\beta} p_{i\tau} \quad (2.9.8)$$

(2.9.7), (2.9.8) 式を (2.9.6) 式に代入すると、リンク i の弾性座標に関する運動方程式は次の形になる。

$$\sum_{\beta=1}^{NP(i)} m_{i\alpha\beta} \ddot{p}_{i\beta} + \sum_{\beta=1}^{NP(i)} g_{i\alpha\beta} \dot{p}_{i\beta} + \sum_{\beta=1}^{NP(i)} k_{i\alpha\beta} p_{i\beta} = f_{ia} \quad (2.9.9)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, NP(i)$

ただし、 $m_{i\alpha\beta}$, $g_{i\alpha\beta}$, $k_{i\alpha\beta}$ 等は表 2.9.2 に示す通りである。

表 2.9.2 の(a)~(d)から明らかなように (2.9.2) 式の各係数は \odot (マトリクス・インナー・プロダクト) を用いることによって時間不変な項と時間変化する項に分離することができ、以後の計算を容易にする。(2.9.9) 式は次のように行列形式で表わすこともできる。

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{g}_i \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{k}_i \mathbf{p}_i = \mathbf{f}_i \quad (2.9.10)$$

表 2.9.2 (2.9.9) 式の補足 (NC=NL: リンクの総数) (Sunada²⁾より転載)

(a) The Mass Terms

$$m_{i\alpha\beta} = Tr [T_0^i J_{i\alpha\beta} (T_0^i)^T] = I \odot J_{i\alpha\beta} \quad (a.1)$$

where

$$J_{i\alpha\beta} = \sum_{g=1}^{NG(i)} m_{ig} \phi_{ig\alpha} \phi_{ig\beta}^T \quad (a.2)$$

and the \odot operator is defined as the matrix dot product (inner product), which for two square matrices A and B has the form:

$$A \odot B = (A, B) = Tr (A^T B) \quad (a.3)$$

(b) The Gyroscopic Damping Terms

$$g_{i\alpha\beta} = Tr \left[\sum_{j=1}^{NC} 2 T_0^i J_{i\alpha\beta} U_{ij}^T \dot{\theta}_j \right] = D_i \odot J_{i\alpha\beta} \quad (a.4)$$

where

$$D_i = \sum_{j=1}^{NC} 2 C_{ij} \dot{\theta}_j \text{ and } C_{ij} = (T_0^i)^T U_{ij} \quad (a.5)$$

(c) The Stiffness Terms

$$k_{i\alpha\beta} = \widetilde{k}_{i\alpha\beta} + \bar{k}_{i\alpha\beta} + \overline{\overline{k}}_{i\alpha\beta} \quad (a.6)$$

where $\widetilde{k}_{i\alpha\beta}$ = term in α th row and β th column of structural stiffness matrix of i th link and

$$\bar{k}_{i\alpha\beta} = Tr \left[\sum_{j=1}^{NC} \sum_{k=1}^{NC} T_0^i J_{i\alpha\beta} U_{ijk}^T \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \right] = E_i \odot J_{i\alpha\beta} \quad (a.7)$$

$$E_i = \sum_{j=1}^{NC} \sum_{k=1}^{NC} C_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \text{ and } C_{ijk} = (T_0^i)^T U_{ijk} \quad (a.8)$$

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_k} = \frac{\partial^2 T_0^i}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \quad (a.9)$$

$$\overline{\overline{k}}_{i\alpha\beta} = Tr \left[\sum_{j=1}^{NC} T_0^i J_{i\alpha\beta} U_{ij}^T \ddot{\theta}_j \right] = F_i \odot J_{i\alpha\beta} \quad (a.10)$$

$$F_i = \sum_{j=1}^{NC} C_{ij} \ddot{\theta}_j \quad (a.11)$$

(d) The Force Terms

$$f_{i\alpha} = \widetilde{f}_{i\alpha} - \bar{f}_{i\alpha} - \overline{\overline{f}}_{i\alpha}$$

where $\widetilde{f}_{i\alpha}$ = externally applied force including inter-link joint constraint force:

$$\bar{f}_{i\alpha} = Tr \left[\sum_{j=1}^{NC} \sum_{k=1}^{NC} T_0^i J_{i\alpha} U_{ijk}^T \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \right] = E_i \odot J_{i\alpha} \quad (a.13)$$

$$J_{i\alpha} = \sum_{g=1}^{NG(i)} m_{ig} \phi_{ig\alpha} b_{ig}^T \quad (a.14)$$

$$\overline{\overline{f}}_{i\alpha} = Tr \left[\sum_{j=1}^{NC} T_0^i J_{i\alpha} U_{ij}^T \ddot{\theta}_j \right] = F_i \odot J_{i\alpha} \quad (a.15)$$

2.9.2.4 コンポーネント・モード・シンセシス による座標数の低減

(2.9.9)式の運動方程式は各リンク毎に $NP(i)$ (=6
 $NG(i)$)個得られるので全体では膨大な数となる。そ
こでHurtyのコンポーネント・モード・シンセシス
を用いて方程式の数を減らす。すなわち弾性座標 \mathbf{p}_i
を、隣りあうリンクと関係するインターフェース座
標 \mathbf{p}_i^f (通常12個)とそれ以外の自由座標 \mathbf{p}_i^F に分離
して、 \mathbf{p}_i^F をインターフェース部固定($\mathbf{p}_i^f = \mathbf{0}$)の
正規モード ϕ_i を用いて正規モード座標 η_i におきかえ
座標数をへらす。

まずダンピング項と剛性マトリクス \mathbf{k}_i の時変の項
を無視して(2.9.10)式を次のように書きかえる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{II} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{FF} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_i^f \\ \ddot{\mathbf{p}}_i^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{II} & \mathbf{k}_{IF} \\ \mathbf{k}_{FI} & \mathbf{k}_{FF} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^f \\ \mathbf{p}_i^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^f \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式から次の拘束条件が成立している。

$$\mathbf{m}_{FF} \ddot{\mathbf{p}}_i^F + \mathbf{k}_{FI} \dot{\mathbf{p}}_i^f + \mathbf{k}_{FF} \mathbf{p}_i^F = \mathbf{0} \quad (2.9.11)$$

ここでは \mathbf{p}_i^F を、(2.9.11)式で $\ddot{\mathbf{p}}_i^F = \mathbf{0}$ とおいた式で
得られる、

$$\mathbf{p}_i^F = -\mathbf{k}_{FF}^{-1} \mathbf{k}_{FI} \mathbf{p}_i^f$$

と、(2.9.11)式で $\mathbf{p}_i^f = \mathbf{0}$ とおいた式($\mathbf{m}_{FF} \ddot{\mathbf{p}}_i^F + \mathbf{k}_{FF} \mathbf{p}_i^F = \mathbf{0}$)を固有モード ϕ_i で展開して得られる、

$$\mathbf{p}_i^F = \sum \phi_{ir} \eta_{ir} = \phi_i \eta_i$$

の和として表わす。すなわち、

$$\mathbf{p}_i^F = \mathbf{p}_i^{F'} + \mathbf{p}_i^{F''} = -\mathbf{k}_{FF}^{-1} \mathbf{k}_{FI} \mathbf{p}_i^f + \phi_i \eta_i \quad (2.9.12)$$

最終的に \mathbf{p}_i は

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^f \\ \mathbf{p}_i^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{k}_{FF}^{-1} \mathbf{k}_{FI} & \phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^f \\ \eta_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \quad (2.9.13)$$

(2.9.13)式を用いれば新しい変数 \mathbf{a}_i の次数は、イン
ターフェース座標の次数+リンク i の低次の固有振
動モードの次数となるので正確度をあまり損なわな
いで \mathbf{p}_i よりも格段に次数を減らすことができる。(2.
9.13)式を(2.9.10)式に代入して左から \mathbf{A}_i^T をかけると
運動方程式は次の形になる。

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{a}}_i + \mathbf{G}_i \dot{\mathbf{a}}_i + \mathbf{K}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i^a \quad (2.9.14)$$

ただし

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{m}_i \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{g}_i \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{A}_i, \\ \mathbf{f}_i^a = \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i$$

2.9.2.5 システム全体の運動方程式

さて運動方程式(2.9.14)は座標数は減っているが
ジョイントにおける未知の拘束力を含んでおり、各
リンクのインターフェース座標間の関係も規定して
いない。逆に各インターフェース座標間の関係を明
確にし、独立な座標だけをグローバル座標ベクトル
 \mathbf{q} としてとりだすようにすれば拘束力も自動的に消
去される。 \mathbf{a}_i と \mathbf{q} の関係は、ジョイントの回転角が
ノミナル値であると仮定すれば次の線形の関係にな
る。

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{B}_i(\theta) \mathbf{q} \quad (2.9.15)$$

ここで $\mathbf{B}_i(\theta)$ のことをコンパティビリティ・マトリク
スと呼ぶ。(2.9.15)式を(2.9.14)式に代入すれば、
最終的にグローバル座標ベクトル \mathbf{q} に関する運動方
程式は

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (2.9.16)$$

ただし \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{K} , \mathbf{Q} は表2.9.3に示す通りである。
(\mathbf{G}_d は構造減衰を表わす項である。)

表2.9.3 (2.9.16)式の補足 (Sunada¹⁾より転載)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{B}_i \\ \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_i \mathbf{B}_i + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} 2 \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{B}_{ij} \dot{\theta}_j + \mathbf{G}_d \\ \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{B}_i + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_i \mathbf{B}_{ij} \dot{\theta}_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i (\mathbf{B}_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \mathbf{B}_{ij} \ddot{\theta}_j) \\ \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{f}_i^a \\ \mathbf{B}_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \theta_j}, \quad \mathbf{B}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial \theta_k} \end{aligned}$$

and NL = number of links in the manipulator.

2.9.2.6 汎用プログラム FLEX-ARM

汎用マニピュレータ解析プログラムFLEX-ARM
の機能、構成を表2.9.4、図2.9.4に示す。

2.9.2.7 解析例

FLEX-ARMを用いたマニピュレータの解析例を
表2.9.5、表2.9.6に示す。

表 2.9.4 FLEX-ARMの機能

機 能	内 容
シミュレーション	Newmark-Beta 法による数値積分 (時間刻みによらず安定)
準 静 的 な 解 \mathbf{q}	(2.9.16) 式から $\sum_{i=1}^{NL} \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{B}_i \mathbf{q} = \mathbf{Q}$ を解く
周 波 数 応 答 $\tilde{\mathbf{q}} / \tilde{\mathbf{Q}}$	$\tilde{\mathbf{q}} = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{G} + \mathbf{K})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}$ において $\tilde{\mathbf{q}}$ と $\tilde{\mathbf{Q}}$ の任意の 2 成分間の応答がわかる
固 有 振 動 数 モ ー ド 関 数	Householder QR 法による固有値問題の解
コ ン ピ ュ ー タ グ ラ フ ィ ク ス	マニピュレータの種々の形状 周波数応答 モード形状 etc. } のプロット

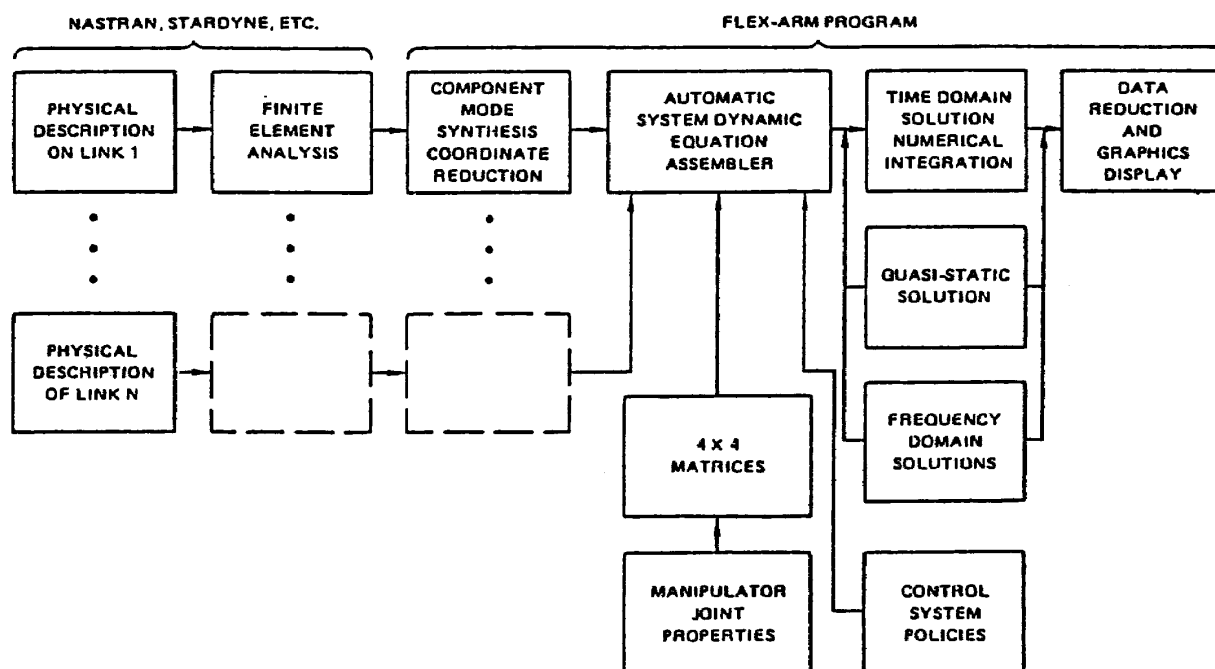
図 2.9.4 FLEX-ARMの構成
(Sunada¹⁾より転載)

表 2.9.5 マニピュレータのモデリング例

段 階	内 容	説 明 図 , 表
マニピュレータの選定	T3 (Cincinnati Milacron 社製) から手首の部分を除いたリンク機構 自由度 … 3 リンク数 … 4	図 2.9.5 … 外観図 図 2.9.6 … 概念図 表 2.9.7 … リンク間の関係
NASTRAN モデル	たとえば UPPER ARM で 全体で 格子点 … 44 格子点 … 155 エレメント数 … 75 エレメント数 … 272 自由度 … 264 自由度 … 930	図 2.9.7 … UPPER ARM の NASTRAN モデル 図 2.9.8 … 全体の NASTRAN モデル
CMS による座標低減	各リンクのインターフェース部固定の固有振動はいずれも 100Hz 以上の高周波振動で省略可。 したがって、各リンクともインターフェース座標の自由度(12)だけが残る。 全体の自由度 … 48	図 2.9.9 … 各リンクの低減した座標
コンパティビリティ・マトリクスによるリンク間の関係づけ	たとえば、SHOULDER の座標 a_1 と BASE の座標 a_7, a_8 は $a_1 = \cos \theta_1 a_7 + \sin \theta_1 a_8$ の関係があるので a_7, a_8 をグローバル座標にとれば a_1 はおちる。 全体の自由度 … 27	表 2.9.8 … 座標間の関係 図 2.9.10 … 全体のグローバル座標

表 2.9.6 マニピュレータの解析例

項 目	内 容	結 果
NASTRAN モデルとの比較	FLEX-ARM によるモデルと、座標の低減を行なわないフル NASTRAN モデルで固有振動数の比較を行なう。	100Hz 以下の周波数では 5 % 以下の精度で一致。
実験結果との比較	FLEX-ARM によるモデルで固有振動数を求め実験結果と比較する。	図 2.9.11 … マニピュレータのテスト位置とモード形状 FLEX-ARM による計算 … 20Hz 実験結果 … 19Hz
周波数応答 I	FLEX-ARM によるモデルにコントローラを付加してベース・ジョイントにおけるサーボバルブとタコメータ間の応答を求め、実験結果と比較する。	図 2.9.12 一致は良好 差異は床の特性の影響
周波数応答 II	ベース・ジョイントの周波数応答に対するリンクの柔軟性の影響をみる。	図 2.9.13 柔軟性を考慮すると安定余裕が減る。
時間応答	マニピュレータの先端が直線運動するように指令値を与え、リンクの柔軟性の影響をみる。	図 2.9.14 柔軟性を考慮すると過渡応答が大きくなり、整定するまでの時間もかかる。

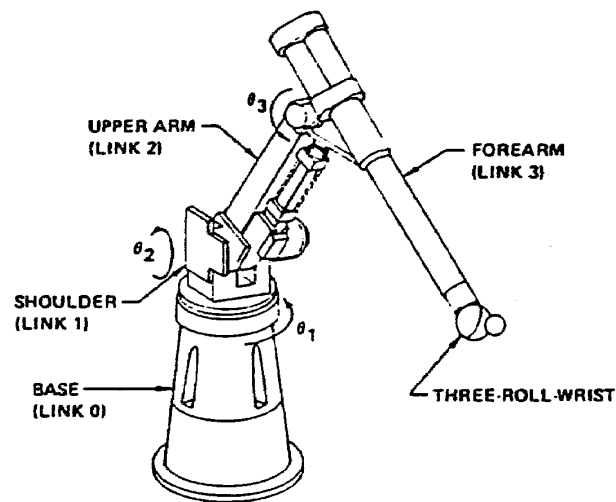


図 2.9.5 T3 マニピュレータの外観
(Sunada¹⁾より転載)

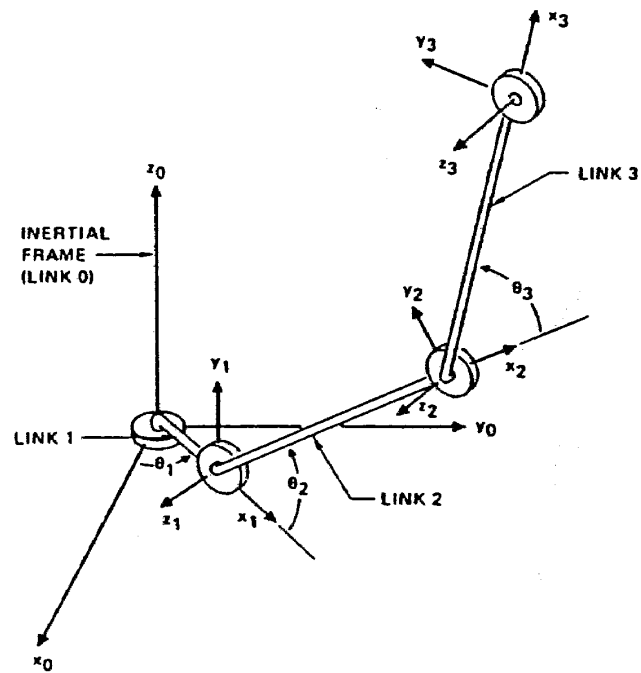


図 2.9.6 各リンクの座標系
(Sunada¹⁾より転載)

表 2.9.7 リンク間の関係 (Sunada¹⁾より転載)

Link	θ	L	α	H	Joint Type
1	θ_1	0	$\pi/2$	0	Revolute
2	θ_2	1.01m (40.0 in)	0	0	Revolute
3	θ_3	1.51m (59.5 in)	0	0	Revolute

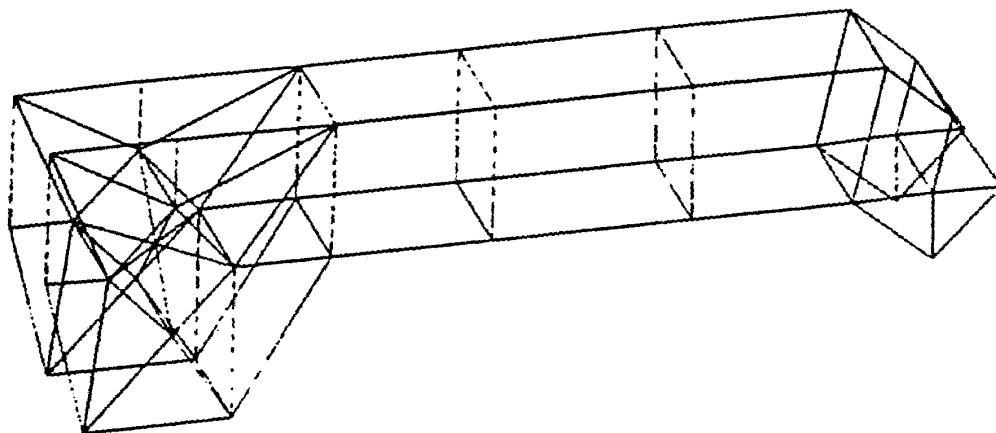


図 2.9.7 UPPER ARM の NASTRAN モデル
(Sunada¹⁾より転載)

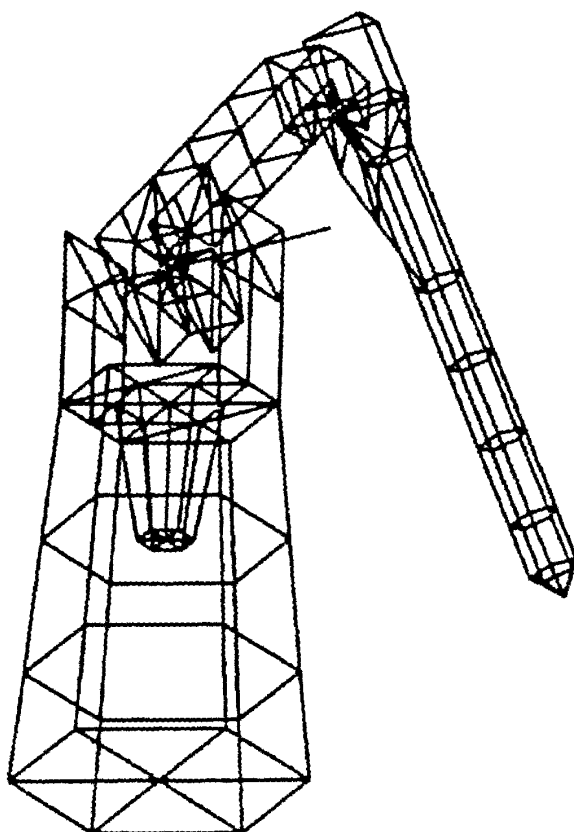


図 2.9.8 全体の NASTRAN モデル
(Sunada¹⁾より転載)

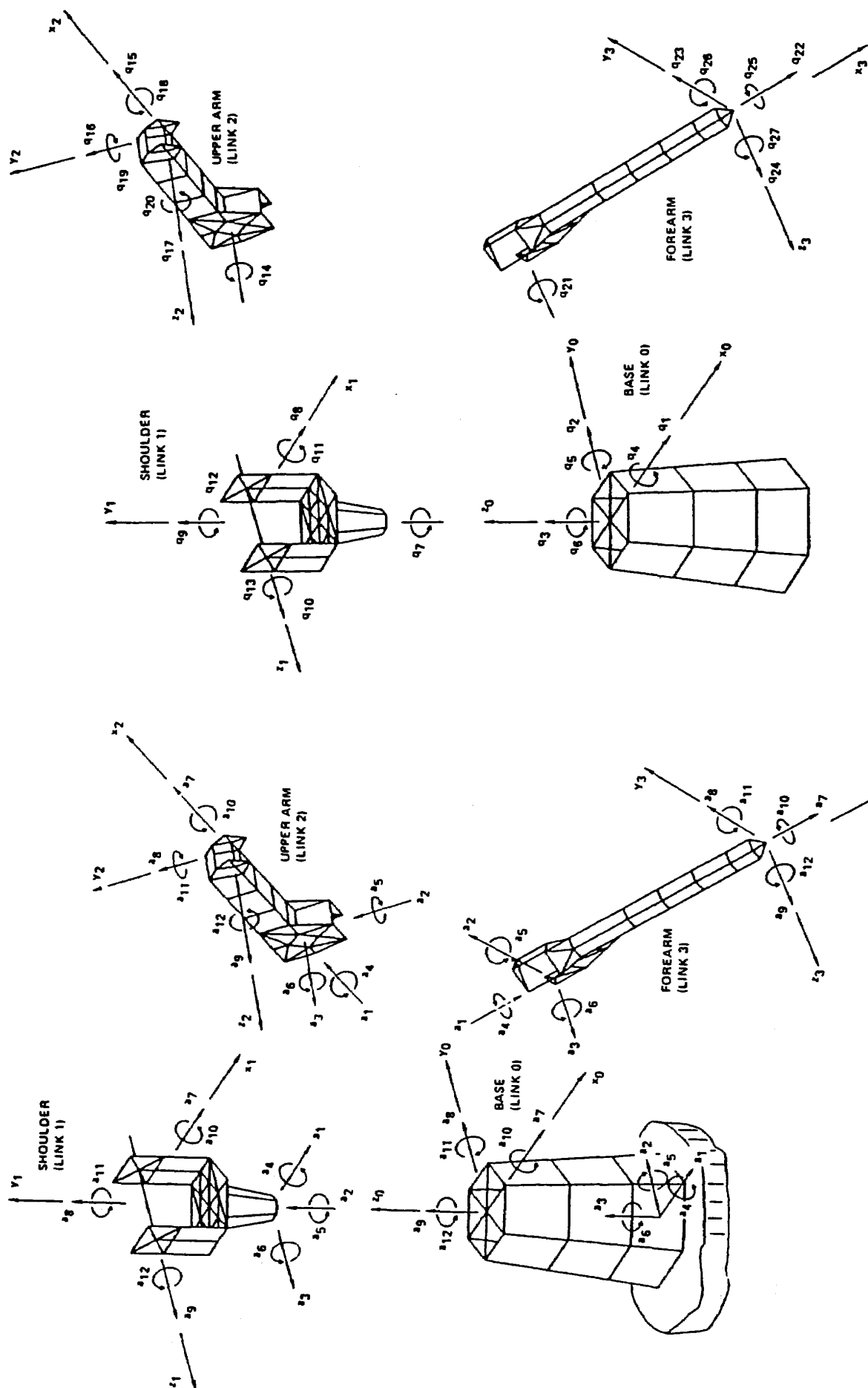


図 2.9.9 各リンクの低減した座標
(Sunada¹⁾より転載)

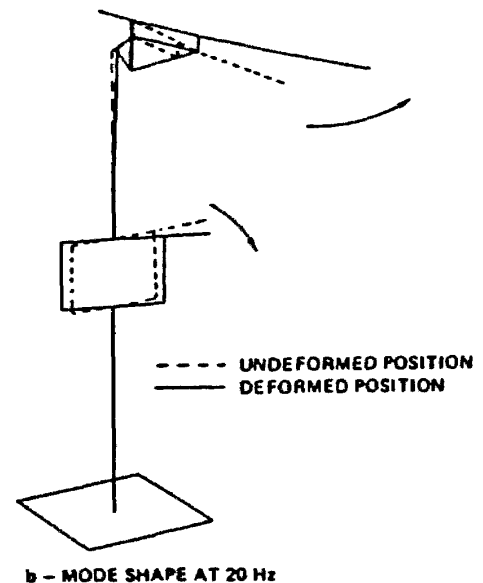
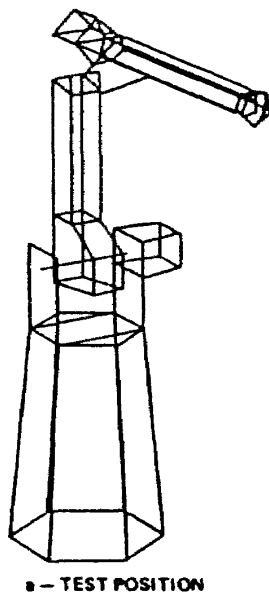
図 2.9.10 全体のグローバル座標
(Sunada¹⁾より転載)

表 2.9.8 座標間の関係 (Sunada¹⁾より転載)

Link 0 (Base)	
a_1 to $a_6 = 0$	}
a_7 to $a_{12} = q_1$ to q_6 (respectively)	
Link 1 (Shoulder)	
$a_1 = c_1 q_1 + s_1 q_2$	}
$a_2 = q_3$	
$a_3 = s_1 q_1 - c_1 q_2$	
$a_4 = c_1 q_4 + s_1 q_5$	
$a_5 = q_7$	
$a_6 = s_1 q_4 - c_1 q_5$	
a_7 to $a_{12} = q_8$ to q_{13} (respectively)	
Link 2 (Upper Arm)	
$a_1 = c_2 q_8 + s_2 q_9$	}
$a_2 = -s_2 q_8 + c_2 q_9$	
$a_3 = q_{10}$	
$a_4 = c_2 q_{11} + s_2 q_{12}$	
$a_5 = -s_2 q_{11} + c_2 q_{12}$	
a_6 to $a_{12} = q_{14}$ to q_{20} (respectively)	
Link 3 (Forearm)	
$a_1 = c_3 q_{15} + s_3 q_{16}$	}
$a_2 = -s_3 q_{15} + c_3 q_{16}$	
$a_3 = -s_3 q_{15} + c_3 q_{16}$	
$a_3 = q_{14}$	
$a_4 = c_3 q_{18} + s_3 q_{19}$	
$a_5 = -s_3 q_{18} + c_3 q_{19}$	
a_6 to $a_{12} = q_{21}$ to q_{27} (respectively)	

Where

$$c_i = \cos \theta_i \text{ and } s_i = \sin \theta_i, i = 1, 2, 3$$

図 2.9.11 マニピュレータのテスト位置とモード形状 (Sunada¹⁾より転載)

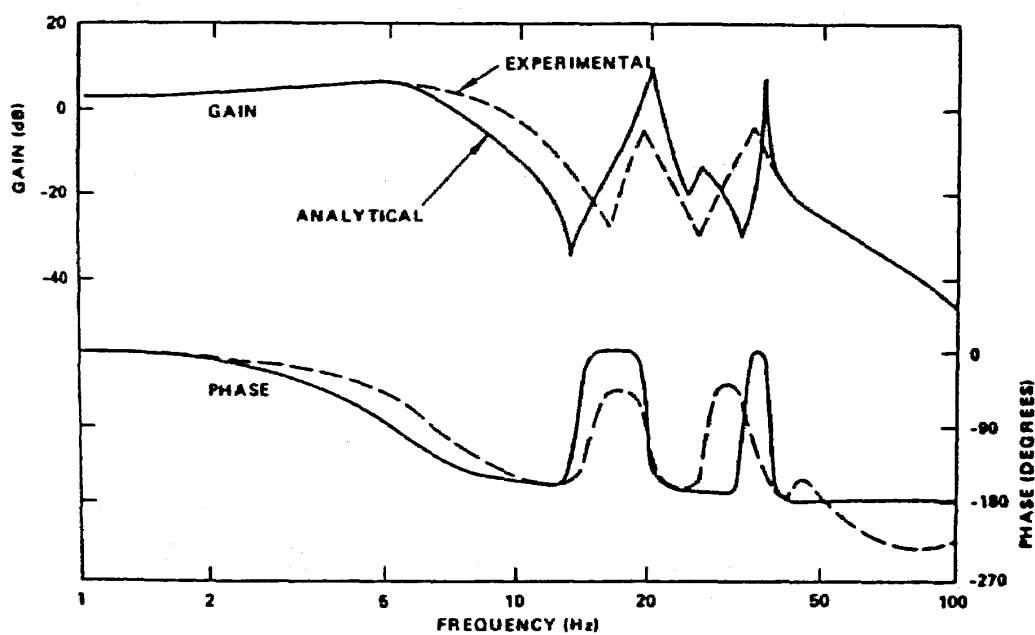


図 2.9.12 モデルと実験による周波数応答の比較
(Sunada¹⁾より転載)

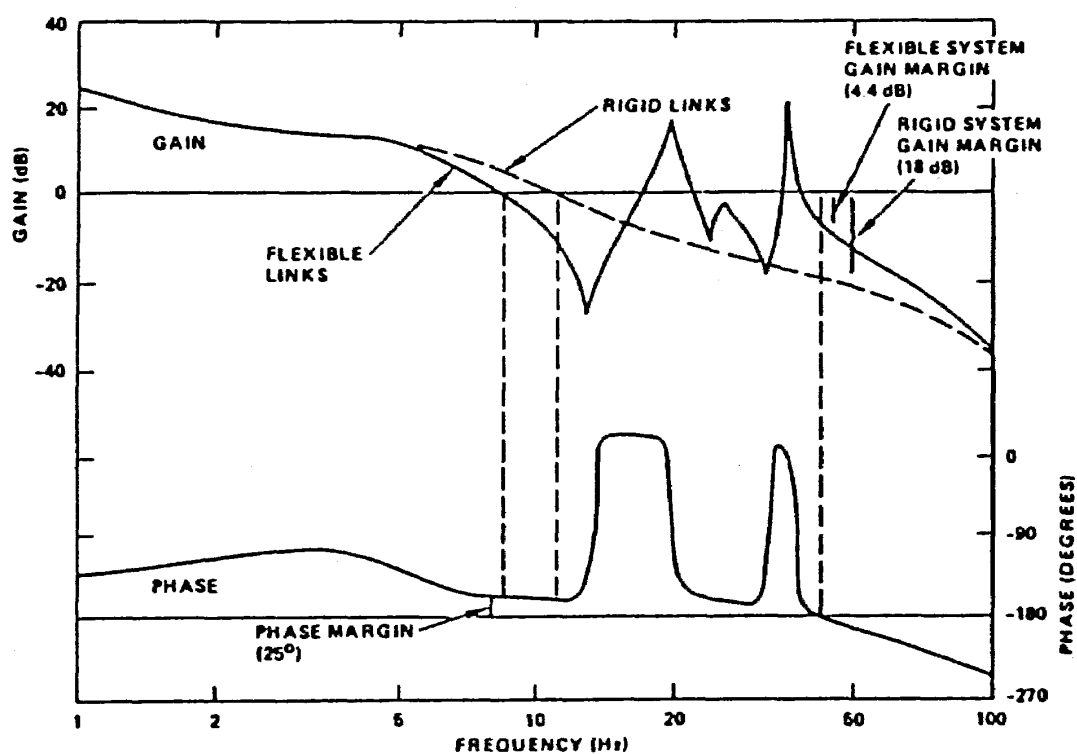


図 2.9.13 リンクの柔軟性の安定余裕に対する影響
(Sunada¹⁾より転載)

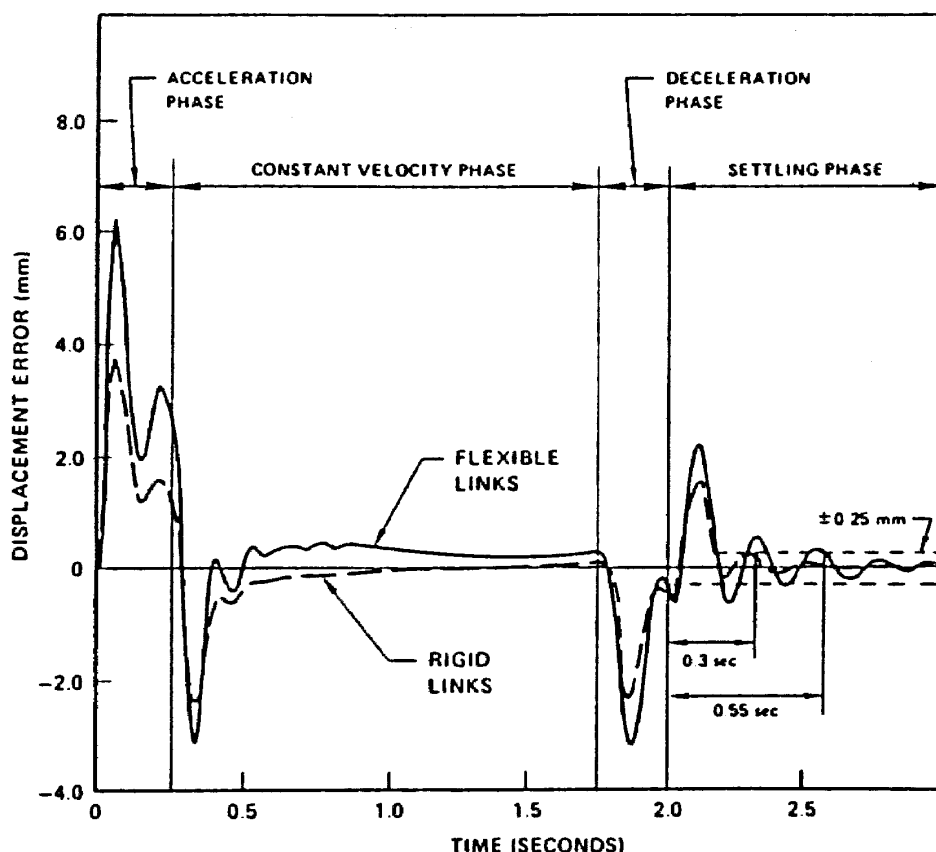


図 2.9.14 シミュレーション結果
(Sunada¹⁾より転載)

2.9.3 まとめ及び評価

Sunadaの方法は柔軟なリンクをもつマニピュレータの解析に用いられるもので、リンクの弾性運動は摂動的に扱い、座標数低減のためにHurtyのコンポーネント・モード・シンセシスを用いている。結果はFLEX-ARMという名で汎用プログラム化され、シミュレーション、周波数応答、静的なたわみ量等の計算を行なうことができる。Sunadaの方法はマニピュレータの特質をいかした計算の簡略化や、コンポーネント・モード・シンセシスの採用による計算量の飛躍的な縮小に特徴があるが、同時にこれを汎用プログラム化した点で評価されるもので、文献¹⁾はASMEのコンファレンスにおいてベスト・ペーパーに選ばれている。

2.10 Kane/Levinson^{1),2)}, Singh/Likins³⁾

2.10.1 概要

Kaneの方程式^{1),2)}はNewton-Euler方程式やLagrange方程式と同列に論じられるもので、特に多体

系のモデリングに固有のものではない。そこでここではKaneの方程式を多体系のモデリングに適用したSinghの方法³⁾を対象に述べることにする。

対象：チェーン構造，柔軟体

ヒンジ自由度：6自由度

力学上の原理：Kaneの方程式

内力消去法：Kaneの方程式では本来内力が方程式中にあらわれない。

注目点：Kaneの方程式の採用

汎用プログラム化

独立変数：システム全体の質量中心の速度

メイン・ボディ（ボディ 1）の角速度

各ボディのモード座標

ヒンジ部の回転角

ヒンジ部の変位量

Singhの方法で対象とするシステムの概略図を図2.10.1に示す。

2.10.2 本論

Kaneの方程式は、拘束をうけない自由な方向にの

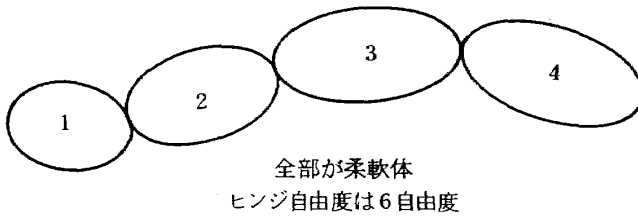


図 2.10.1 Singh の方法で対象とするシステム

み運動方程式の方向を規定して、運動方程式の低次元化と拘束力の消去をはかるものである。このことは和と内積で拘束力を消去する Newton-Euler 方程式に基づく一般的な方法や、Jerkovsky の方法と基本的に同じであるが、運動方程式をたてる最初の段階で方向を規定してしまうところに、その特徴がある。このため内力は最初から方程式中にあらわれず、式の取扱いが簡単化する場合が多い。本節では、まず最初に Kane の方程式の一般的な説明を行ない、次に Singh の論文に基づくチェーン構造、柔軟体の取扱いについて述べる。

2.10.2.1 Kane の方程式の説明¹⁾

(1) パーシャル・ベロシティ

システムの一般化座標 q_1, q_2, \dots, q_n に対して次式で定義される u_1, u_2, \dots, u_n をジェネライズド・スピードという。

$$u_r \triangleq \sum_{s=1}^n Y_{rs} \dot{q}_s + Z_r \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.1)$$

上式で Y_{rs}, Z_r は q_1, q_2, \dots, q_n 及び時間 t の関数であり、 Y_{rs} は上式 (2.10.1) が \dot{q}_s について一意に解けるように選ぶ。この解は

$$\dot{q}_s = \sum_{r=1}^n W_{sr} u_r + X_s \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.2)$$

かりに非ホロミックな拘束条件 $\sum_i A_{il} \dot{q}_i + B_l = 0$ ($l=1, 2, \dots, m$) が存在するときは、(2.10.2) 式が常に拘束条件を満たすように u_r ($r=1, 2, \dots, n-m$), W_{sr}, X_s を選ぶ。

システム S を構成する質点 P の速度、角速度を \mathbf{v}^P , $\boldsymbol{\omega}^P$ とするとき、 $\boldsymbol{\omega}^P, \mathbf{v}^P$ は次のように一意的に表現される。

$$\boldsymbol{\omega}^P = \sum_{r=1}^n \boldsymbol{\omega}_r^P u_r + \boldsymbol{\omega}_t^P \quad (2.10.3)$$

$$\mathbf{v}^P = \sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r^P u_r + \mathbf{v}_t^P \quad (2.10.4)$$

ここで $\boldsymbol{\omega}_r^P, \mathbf{v}_r^P$ を r 番目のパーシャル・アンギュラ・ベロシティ、パーシャル・ベロシティと呼ぶ。

(2) ジェネライズド・アクティブ・フォース

システム S が N 個の質点 P_1, P_2, \dots, P_N によって構成されるものとし、 \mathbf{R}_i を質点 P_i に働くすべての力の合計とする。このとき次式で定義される量 F_1, F_2, \dots, F_n を S のジェネライズド・アクティブ・フォースという。

$$F_r \triangleq \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_r^{P_i} \cdot \mathbf{R}_i \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.5)$$

\mathbf{R}_i によるシステム S への仮想仕事を考えると、質点 P_i の速度は \mathbf{v}^{P_i} だから

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{v}^{P_i} \delta t &= \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \left(\sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r^{P_i} u_r + \mathbf{v}_t^{P_i} \right) \delta t \\ &= \sum_{r=1}^n F_r u_r \delta t + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{v}_t^{P_i} \delta t \end{aligned}$$

となって F_r はジェネライズド・スピード u_r に対応する一般化力であることがわかる。

いまシステム S に剛体 B が含まれる場合、 B 内の質点間で働く内力は F_r にあらわれない。このように質点間の内力などの仕事をしない力を消去できることが、ジェネライズド・アクティブ・フォースを導入する主な理由である。また剛体 B に働く外力を $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{N'}$ とし、その着力点を $P_1, P_2, \dots, P_{N'}$ とすると、剛体 B に働く力の F_r に対する寄与分 $(F_r)_B$ は次式であらわされる。

$$(F_r)_B = \boldsymbol{\omega}_r^B \cdot \mathbf{T} + \mathbf{v}_r^Q \cdot \mathbf{R} \quad (2.10.6)$$

ここで \mathbf{T} 及び \mathbf{R} は剛体 B の任意の点 Q に働く $\mathbf{K}_1 \sim \mathbf{K}_{N'}$ による等価的なモーメント及び力である。すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^{N'} \vec{Q}P_i \times \mathbf{K}_i \\ \mathbf{R} &= \sum_{i=1}^{N'} \mathbf{K}_i \end{aligned}$$

また $\boldsymbol{\omega}_r^B$ は剛体 B の r 番目のパーシャル・アンギュラ・ベロシティ、 \mathbf{v}_r^Q は点 Q の r 番目のパーシャル・ベロシティである。

(3) ジェネライズド・イナーシャ・フォース

システム S を構成する質点 P_i ($i=1, 2, \dots, N$) の質量を m_i 、加速度を \mathbf{a}_i とする。このとき次式で定義さ

れる量 $F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*$ を S のジェネライズド・イナーシャ・フォースという。

$$F_r^* \triangleq \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_r^{P_i} \cdot \mathbf{R}_i^* \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.7)$$

$$\mathbf{R}_i^* \triangleq -m_i \mathbf{a}_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.10.8)$$

またシステム S に剛体 B が含まれる場合、剛体 B のジェネライズド・イナーシャ・フォース F_r^* に対する寄与分 $(F_r^*)_B$ は次式であらわされる。

$$(F_r^*)_B = \boldsymbol{\omega}_r^B \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{v}_r^B \cdot \mathbf{R}^* \quad (2.10.9)$$

ここで \mathbf{T}^* 及び \mathbf{R}^* は剛体 B を構成する N' 個の質点 $P_1, P_2, \dots, P_{N'}$ に働く慣性力を剛体 B の質量中心 B^* まわりに換算した慣性トルクと慣性力である。すなわち

$$\mathbf{T}^* = - \sum_{i=1}^{N'} (\mathbf{B}^* \mathbf{P}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

$$\mathbf{R}^* = -M \mathbf{a}^{B^*}$$

ここで m_i は質点 P_i の質量、 $M (= \sum_{i=1}^{N'} m_i)$ は剛体 B の質量、 \mathbf{a}^{B^*} は剛体 B の質量中心 B^* の加速度、また (2.10.9) 式の $\mathbf{v}_r^{B^*}$ は B^* の r 番目のパーシャル・ベロシティである。 \mathbf{T}^* はまた次のように表わすこともできる。

$$\mathbf{T}^* = -\alpha^B \cdot \mathbf{I} - \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^B$$

ただし α^B は剛体 B の角加速度、 \mathbf{I} は慣性ダイアディックである。

(4) Kane の運動方程式

(2.10.5) 式の \mathbf{R}_i と (2.10.7) 式の \mathbf{R}_i^* の間には

$$\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^* = \mathbf{0} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

の関係がある。この関係から F_r と F_r^* の間には次式が成り立つ。

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.10)$$

この (2.10.10) 式を Kane の運動方程式という。

2.10.2.2 例題

ここでは例題として図 2.10.2 のような水平面内のリンク機構を考え、Kane の方程式によってこの系の運動方程式を導出してみよう。(なお、より詳しい Kane の方程式と他の方程式との比較は文献 2) を参照)

リンク i の長さ、質量、慣性モーメントをそれぞれ l_i, m_i, i_i とし、ヒンジ i に作用する制御トルクを T_i とする。またリンク i の質量中心の位置を (x_i, y_i) とすると、

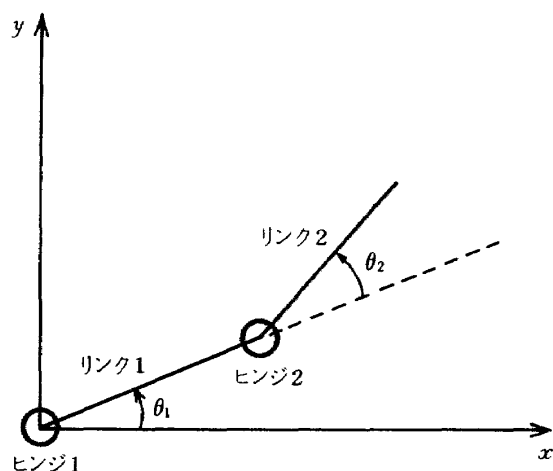


図 2.10.2 例題

$$\begin{aligned} \text{リンク 1} \quad & \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_1 = -\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{x}_1 = -\frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{y}_1 = -\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{cases} \\ \text{リンク 2} \quad & \begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{y}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \ddot{x}_2 = -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ \quad - \frac{1}{2} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ \quad - \frac{1}{2} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{y}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ \quad - \frac{1}{2} l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ \quad + \frac{1}{2} l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Kane の方程式を適用するため、 x 軸方向、 y 軸方向及びヒンジの回転軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とし、ヒンジ i を通してリンク i に働く力を F_{ix}, F_{iy} とする (図 2.10.3)。リンク 1, 2 は剛体として考えるので、これらのジェネライズド・フォースは (2.10.6), (2.10.9) 式によって求めることができる。リンク i の質量中心に等価的に働く力を \mathbf{R}_i 、また慣性力を \mathbf{R}_i^* 、慣性トルクを \mathbf{T}_i^* とすると

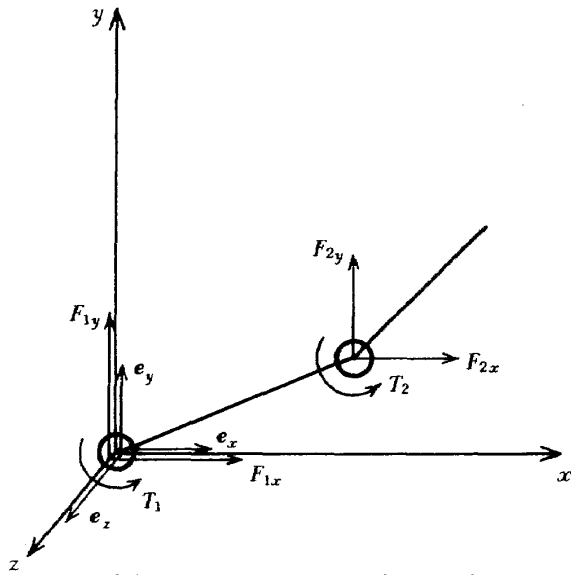


図 2.10.3 Kane の方程式の適用

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (F_{1x} - F_{2x}) \mathbf{e}_x + (F_{1y} - F_{2y}) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{T}_1 = \left\{ T_1 - T_2 + \frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 (F_{1x} + F_{2x}) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 (F_{1y} + F_{2y}) \right\} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_2 = F_{2x} \mathbf{e}_x + F_{2y} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{T}_2 = \left\{ T_2 + \frac{1}{2} L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) F_{2x} \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) F_{2y} \right\} \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2.10.11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1^* = -m_1 \left(-\frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \mathbf{e}_x \\ \quad - m_1 \left(-\frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{T}_1^* = -i_1 \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_2^* = -m_2 \left\{ -L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1^2 - L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right. \\ \quad - \frac{1}{2} L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \\ \quad - \frac{1}{2} L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \mathbf{e}_x \\ \quad - m_2 \left\{ -L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1^2 + L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right. \\ \quad - \frac{1}{2} L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \\ \quad \left. + \frac{1}{2} L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right\} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{T}_2^* = -i_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2.10.12)$$

ところで $\mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i$ の計算には質量中心を用いているが、特に質量中心である必要はない。たとえば $\mathbf{R}_1, \mathbf{T}_1$ の計算にヒンジ 1 の点を用いれば、ヒンジ 1 は動かないのでそのパーシャル・ベロシティは 0 となり、ジェネライズド・アクティブ・フォース F_1 の計算が簡単化する。さらに F_{1x}, F_{1y} のような拘束力や F_{2x}, F_{2y} のような内力は仕事をしない力であるから最終的なシステムのジェネライズド・アクティブ・フォースへの寄与は 0 である。そのため最初からこれ

らの力を除いて考えることができ、このとき $\mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i$ は次のように簡単化する。

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = 0 \\ \mathbf{T}_1 = (T_1 - T_2) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_2 = 0 \\ \mathbf{T}_2 = T_2 \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2.10.13)$$

さて、リンク i の質量中心の速度を \mathbf{v}^i とすると

$$\begin{cases} \mathbf{v}^1 = -\frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{v}^2 = \left\{ -L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} \mathbf{e}_x \\ \quad + \left\{ L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right\} \mathbf{e}_y \end{cases}$$

ジェネライズド・スピード u_1, u_2 を $u_1 = \dot{\theta}_1, u_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ ととることにすれば、リンク i の質量中心の j 番目のパーシャル・ベロシティ \mathbf{v}_j^i とパーシャル・アングュラ・ベロシティ $\boldsymbol{\omega}_j^i$ は上式より次のようになる。

$$\text{リンク 1} \begin{cases} \mathbf{v}_1^1 = -\frac{1}{2} L_1 \sin \theta_1 \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} L_1 \cos \theta_1 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{v}_2^1 = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_1^1 = \mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\omega}_2^1 = 0 \end{cases} \quad (2.10.14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^2 = -L_1 \sin \theta_1 \mathbf{e}_x + L_1 \cos \theta_1 \mathbf{e}_y \\ \mathbf{v}_2^2 = -\frac{1}{2} L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \mathbf{e}_x \\ \quad + \frac{1}{2} L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \mathbf{e}_y \\ \boldsymbol{\omega}_1^2 = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_2^2 = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2.10.15)$$

(2.10.6) 式によってシステムのジェネライズド・アクティブ・フォース F_i は次のように計算される。

$$F_i = \boldsymbol{\omega}_i^1 \cdot \mathbf{T}_1 + \mathbf{v}_i^1 \cdot \mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\omega}_i^2 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{v}_i^2 \cdot \mathbf{R}_2 \quad (i=1, 2) \quad (2.10.16)$$

(2.10.16) 式に (2.10.13), (2.10.14), (2.10.15) 式を代入すると

$$\begin{cases} F_1 = T_1 - T_2 \\ F_2 = T_2 \end{cases} \quad (2.10.17)$$

(2.10.13) 式のかわりに (2.10.11) 式を用いても結果は変わらない。

また (2.10.9) 式によってシステムのジェネライズド・イナーシャ・フォース F_i^* は次のように計算される。

$$F_i^* = \boldsymbol{\omega}_i^1 \cdot \mathbf{T}_1^* + \mathbf{v}_i^1 \cdot \mathbf{R}_1^* + \boldsymbol{\omega}_i^2 \cdot \mathbf{T}_2^* + \mathbf{v}_i^2 \cdot \mathbf{R}_2^* \quad (i=1, 2) \quad (2.10.18)$$

(2.10.18) 式に (2.10.12), (2.10.14), (2.10.15) 式を代

入すると

$$\begin{cases} F_1^* = -\left(i_1 + \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2\right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ \quad - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ F_2^* = -\left(i_2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2\right) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 \\ \quad - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{cases} \quad (2.10.19)$$

(2.10.19)

(2.10.17), (2.10.19) 式を Kane の運動方程式(2.10.10) に代入すると例題のシステムの運動方程式が得られる。

Kane の方程式は微分操作が少なく、擬座標もとりとやすく、Lagrange 関数や Gibbs 関数を構成する必要がないという利点を有しており、注目すべき方法であろう。ただし運動方程式の機械的導出という点では、Lagrange 方程式や Gibbs 方程式の方が優れているように思われる。

2.10.2.3 多体システムへの適用

ここでは Singh の方法に従い、Kane の方程式を柔軟体を含む多体システムに適用した例について述べる。対象とするのは図 2.10.4 に示すようなチェーン構造体である。図に用いられる主な記号を表 2.10.1 に示す。

さて、このシステムのジェネライズド・スピードを w_1, w, \dots, w_N とする。このとき $\dot{R}^k, \dot{R}^{hk}, \omega^k$

を (2.10.3), (2.10.4) 式に従って次のように表現する

$$\dot{R}^k = \sum_{j=1}^N V_j^k w_j + V_t^k \quad (2.10.20)$$

$$\dot{R}^{hk} = \sum_{j=1}^N V_j^{hk} w_j + V_t^{hk} \quad (2.10.21)$$

$$\omega^k = \sum_{j=1}^N \omega_j^k w_j + \omega_t^k \quad (2.10.22)$$

ここで $V_j^k, V_j^{hk}, \omega_j^k$ はそれぞれ j 番目のパーシャル・ベロシティ及びパーシャル・アングュラ・ベロシティである。

ボディ B_k 上の任意の点の位置ベクトル R^k は次のようにあらわされる。

$$R^k = R^{hk} + r^k + u^k \quad (2.10.23)$$

また弾性変形量 u^k は固有モードを用いて次のように表わす。

$$u^k = \sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \eta_l^k \quad (2.10.24)$$

(2.10.23) から \dot{R}^k を求めて (2.10.21), (2.10.22), (2.10.24) 式を代入すると

$$\dot{R}^k = \dot{R}^{hk} + \omega^k \times (r^k + u^k) + \dot{u}^k \quad (\dot{} \text{ はボディ } B_k \text{ 上での時間微分})$$

$$= \sum_{j=1}^N V_j^{hk} w_j + V_t^{hk} + \left(\sum_{j=1}^N \omega_j^k w_j + \omega_t^k \right)$$

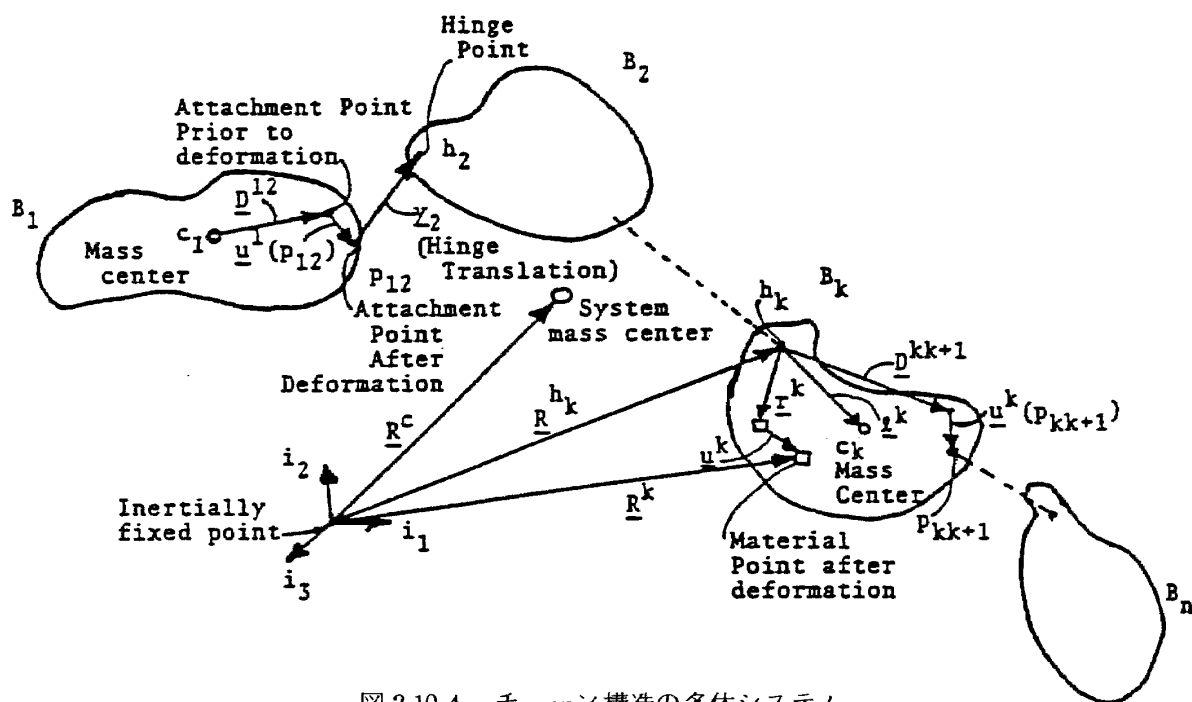


図 2.10.4 チェーン構造の多体システム
(Singh³⁾より転載)

表 2.10.1 記 号 表

B_k	k 番目のボディ
c_k	ボディ B_k の質量中心
h_k	ボディ B_k のヒンジ点 (ボディ B_1 のヒンジ点は c_1 にとる)
$P_{k, k+1}$	ボディ B_k 上の点でボディ B_{k+1} に対する結合点 (弾性変形後)
$D^{k, k+1}$	ボディ B_k のヒンジ点 h_k から変形前の結合点をさすベクトル
$u^k(P_{k, k+1})$	結合点の弾性変形をあらわすベクトル
r^k	ボディ B_k のヒンジ点 h_k からボディ B_k 上の任意の点をさすベクトル
u^k	r^k の点における弾性変形をあらわすベクトル
l^k	ボディ B_k のヒンジ h_k から質量中心 c_k をさすベクトル
y^k	ボディ B_{k-1} の結合点 $P_{k-1, k}$ からボディ B_k のヒンジ点 h_k をさすベクトル
R^{hk}	慣性空間に固定された原点からボディ B_k のヒンジ点 h_k をさすベクトル
R^k	" " " ボディ B_k 上の任意の点をさすベクトル
R^c	" " " システムの質量中心をさすベクトル
ω^k	ボディ B_k の角速度

$$\times (r^k + \sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \eta_l^k) + \sum_{j=1}^N V_j^{\dot{\eta}^k} w_j \quad (2.10.25)$$

$$\text{ただし, } \sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \dot{\eta}_l^k = \sum_{j=1}^N V_j^{\dot{\eta}^k} w_j$$

(2.10.25) 式を (2.10.20) 式と比較すれば V_j^k の具体的な形が得られる。すなわち

$$V_j^k = V_j^{hk} + \omega_j^k \times (r^k + \sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \eta_l^k) + V_j^{\dot{\eta}^k} \quad (2.10.26)$$

Kane の運動方程式は (2.10.10) 式と同じく次の形をとる。

$$f_j + f_j^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (2.10.27)$$

ここでジェネライズド・アクティブ・フォース f_j は (2.10.5) 式から次のように求められる。

$$f_j = \sum_{k=1}^n \int_{B_k} V_j^k \cdot d\mathbf{f} \quad n: \text{ボディ数} \quad (2.10.28)$$

ただし $d\mathbf{f}$ は位置 R^k の点に働く仕事をする力である (拘束力等は除かれる)。(2.10.26) 式を (2.10.28) 式に代入すると f_j は表 2.10.2 のように求められる。

一方ジェネライズド・イナーシャ・フォース f_j^* は (2.10.7) 式から次のように求められる。

$$f_j^* = \sum_{k=1}^n \int_{B_k} V_j^k \cdot (-\ddot{R}^k) dm \quad (2.10.29)$$

ただし, dm は位置 R^k の点の微小質量である。(2.10.25) 式から \ddot{R}^k は

$$\begin{aligned} \ddot{R}^k = & \ddot{R}^{hk} + \dot{\omega}^k \times (r^k + \sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \eta_l^k) \\ & + 2\omega^k \times (\sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(r^k) \dot{\eta}_l^k) + \omega^k \end{aligned}$$

表 2.10.2 f_j の値 (Singh³⁾ より転載)

$$f_j = \sum_{k=1}^n [\underline{M}^{hk} \cdot \underline{\omega}_j^k + \underline{F}^k \cdot \underline{V}_j^{hk} + \int_{B_k} \underline{V}_j^{\dot{\eta}^k} \cdot \underline{d\mathbf{f}}]$$

for a system of n flexible bodies.

Here M^{hk} is the moment on B_k with respect to the hinge point h_k of working forces (eliminating non-working constraint forces) and F^k is the force on B_k obtained by summing the working forces (eliminating non-working constraint forces).

$$\times \{ \underline{\omega}^k \times (\underline{r}^k + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) \} + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \ddot{\underline{\eta}}_l^k \quad (2.10.30)$$

となるから (2.10.26), (2.10.30) を (2.10.29) 式に代入することによって f_j^* は表 2.10.3 のように求められる。

表 2.10.2 の f_j と表 2.10.3 の f_j^* を (2.10.27) 式に代入することによりシステムの運動方程式が得られる。これより運動方程式を具体的に導くには、まずシステムのジェネライズド・スピードを選び、次に各ジェネライズド・スピードに対して、ヒンジ点のパーシャル・ベロシティ \underline{V}_j^{hk} 、ボディ B_k 上の任意の

点の柔軟性によるパーシャル・ベロシティ $\underline{V}_j^{\dot{\eta}k}$ 、ボディ B_k の角速度 $\underline{\omega}^k$ のパーシャル・アンギュラ・ベロシティ $\underline{\omega}_j^k$ がどのような形になるかを求めればよい (f_j と f_j^* に含まれるパーシャル・ベロシティはこの 3 つだけである)。

ここでは表 2.10.4 のようにジェネライズド・スピードを選ぶ。表 2.10.4 にはパーシャル・ベロシティもあわせて示す。さて表 2.10.4 に示すようなパーシャル・ベロシティを得るためには、ボディ B_j 上の位置ベクトル \underline{R}^j の点の速度 $\dot{\underline{R}}^j$ 及び伸び速度 $\dot{\underline{\omega}}^j$ を求めればよい。この場合 $\dot{\underline{R}}^j$ 及び $\dot{\underline{\omega}}^j$ は表 2.10.5 のように求められるので、これを (2.10.20)~(2.10.22) 式と比較

表 2.10.3 f_j^* の値 (Singh³⁾ より転載)

$$\begin{aligned} -f_j^* = & \sum_{k=1}^n \{ m_k \ddot{\underline{R}}^{hk} \cdot \underline{V}_j^{hk} + \underline{\omega}_j^k \cdot m_k \underline{\ell}^k \times \ddot{\underline{R}}^{hk} + \ddot{\underline{R}}^{hk} \cdot \\ & \int_{B_k} \underline{V}_j^{\dot{\eta}k} dm + \underline{V}_j^{hk} \cdot [\dot{\underline{\omega}}^k \times m_k \underline{\ell}^k + \underline{\omega}^k \times (\underline{\omega}^k \times m_k \underline{\ell}^k) \\ & + 2 \underline{\omega}^k \times \int_{B_k} \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \dot{\underline{\eta}}_l^k dm + \int_{B_k} \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \ddot{\underline{\eta}}_l^k dm] \\ & + \underline{\omega}_j^k \cdot \dot{\underline{H}}^{hk} + \dot{\underline{\omega}}^k \cdot \int_{B_k} [\underline{r}^k + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k)] \times \underline{V}_j^{\eta k} dm \\ & + 2 \underline{\omega}^k \cdot \int_{B_k} \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \dot{\underline{\eta}}_l^k \times \underline{V}_j^{\dot{\eta}k} dm + \int_{B_k} \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \ddot{\underline{\eta}}_l^k \\ & \cdot \underline{V}_j^{\dot{\eta}k} dm - \underline{\omega}^k \cdot \underline{D}_j^k \cdot \underline{\omega}^k \} \end{aligned}$$

where the angular momentum vector \underline{H}^{hk} and the inertia dyadic \underline{D}_j^k are defined, with \underline{U} as the unit dyadic, as follows

$$\begin{aligned} \underline{H}^{hk} = & \int_{B_k} (\underline{r}^k + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) \times [\underline{\omega}^k \times (\underline{r}^k + \\ & \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \dot{\underline{\eta}}_l^k] dm \\ \underline{D}_j^k = & \int_{B_k} \{ [(\underline{r}^k + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) \cdot \underline{V}_j^{\dot{\eta}k}] \underline{U} - (\underline{r}^k \\ & + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) \cdot \underline{V}_j^{\eta k} \} dm \\ \text{and } \underline{\ell}^k = & \frac{1}{m_k} \int_{B_k} (\underline{r}^k + \sum_{l=1}^{N_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \underline{\eta}_l^k) dm \end{aligned}$$

表 2.10.4 ジェネライズド・スピードとパーシャル・ペロシテイ

運動方程式	ジェネライズド・スピード	ジェネライズド・スピードの説明	パーシャル・ペロシテイ		
			V_j^{hk}	V_j^{jk}	ω_j^k
全体の質量中心の並進運動方程式	$\dot{R}_1^c, \dot{R}_2^c, \dot{R}_3^c$	システム全体の質量中心 c の慣性系に対する速度 \dot{R}_c の成分 $\dot{R}_c = \dot{R}_1^c i_1 + \dot{R}_2^c i_2 + \dot{R}_3^c i_3$	$V_{-j}^{hk} = \underline{z}_p$	$V_{-j}^{jk} = 0$	$\omega_{-j}^k = 0$
ボディ B_1 の回転運動方程式	$\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1$	ボディ B_1 の慣性系に対する角速度 ω^1 のボディ B_1 の質量中心に固定した座標系 b_p' であらわした成分 $\omega^1 = \omega_1^1 b_1^1 + \omega_2^1 b_2^1 + \omega_3^1 b_3^1$	$V_{-j}^{hk} = [1 - \delta_{1k} - \sum_{l=2}^n \frac{m_l}{m}] \underline{b}_p^1 \times \underline{d}^{12}$	$V_{-j}^{jk} = 0$	$\omega_{-j}^k = \underline{b}_p^1$
ボディ B_m のモード座標の運動方程式 ($m=1, 2, \dots, n$)	$\dot{\eta}_1^m, \dot{\eta}_2^m, \dots, \dot{\eta}_{N_m}^m$	ボディ B_m の各モード座標の速度	$V_{-j}^{hk} = -\frac{m_m}{m} \underline{d}_s^m - \sum_{l=m+1}^n \frac{m_l}{m} \{ \underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) \times \underline{y}^q + \underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) \times \underline{d}^l + \sum_{q=m+1}^l \underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) \times \underline{y}^q + \underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) \times \underline{d}^{q+1} \} + u(k-m) [\underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) + \sum_{q=m+1}^{k-1} \{ \underline{\phi}_s' (p_{mm+1}) \times \underline{d}^q q^{q+1} \}]$ where $u(k-m)=0$ for $k-m \leq 0$; $u(k-m)=1$ for $k-m > 0$	$V_{-j}^{jk} = \delta_{km} \underline{\phi}_s^m (\underline{r}^m)$ for any k	$\omega_{-j}^k = u(k-m) \underline{\phi}_s^m (p_{mm+1})$ $s=1, \dots, N_m$ corresponding to j
m 番目のヒンジの回転運動方程式	$\dot{\theta}_1^m, \dot{\theta}_2^m, \dot{\theta}_3^m$	m 番目のヒンジの回転角速度 ω^{m-1} をヒンジに固定したジンバル座標系 G_i^m であらわした成分 $\omega^{m-1} = \dot{\theta}_1^m G_1^m + \dot{\theta}_2^m G_2^m + \dot{\theta}_3^m G_3^m$	$V_{-j}^{hk} = -\sum_{l=m}^n \frac{m_l}{m} \{ \underline{G}_p^m \times \underline{d}^l + \sum_{q=m}^l \underline{G}_p^m \times \underline{y}^q + \sum_{q=m}^{l-1} \underline{G}_p^m \times \underline{d}^q q^{q+1} \} + \delta_{km} \underline{G}_p^m \times \underline{y}^m + u(k-m) [\sum_{q=m}^{k-1} \underline{G}_p^m \times \underline{d}^q q^{q+1} + \sum_{q=m}^k \underline{G}_p^m \times \underline{y}^q]$	$V_{-j}^{jk} = 0$	$\omega_{-j}^k = u[k - (m-1)] \underline{G}_p^m$
m 番目のヒンジの並進運動方程式	$\dot{y}_1^m, \dot{y}_2^m, \dot{y}_3^m$	m 番目のヒンジの並進速度 \dot{v}^m をヒンジに固定した座標系 \mathcal{G}_s^m であらわした成分 $\dot{v}^m = \dot{y}_1^m \mathcal{G}_1^m + \dot{y}_2^m \mathcal{G}_2^m + \dot{y}_3^m \mathcal{G}_3^m$	$V_{-j}^{hk} = \sum_{l=m}^n \frac{m_l}{m} \underline{G}_s^m + u[k - (m-1)] \underline{G}_s^m$	$V_{-j}^{jk} = 0$	$\omega_{-j}^k = 0$

表 2.10.5 $\dot{\mathbf{R}}^j$ と $\boldsymbol{\omega}^j$ (Singh³⁾ より転載)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}^j = & \dot{\mathbf{R}}^c - \sum_{l=2}^n \frac{m_l}{m} \left\{ \sum_{s=1}^{N_l} \phi_s^1(p_{12}) \dot{\eta}_s^1 + \underline{\omega}^1 \times \underline{d}^{12} + \sum_{s=1}^{N_l} \underline{\alpha}_s^l \dot{\eta}_s^l \right. \\
& + \underline{\omega}^l \times \underline{d}^l + \sum_{k=2}^l (\dot{\underline{y}}^k + \underline{\omega}^k \times \underline{y}^k) + \sum_{k=2}^{l-1} \left[\sum_{s=1}^{N_k} \phi_s^k(P_{k,k+1}) \dot{\eta}_s^k \right. \\
& \left. \left. + \underline{\omega}^k \times \underline{d}^{k,k+1} \right] \right\} + (1 - \delta_{1j}) \left[\sum_{s=1}^{N_1} \phi_s^1(P_{12}) \dot{\eta}_s^1 + \underline{\omega}^1 \times \underline{d}^{12} \right] \\
& + \sum_{k=2}^{j-1} \left[\sum_{s=1}^{N_k} \phi_s^k(P_{k,k+1}) \dot{\eta}_s^k + \underline{\omega}^k \times \underline{d}^{k,k+1} \right] \\
& + \sum_{k=2}^j (\dot{\underline{y}}^k + \underline{\omega}^k \times \underline{y}^k) + \sum_{s=1}^{N_j} \phi_s^j(\underline{r}^j) \dot{\eta}_s^j + \underline{\omega}^j \times [\underline{r}^j \\
& + \sum_{s=1}^{N_j} \phi_s^j(\underline{r}^j) \eta_s^j]
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\underline{d}^{k,k+1} &= \underline{D}^{k,k+1} + \sum_{s=1}^{N_k} \phi_s^k(P_{k,k+1}) \eta_s^k \\
\underline{\alpha}_s^l &= \frac{1}{m_l} \int_{B_l} \phi_s^l(\underline{r}^l) dm \quad (l^{\text{th}} \text{ body}, s^{\text{th}} \text{ mode}) \\
\delta_{1j} &= \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

m_l is the mass of B_l , $m = \sum_{p=1}^n m_p$, the total mass

and

$$\underline{\omega}^j = \underline{\omega}^1 + \sum_{k=1}^{j-1} \left[\sum_{l=1}^{N_k} \phi_l^k(P_{k,k+1}) \dot{\eta}_l^k \right] + \sum_{m=2}^j \underline{\omega}^{m-1}$$

すると表 2.10.4 のようにパーシャル・ベロシティを求めることができる。

このようにして各ジェネライズド・スピードに対してパーシャル・ベロシティを求めれば、それを f_j , f_j^* に代入してチェーン構造の最終的な運動方程式を得ることができる。

2.10.3 まとめ及び評価

Kane の方程式は、運動方程式を内積の形で表現することにより拘束をうけない方向の運動方程式を得るもので、拘束力が方程式中に含まれないので注目される方法である。Singh の方法は、この Kane の運

動方程式の特長を多体系のモデリングにうまくいかしており、ヒンジの自由度が 6 以下の場合でも運動方程式の次数の低減を容易に行なうことができる。さらに Singh の方法では方程式の導出過程が比較的単純で見通しの良いものとなっている。Kane の方程式を用いれば運動方程式作成の上でこのような利点があるが、Newton-Euler 方程式や Lagrange 方程式に比べてなじみのうすいものであり、適用例も少ないため、この方法を正しく評価するには、コード化したプログラムの効率やより複雑なループ等の拘束条件への対応等について、他の方法との詳細な比

較検討が必要であろう。

2.11 関連文献

2.11.1 Hurty¹⁾

(1) 概 要

例えば、図 2.11.1 に示すような相互に結合するいくつかの部分系から構成されている弾性構造物の動解析の新らしい手法を述べている。本手法の特徴は、各部分の変位を次の 3 つのカテゴリーに分類される一般化座標を使って表現するところにある：

剛体モード；剛体的な変位による表現。

拘束モード；他の部分系との結合点に順次単位変位を静的に加えた時生じる弾性変位による表現。

正規モード；結合点の変位を拘束した場合の弾性振動の基準振動モードによる表現。

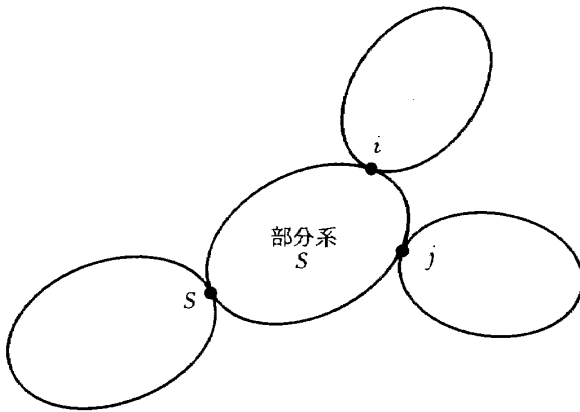


図 2.11.1 対象とする構造物

(2) 本 論

一般の線形な弾性構造物の運動方程式は、次式で与えられる。

$$[m]\{\ddot{p}\} + [c]\{\dot{p}\} + [k]\{p\} = \{P(t)\} \quad (2.11.1)$$

$$\text{ここで } \{p\} = \begin{Bmatrix} \{p\}_1 \\ \{p\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} \{P(t)\}_1 \\ \{P(t)\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} [m]_1 & & \\ & [m]_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad [c] = \begin{bmatrix} [c]_1 & & \\ & [c]_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_1 & & \\ & [k]_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\{p\}_s$ ；部分系 s の一般化変位を表わす列マトリクス，
 $[m]_s$ ， $[c]_s$ ， $[k]_s$ ；部分系 s の質量マトリクス，
 減衰係数マトリクス，剛性マトリクス，
 $\{P(t)\}$ ；部分系 s に働く一般化力。

結合点における拘束条件から、列マトリクス $\{p\}$ には、次の条件が課せられる、

$$[A]\{p\} = 0 \quad (2.11.2)$$

ここで $[A]$ ； $k \times m$ マトリクス， k ；結合点の数， m ；列マトリクス $\{p\}$ の要素数。

マトリクス $\{p\}$ の中の独立な $(m-k)$ の要素から作られる $(m-k) \times 1$ マトリクスを $\{q\}$ とすれば、(2.11.2) は次のように表わされる、

$$\{p\} = [\beta]\{q\} \quad (2.11.3)$$

ここで $[\beta]$ ； $m \times (m-k)$ マトリクス。

一方、運動方程式 (2.11.1) は $\{q\}$ を用いて、次のように表わされる、

$$[\beta]^T [m] [\beta] \{\ddot{q}\} + [\beta]^T [c] [\beta] \{\dot{q}\} + [\beta]^T [k] [\beta] \{q\} = [\beta]^T \{P(t)\} \quad (2.11.4)$$

さて以下では、前述した 3 種類の一般化座標を用いて (2.11.4) に対応する運動方程式を導出する。そのため結合点を次のように分類する。例えば、図 2.11.1 の部分系 S に対し、結合点 S を基準点とし、結合点 i, j, \dots を付加拘束点とする（この分類は、Hurty の原論文のそれとは若干違っている）。基準点とは、その点での並進変位とその点回りの回転変位によって、その部分系の剛性変位を表現する結合点である。一方、付加拘束点の剛体変位からの相対変位を用いて、部分系 S の剛体変位に重畳される弾性変位を表現する。そして、部分系 S の全変位は、基準点による剛体的変位、付加拘束点による弾性変位及び、結合点を全て拘束した状態での弾性振動によって表現できると考える。すなわち、部分系 S 内の任意点 $Q(x, y, z)$ の変位 $u(x, y, z)$ は、次のように表される、

$$u(x, y, z) = u^R(x, y, z) + u^C(x, y, z) + u^N(x, y, z) \quad (2.11.5)$$

ここで u^R , u^C , u^N は、それぞれ、基準点の変位による剛体的変位、付加拘束点の変位による弾性変位、結合点の拘束状態における弾性振動を表わす。更に、 u^R , u^C , u^N を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} u^R(x, y, z) &= \sum_j \phi_j^R(x, y, z) p_j^R \\ u^C(x, y, z) &= \sum_j \phi_j^C(x, y, z) p_j^C \\ u^N(x, y, z) &= \sum_j \phi_j^N(x, y, z) p_j^N \end{aligned} \right\} \quad (2.11.6)$$

ここで、 ϕ_j^R ; j 番目の剛体変位モード、 ϕ_j^C ; j 番目の弾性変位モード、 ϕ_j^N ; j 番目の基準振動モードを表わす。図 2.11.2 に代表的な変位モードを示す。

(a) は、基準点 S の並進変位にもとづく、部分系 S の剛体変位である。(b) は、付加拘束点 i の静的単位変位による部分系 S の弾性変位モードを示す。通常、弾性変位モードは、付加拘束点に順次、単位静的変位を与えることによって求める。(c) は、結合点を拘束した状態での基準振動モードである。このように導入された一般化座標、 p_j^R , p_j^C , p_j^N に対する運動方程式は、Lagrange 方程式から求められる。 p_j に対する Lagrange 方程式は、次式で与えられる、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial p_j} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{p}_j} \right) = p_j \quad (2.11.7)$$

ここで、 T ; 運動エネルギー、 U ; ポテンシャルエネルギー、 R ; 散逸関数、である。運動エネルギー T は密度を μ として次式で与えられる、

$$T = \frac{1}{2} \int \mu (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV \quad (2.11.8)$$

上式に (2.11.5), (2.11.6) を代入して整理すると次式となる、

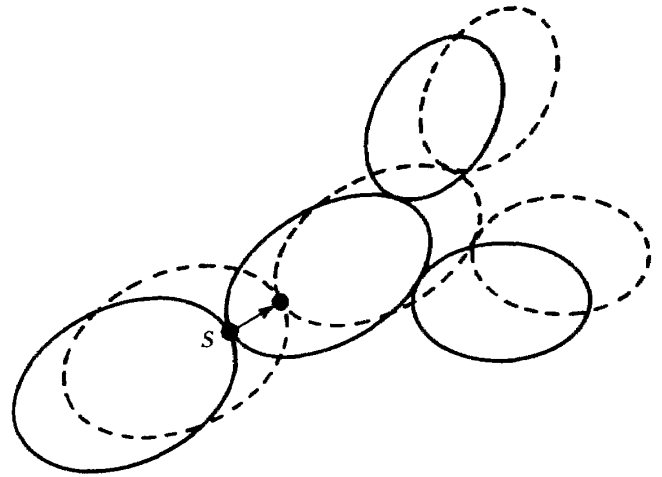
$$T = \frac{1}{2} \{p\}^T [m] \{p\} \quad (2.11.9)$$

ここで $\{p\}$ は、一般化座標で作られる列マトリクスであり次の様な構造をしている、

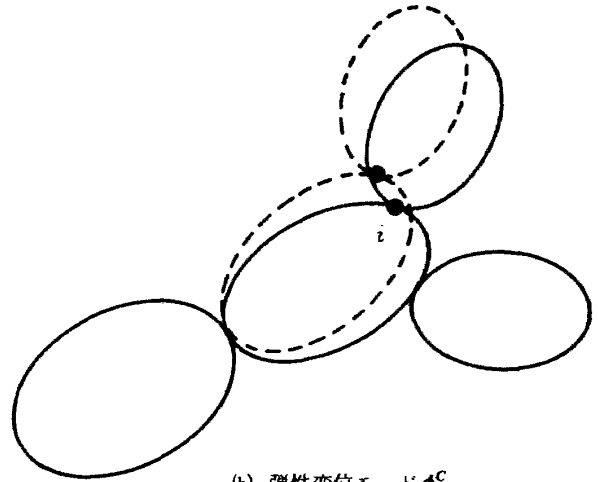
$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \{p\}_1 \\ \{p\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{p\}_s = \begin{Bmatrix} p^R \\ p^C \\ p^N \end{Bmatrix}_s$$

$[m]$ は質量マトリクスであり、各要素は次式で与えられる;

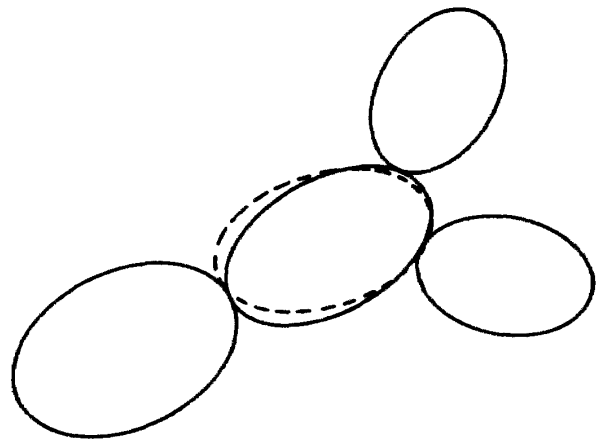
$$m_{jk} = \int \mu \phi_j \cdot \phi_k dV$$



(a) 剛体変位モード ϕ^R



(b) 弾性変位モード ϕ^C



(c) 基準振動モード ϕ^N

図 2.11.2 各種変位モード

ポテンシャルエネルギー U は、次式で与えられる、

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} \, dV \quad (2.11.10)$$

ここで、 $\boldsymbol{\tau}$ 、 \mathbf{e} はそれぞれ、6次元応力ベクトル、歪ベクトルである。線型の応力-歪関係を仮定し、

$$\boldsymbol{\tau} = [G] \mathbf{e}$$

歪ベクトルの一般化座標 p_j に関する成分を $\mathbf{e}_{,j}$ と表わせば (2.11.5), (2.11.6) を用いて, (2.11.10) は次のように表わせる、

$$U = \frac{1}{2} \{p\}^T [k] \{p\} \quad (2.11.11)$$

ここで、 $[k]$ は剛性マトリクスであり、各要素は次式で与えられる、

$$k_{ij} = \int \mathbf{e}_{,i} [G] \mathbf{e}_{,j} \, dV$$

更に $[k]$ の各要素は、次の性質がある。

$$\begin{aligned} k_{ij}^{RR} &= 0, & k_{ij}^{RC} &= k_{ij}^{RN} = 0, \\ k_{ij}^{CN} &= 0, & k_{ij}^{NN} &= \omega_i^2 m_{ii}^{NN} \delta_{ij} \end{aligned}$$

散逸関数 R は通常、次のように表わされる、

$$R = \frac{1}{2} \{\dot{p}\}^T [C] \{\dot{p}\} \quad (2.11.12)$$

ここで、 $[C]$ は減衰マトリクスである。さて、一方、一般化力は、仮想仕事の原理から求められる。 \mathbf{R}_s^R , \mathbf{R}_r^C をそれぞれ、基準点 S , 付加拘束点 r に働く抵抗力とし、 \mathbf{F}_i , \mathbf{f} をそれぞれ、物体上の任意点 i , 及び物体全体に働く外力とする。この時、仮想仕事 δW は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_s \mathbf{R}_s^R \delta \mathbf{u}_s^R + \sum_r \mathbf{R}_r^C (\delta \mathbf{u}_r^R + \delta \mathbf{u}_r^C) + \int \mathbf{f} \delta \mathbf{u} \, dV \\ &\quad + \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (2.11.13)$$

上式に (2.11.5), (2.11.6) を代入して次式をうる、

$$\delta W = \sum_j P_j^R \delta p_j^R + \sum_j P_j^C \delta p_j^C + \sum_j P_j^N \delta p_j^N \quad (2.11.14)$$

ここで $P_j^R = \sum_s \mathbf{R}_s^R \boldsymbol{\phi}_s^R + \sum_r \mathbf{R}_r^C \boldsymbol{\phi}_r^C + \mathcal{F}_j^R$

$$P_j^C = \sum_r \mathbf{R}_r^C \boldsymbol{\phi}_{rj}^C + \mathcal{F}_j^C$$

$$P_j^N = \mathcal{F}_j^N$$

$$\mathcal{F}_j^R = \int \mathbf{f} \boldsymbol{\phi}_j^R \, dV + \sum_i \mathbf{F}_i \boldsymbol{\phi}_{ij}^R$$

$$\mathcal{F}_j^C = \int \mathbf{f} \boldsymbol{\phi}_j^C \, dV + \sum_i \mathbf{F}_i \boldsymbol{\phi}_{ij}^C$$

$$\mathcal{F}_j^N = \int \mathbf{f} \boldsymbol{\phi}_j^N \, dV + \sum_i \mathbf{F}_i \boldsymbol{\phi}_{ij}^N$$

最後に、求められた一般化力を次の列ベクトルの型に整理する。

$$\{P\} = [\phi]^T \{R\} + \{\mathcal{F}\} \quad (2.11.15)$$

$$\text{ここで } \{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{P\}_s = \begin{Bmatrix} P_s^R \\ P_s^C \\ P_s^N \end{Bmatrix}_s$$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} \{R\}_1 \\ \{R\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{R\}_s = \begin{Bmatrix} R_s^R \\ R_s^C \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathcal{F}\}_1 \\ \{\mathcal{F}\}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{\mathcal{F}\}_s = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_s^R \\ \mathcal{F}_s^C \\ \mathcal{F}_s^N \end{Bmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{Bmatrix} [\phi]_1 \\ [\phi]_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad [\phi]_s = \begin{bmatrix} \phi^{RR} & 0 & 0 \\ \phi^{CR} & \phi^{CC} & 0 \end{bmatrix}$$

(2.11.9), (2.11.11), (2.11.12), (2.11.15) を (2.11.7) に代入することによって一般化座標 P_j に対する運動方程式が求められる。部分系 S に対する方程式は次式となる、

$$[m]_s \{\ddot{p}\}_s + [c]_s \{\dot{p}\}_s + [k]_s \{p\}_s = [\phi]_s^T \{R\}_s + \{\mathcal{F}\}_s \quad (2.11.16)$$

一方、(2.11.3) に対応した変換によって、全系の運動方程式は、次式となる、

$$\begin{aligned} [\beta]^T [m] [\beta] \{\ddot{q}\} + [\beta]^T [c] [\beta] \{\dot{q}\} \\ + [\beta]^T [k] [\beta] \{q\} = [\beta]^T \{\mathcal{F}\} \end{aligned} \quad (2.11.17)$$

(2.11.17) の導出において次の関係式を用いた、

$$[\beta]^T [\phi]^T \{R\} = 0$$

2.11.2 Guyan²⁾

有限要素モデルの次数低減の方法のひとつとして元来提案されたもので、作用力の働かないノード座標を振動方程式から除去することを目的としている。

静的な構造方程式 $F = Kx$; F は作用力、 K は剛性行列、 x はノード座標、を分割し

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.11.18)$$

作用力 $F_2 = 0$ の場合を想定する。方程式の次数は低減され、

$$F_1 = (A - BC^{-1}B^T)x_1, \quad x_2 = C^{-1}B^Tx_1 \quad (2.11.19)$$

となり、静的構造解析は reduced stiffness matrix $K_1 = A - BC^{-1}B^T$ を考えればよい。これは座標変換

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ -C^{-1}B^T \end{bmatrix} x_1 \equiv T x$$

を(2.11.18)式に施すことと等価であり、 $K_1 = T^TKT$ と表わせる。動的な構造解析問題でも同じ座標変換によって質量行列 M の次数低減を同時に行なえる。振動による運動エネルギーが $\frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x}$ であるので reduced mass matrix M_1 は、

$$M = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^T & \bar{C} \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} M_1 &= T^TMT \\ &= \bar{A} - \bar{B}C^{-1}B^T - (C^{-1}B^T)^T(\bar{B}^T - \bar{C}C^{-1}B^T) \end{aligned} \quad (2.11.20)$$

となる。

ここで K_1 は K の全要素で表わされ、その情報は失なわれていないが、 M_1 は剛性行列、質量行列の両方で表現されている点に注目したい。

この Guyan の方法は前節の Hurty が扱ったと同じ問題に拡張して考えられる。連続体をいくつかのサブストラクチャに分割し、サブストラクチャの境界の座標を x_1 、内部の座標を x_2 とする(図 2.11.3)。 x_1 のみが隣接するサブストラクチャから作用力を受けると考えれば、(2.11.19)、(2.11.20) 式によって剛性行列、質量行列は低次元化され、全体の連続体の

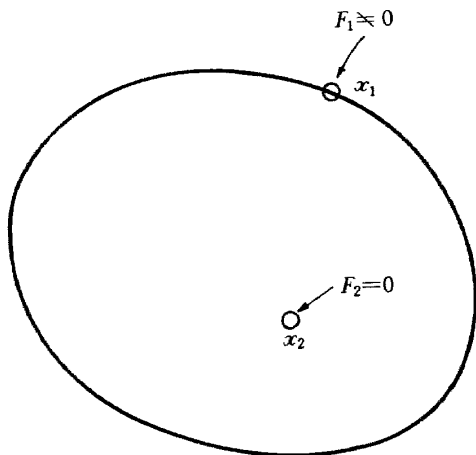


図 2.11.3 サブストラクチャの境界座標 x_1 、内部座標 x_2

構造解析は境界座標 x_1 の集まりのみについてモード解析を行なえばよい。

Hurty の方法では、これに更に境界座標 x_1 を固定したときの振動モードを加えたものとなっている。

2.11.3 Likins³⁾

(1) 概要

典型的な現代の宇宙船は剛体部分と柔軟付属物から構成される場合が多いが、このような宇宙船の姿勢制御系の設計や動的シミュレーションの解析手法のひとつに、ハイブリッド座標系を用いたアプローチがある。この方法では、剛体部分は非線型、非拘束運動を許すが、柔軟付属物部分は線型の微小振動を想定して解析を行う。このときの柔軟付属物の数学モデルの方法としては以下の3つの定式化が考えられる。

(1) バネで結合された、小さな剛体の集合体^{5)~7)}

(2) 弾性連続体^{8)~10)}

(3) (集中質量あるいは質量なしの)ノードで結合された有限弾性要素

(1)の方法は、複雑な構造の宇宙船の姿勢制御系の設計に適しており、(2)の方法は、柔軟付属物が弾性ビームとして理想化できる場合には都合がよい。本論文では(3)の方法による定式化及びこの方法の特徴について考察しており、さらにモード座標系への座標変換についても検討を加えている。

本論文では、柔軟付属物は ϵ 個の有限構造要素(エレメント)から成り、第 S エレメントは n_s 個の節点(ノード)を持っている。また、各ノードには集中質量があってもよいし、なくてもよいが、エレメント全体は分散型質量をもっている。

図 2.11.4 には、典型的な第 S エレメントに関して、3つの状態が描かれている。右側の状態が変形前、真ん中が定常的な変形 $w^s, u^{j'}$ を受けている状態であり、本論文では、この定常変位については考えない。左側が定常変形からの微小、時変的な変動 w^s, u^j を表わしている。

w^s = 各エレメント内の質量 dv の変位 ($s=1, 2, \dots, \epsilon$)

u^j = 各ノードの変位 ($j=1, 2, \dots, n$)

ここで n はノード総数である。

(2) エレメントの運動方程式

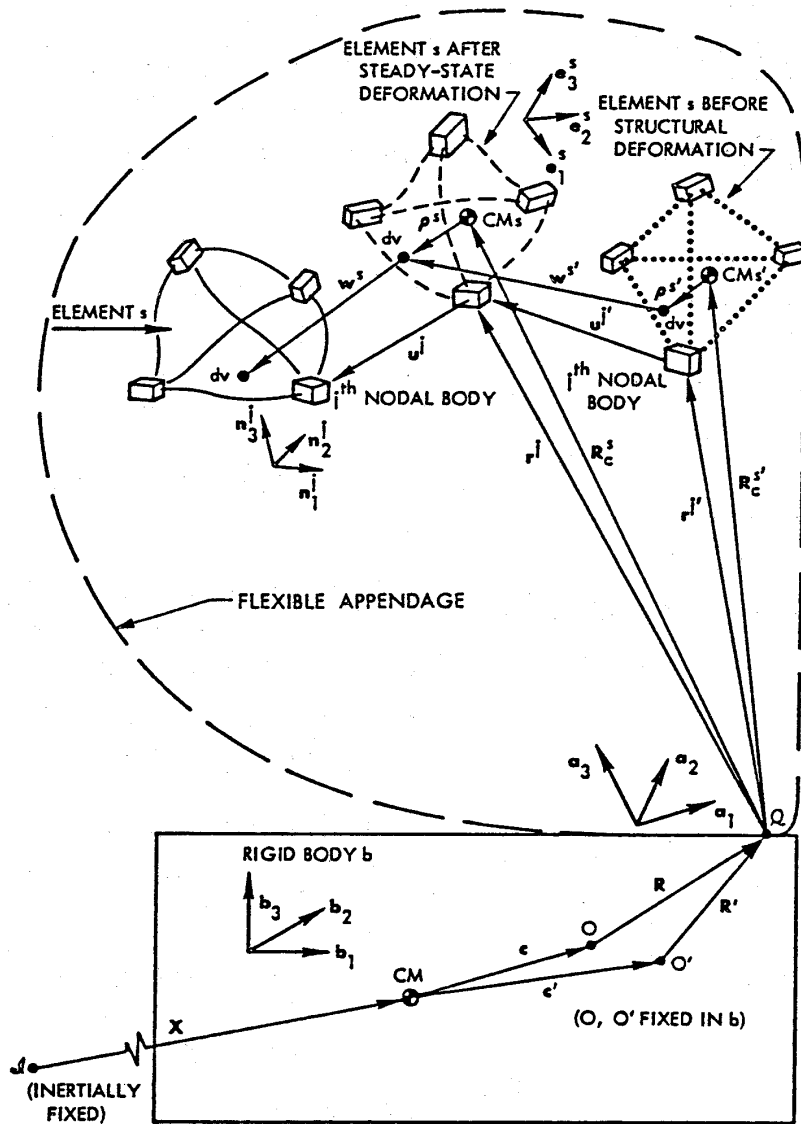

 図 2.11.4 柔軟付属物の数学モデル (Likins³⁾による)

図 2.11.4 を参照にしながら, エレメントの変位を $w(\xi, \eta, \varsigma)$ で表わすと, 柔軟付属物の座標系 $\{a\}$ 及びエレメントの局所座標系 $\{e\}$ では,

$$w = \{a\}^T w = \{e\}^T \bar{w} \quad (3), (4)$$

\bar{w} は ξ, η, ς の多項式で表わされるものとし,

$$\bar{w} = P \Gamma \quad (5)$$

ここで

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \varsigma & \xi^2 & \xi\eta & \xi\varsigma & \eta^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \xi & \eta & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \xi & \dots \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Gamma = [\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{6n}]^T$$

エレメント内のノード j の変位 \bar{u}^j は, ノードの局所座標を $(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j)$ とすると

$$\bar{u}^j = \bar{w}(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j) = P(\xi_j, \eta_j, \varsigma_j) \Gamma \quad (7)$$

回転 β^j も同様に,

$$\bar{\beta}^j = \frac{1}{2} \tilde{v} \bar{w} |_{\xi_j \eta_j \varsigma_j} = \frac{1}{2} \tilde{v} P |_{\xi_j \eta_j \varsigma_j} \Gamma \quad (8)$$

ここで,

$$\tilde{v} \triangleq v \times = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial \varsigma & \partial/\partial \eta \\ \partial/\partial \varsigma & 0 & -\partial/\partial \xi \\ -\partial/\partial \eta & \partial/\partial \xi & 0 \end{bmatrix}$$

1つのエレメントには n 個のノードがあり (サブスクリプト s は省略), これら全ての変位と回転をまとめて, \bar{y} という行列を導入すると,

$$\bar{y} = F \Gamma \quad (9)$$

ここで,

$$y = \begin{bmatrix} \bar{u}^k \\ \bar{\rho}^k \\ \bar{u}^i \\ \bar{\rho}^i \\ \vdots \\ \bar{u}^j \\ \bar{\rho}^j \end{bmatrix} \quad F \equiv \begin{bmatrix} P|_k \\ \frac{1}{2} \bar{\rho} P|_k \\ P|_i \\ \frac{1}{2} \bar{\rho} P|_i \\ \vdots \\ P|_j \\ \frac{1}{2} \bar{\rho} P|_j \end{bmatrix}$$

(9)式と(5)式より \bar{w} は

$$\bar{w} = P F^{-1} \bar{y} = W \bar{y} \quad (10, 11)$$

(10), (11)式は、ノードの変位を用いて、エレメント内の dv の変位を表現している。

ところで、エレメントの歪と変位の関係は、微小変位の場合、

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\epsilon}_{23} \\ \bar{\epsilon}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial\eta & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\zeta \\ \partial/\partial\eta & \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\zeta & \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\zeta & 0 & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

一般的には、

$$\bar{\epsilon} = D \bar{w} = DW \bar{y} \quad (13)$$

また、熱歪 $\bar{\epsilon}_\tau$ は

$$\bar{\epsilon}_\tau = \bar{\alpha}_\tau [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (15)$$

ここで、 τ は温度分布を表わし、一般に $\tau = \tau(\xi, \eta, \zeta)$ である、歪と応力の関係は、 E をヤング率、 ν をポアソン比として、

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} - \bar{\alpha}_\tau \\ \bar{\epsilon}_{22} - \bar{\alpha}_\tau \\ \bar{\epsilon}_{33} - \bar{\alpha}_\tau \\ \bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\epsilon}_{23} \\ \bar{\epsilon}_{31} \end{bmatrix} \quad (16)$$

(22)式の中の \bar{A} は、(23)式のベクトル A の $\{e\}$ 座標系での $A \equiv \frac{d^2}{dt^2} (X + c + R + R_c + \rho + w)$ (23)

あるいは、

$$\bar{\sigma} = S \bar{\epsilon} - \bar{\sigma}_\tau = SDW \bar{y} - \bar{\sigma}_\tau \quad (17, 18)$$

次に、エレメント S がノード k ($k=1 \sim n$) から受ける力及びトルクを $\bar{F}^{ks}, \bar{T}^{ks}$ として、 $6n \times 1$ の行列、

$$\bar{L}^s \equiv \begin{bmatrix} \bar{F}^{1s} \\ \bar{T}^{1s} \\ \vdots \\ \bar{F}^{ns} \\ \bar{T}^{ns} \end{bmatrix} \quad (19)$$

を考え、これを用いて、仮想変位による仕事 w^* を計算すると、

$$w^* = \bar{y}^{*T} \bar{L}^s + \int \bar{w}^{*T} \bar{G} dv - \int \bar{w}^{*T} \bar{A} \mu dv$$

ここで、 \bar{G} は物体力、 \bar{A} は dv の加速度、 μ は dv の密度を表わす。また、これに対応する歪エネルギー α^* は、(18), (13), (11)式より

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \int \bar{\epsilon}^{*T} (\bar{\sigma} + \bar{\sigma}') dv = \int \bar{w}^{*T} D^T (SDW \bar{y}^* \\ &\quad - \bar{\sigma}_\tau + \bar{\sigma}') dv \\ &= \bar{y}^{*T} \int W^T D^T SDW dv \bar{y} - \bar{y}^{*T} \int W^T D^T \bar{\sigma}_\tau dv \\ &\quad + \bar{y}^{*T} \int W^T D^T \bar{\sigma}' dv \end{aligned} \quad (21)$$

$w^* = \alpha^*$ として、

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \int W^T D^T SDW dv \bar{y} + \int W^T (\bar{A} \mu - \bar{G} - D^T \bar{\sigma}_\tau) dv \\ &\quad + \int W^T D^T \bar{\sigma}' dv \end{aligned} \quad (22)$$

行列表現であり、これは、ノード変位行列 \bar{y} を用いて表わさなければならず、最終的には(22)式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \{\mathbf{e}\}^T \bar{\mathbf{A}} = \{\mathbf{e}\}^T \{ & CC\ddot{\boldsymbol{\theta}}\dot{\mathbf{X}} + \bar{C}C[\ddot{\mathbf{e}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{e}} + \ddot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e} + \mathbf{R}) \\ & + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e} + \mathbf{R})] \\ & + \bar{C}[\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a(\mathbf{R}_c + \bar{C}^T\bar{\boldsymbol{\rho}}) + \ddot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a(\mathbf{R}_c + \bar{C}^T\bar{\boldsymbol{\rho}})] \\ & + \ddot{\mathbf{w}} + \bar{C}[2\dot{\boldsymbol{\omega}}^a\bar{C}^T\dot{\mathbf{w}} + (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a)\bar{C}^T\bar{\mathbf{w}}]\} \end{aligned} \quad (32)$$

この式を(22)式へ代入すると

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \int \mathbf{W}^T \mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{W} dv \bar{\mathbf{y}} + \int \mathbf{W}^T \{ \bar{C} C \ddot{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{X}} \\ & + \bar{C} C [\ddot{\mathbf{e}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{e}} + (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}})(\mathbf{e} + \mathbf{R})] \\ & + \bar{C} [(\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a)(\mathbf{R}_c + \bar{C}^T\bar{\boldsymbol{\rho}})] \} \mu dv \quad (34) \\ & + \int \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mu dv \ddot{\mathbf{y}} + \int \mathbf{W}^T \bar{C} 2\dot{\boldsymbol{\omega}}^a \bar{C}^T \mathbf{W} \mu dv \dot{\mathbf{y}} \\ & + \int \mathbf{W}^T \bar{C} (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \bar{C}^T \mathbf{W} \mu dv \bar{\mathbf{y}} \\ & - \int \mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_r) dv + \int \mathbf{W}^T \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}' dv \end{aligned}$$

このとき、 $\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a = \ddot{\boldsymbol{\omega}} + C\dot{C}^T$ の関係式を用いた。(34)式の各積分のうち、

$$\begin{aligned} \bar{m} &\triangleq \int \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mu dv && \text{エレメントのコンシステント・質量行列} \\ \bar{g} &\triangleq 2 \int \mathbf{W}^T \bar{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}^a \bar{C}^T \mathbf{W} \mu dv && \text{エレメントのジャイロ・カップル行列} \\ \bar{k} &\triangleq \int \mathbf{W}^T \mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{W} dv && \text{エレメントの構造的剛性行列} \\ \bar{\kappa} &\triangleq \int \mathbf{W}^T \bar{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}^a \dot{\boldsymbol{\omega}}^a \bar{C}^T \mathbf{W} \mu dv && \text{エレメントの遠心的剛性行列} \\ \bar{\alpha} &\triangleq \int \mathbf{W}^T \bar{C} \ddot{\boldsymbol{\omega}}^a \bar{C}^T \mathbf{W} \mu dv && \text{エレメントの角加速度剛性行列} \end{aligned}$$

として、また、 \bar{k} は

$$\begin{cases} \bar{k}_0 & \cdots \cdots \text{弾性的剛性行列 (非荷重時)} \\ \bar{k}_A & \cdots \cdots \text{幾何的 " " (荷重前, 幾何学的変形による)} \end{cases}$$

の2つに分ける。その他、

$$\begin{aligned} m_s \bar{w}_c^s &= \int_s \bar{w} \mu dv = \int_s \mathbf{W} \mu dv \bar{\mathbf{y}}^s \\ \int_s \mathbf{W} \mu dv &= m_s \mathbf{W}_c^s \end{aligned} \quad (41)$$

を用いると(34)式は、(42)式のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \bar{L}^s = & \bar{m}^s \ddot{\mathbf{y}}^s + \bar{g}^s \dot{\mathbf{y}}^s + (\bar{k}_0^s + \bar{k}_A^s + \bar{\kappa}^s + \bar{\alpha}^s) \bar{\mathbf{y}}^s \\ & + \int_s \mathbf{W}^T \bar{C} (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \bar{C}^T \bar{\boldsymbol{\rho}} \mu dv \\ & + \int_s \bar{\mathbf{W}}^T \bar{C} C [\ddot{\mathbf{e}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{e}} + (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{e}] \mu dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + m_s \mathbf{W}_c^{sT} \{ \bar{C}^s C \ddot{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{X}} + \bar{C}^s C (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{R} \} \\ & + \bar{C}^s (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^s + \dot{\boldsymbol{\omega}}^s\dot{\boldsymbol{\omega}}^s) \mathbf{R}_c^s \\ & - \int_s \mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_r) dv + \int_s \mathbf{W}^T \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}' dv \end{aligned} \quad (42)$$

(42)式の中の c も u^i や y^j で表現でき、

$$c = e - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i u^i - \frac{1}{m} \sum_{r=1}^b m_r \{ e^r \}^T \bar{w}_c^r \quad (43)$$

あるいは、行列で表現すると、

$$c = e - C^T \left(\sum_{i=1}^n m_i u^i + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r \mathbf{W}_c^r \bar{\mathbf{y}}^r \right) / m \quad (45)$$

(45)式を(42)式へ代入することで最終的に、(46)式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{L}^s = & \bar{m}^s \ddot{\mathbf{y}}^s - m_s \mathbf{W}_c^{sT} \bar{C}^{sT} \left(\sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r \mathbf{W}_c^r \ddot{\mathbf{y}}^r + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{u}^i \right) / m \\ & + \bar{g}^s \dot{\mathbf{y}}^s - 2m_s \mathbf{W}_c^{sT} \bar{C}^{sT} \dot{\boldsymbol{\omega}}^a \left(\sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r \mathbf{W}_c^r \dot{\mathbf{y}}^r \right. \\ & + \sum_{i=1}^n m_i \dot{u}^i \Big) / m + (\bar{k}_0^s + \bar{k}_A^s + \bar{\kappa}^s + \bar{\alpha}^s) \bar{\mathbf{y}}^s \\ & - m_s \mathbf{W}_c^{sT} \bar{C}^{sT} (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \cdot \left(\sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r \mathbf{W}_c^r \bar{\mathbf{y}}^r \right. \\ & + \sum_{i=1}^n m_i u^i \Big) / m + \int_s \mathbf{W}^T \bar{C} (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \bar{C}^T \bar{\boldsymbol{\rho}} \mu dv \\ & + m_s \mathbf{W}_c^{sT} \{ \bar{C}^s C [\ddot{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{X}} + (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{R}] \\ & + \bar{C}^s (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \mathbf{R}_c^s \} \\ & - \int_s \mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{G}} - \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_r) dv + \int_s \mathbf{W}^T \mathbf{D}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}' dv \\ & + m_s \mathbf{W}_c^{sT} \bar{C}^s C [\ddot{\mathbf{e}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{e}} + (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (46)$$

(3) ノード物体の運動方程式

次に各節点において考えているノード物体の運動方程式を導く。まず、並進運動は、

$$\mathbf{F}^j = m_j \mathbf{A}^j \quad (47)$$

ここで

$$\mathbf{A}^j = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{X} + \mathbf{C} + \mathbf{R} + \mathbf{r}^j + \mathbf{u}^j) \quad (48)$$

これより、(45)式を用いると(47)式は、

$$\mathbf{F}^j = \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{F}^j = \{\mathbf{a}\}^T m_j \{ C \ddot{\boldsymbol{\theta}} \dot{\mathbf{X}} + C [\ddot{\mathbf{e}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{e}} + \ddot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e} + \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e} + \mathbf{R})] + (\ddot{\boldsymbol{\omega}}^a + \dot{\boldsymbol{\omega}}^a\dot{\boldsymbol{\omega}}^a) \mathbf{r}^j + \ddot{u}^j \}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{i=1}^n m_i \ddot{u}_i + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \ddot{y}^r \right) / m \\
& + 2\tilde{\omega}^a [\dot{u}^j - \left(\sum_{i=1}^n m^i \dot{u}^i + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \dot{y}^r \right) / m] \\
& + (\tilde{\omega}^a + \tilde{\omega}^a \tilde{\omega}^a) [u^j - \left(\sum_{i=1}^n m^i u^i \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \bar{y}^r \right) / m] \} \quad (50)
\end{aligned}$$

ノード物体に加わる力 F^j は,

$$F^j = f^j + \sum_{s \in \epsilon_j} F^{sj} = f^j - \sum_{s \in \epsilon_j} F^{js} \quad (51)$$

と表現できるので、結局、(53)式が得られる。

$$\begin{aligned}
f^j - \sum_{s \in \epsilon_j} \bar{C}^{sT} \bar{F}^{js} = m^j \{ & c\theta \ddot{X} + c[\ddot{e} + 2\tilde{\omega}^e \\
& + (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \tilde{\omega})(e + R)] + (\tilde{\omega}^a + \tilde{\omega}^a \tilde{\omega}^a) r^j \\
& + \dot{u}^j - \left(\sum_{i=1}^n m^i \dot{u}^i + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \dot{y}^r \right) / m \\
& + 2\tilde{\omega}^a [\dot{u}^j - \left(\sum_{i=1}^n m^i \dot{u}^i + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \dot{y}^r \right) / m] \\
& + (\tilde{\omega}^a + \tilde{\omega}^a \tilde{\omega}^a) [u^j - \left(\sum_{i=1}^n m^i u^i \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^b \bar{C}^{rT} m_r W_c^r \bar{y}^r \right) / m] \} \\
& j=1, \dots, n \quad (53)
\end{aligned}$$

一方、回転運動は、

$$T^j = \dot{H}^j = I^j \cdot \dot{\omega}^j + \dot{I}^j \cdot \omega^j = I^j \cdot \dot{\omega}^j + \omega^j \times I^j \cdot \omega^j \quad (55)$$

であるが、左辺は、

$$\begin{aligned}
T^j = \{a\}^T T^j = \{a\}^T \dot{t}^j + \sum_{s \in \delta_j} T^{sj} = \{a\}^T \dot{t}^j \\
- \sum_{s \in \delta_j} T^{js} = \{a\}^T [\dot{t}^j - \sum_{s \in \delta_j} \bar{C}^{sT} \bar{T}^{js}] \quad (61)
\end{aligned}$$

右辺も最終的には(60)式のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{H}^j = I^j \dot{\omega}^a + \tilde{\omega}^a I^j \omega^a + I^j \dot{\beta}^j + [\tilde{\omega}^a I^j - (I^j \omega^a) \sim + I^j \tilde{\omega}^a] \dot{\beta}^j \\
+ [I^j \tilde{\omega}^a - (I^j \dot{\omega}^a) \sim + \tilde{\omega}^a I^j \tilde{\omega}^a - \tilde{\omega}^a (I^j \omega^a) \sim] \beta^j \quad (60)
\end{aligned}$$

(60), (61)式より、回転についての方程式は、

$$\begin{aligned}
\dot{t}^j - \sum_{s \in \delta_j} \bar{C}^{sT} \bar{T}^{js} = I^j \dot{\omega}^a + \tilde{\omega}^a I^j \omega^a + I^j \dot{\beta}^j \\
+ [\tilde{\omega}^a I^j - (I^j \omega^a) \sim + I^j \tilde{\omega}^a] \dot{\beta}^j \\
+ [I^j \tilde{\omega}^a - (I^j \dot{\omega}^a) \sim + \tilde{\omega}^a I^j \tilde{\omega}^a \\
- \tilde{\omega}^a (I^j \omega^a) \sim] \beta^j \\
j=1, \dots, n \quad (62)
\end{aligned}$$

以上より、柔軟付属物の運動を記述する方程式が、(46), (53), (62) 式の3つであることがわかる。ここで、新しい変数として、 q ($6n \times 1$) の行列を考え、

$$q = [u'_1, u'_2, u'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \dots, \beta'_n]^T \quad (63)$$

とすれば、(46), (53), (62)式は

$$M' \ddot{q} + D' \dot{q} + G' q + K' q + A' q = L' \quad (64)$$

のようにひとつの式にまとめることができる。この式からモード座標への変換を考えることができるが、本節の主旨からは若干はずれるので、これ以降は省略する。

(4) まとめ及び評価

本論文は、2.3節の Likins⁴⁾ の論文と対をなすもので、本論文が柔軟付属物のモデル化及び動的解析を相当し、2.3節ではレファレンス物体の運動を記述するためのキネマティックな関係式が導かれている。柔軟付属物のモデル化に際しては、概要でも述べた通り、様々な手法があり、モデル化誤差の最も少ない方法を選ぶ必要がある。

参 考 文 献

1 章

- 1) Strunce, R.R., Jr., et al., "Enabling Technologies for Large Precision Space Systems," Large Space Antenna Systems Technology - 1982, NASA CP-2269, 1982.
- 2) Modi, V.J., "Attitude Dynamics of Satellite with Flexible Appendages - A Brief Review," J. Spacecraft and Rockets, Vol. 11, No. 11, 1974, pp. 743-751.
- 3) Likins, P.W., "Analytical Dynamics and Nonrigid Spacecraft Simulation," JPL TR 32-1593, July, 1974.
- 4) Williams, C.J.H., "Dynamics Modeling and Formulation Techniques for Non-Rigid Spacecraft," ESA SP-117, 1977, pp. 53-70.
- 5) Hughes, P.C., "Recent Advances in the Attitude Dynamics of Spacecraft with Flexible Solar Arrays," Canadian Aeronautics and Space Journal, Vol. 19, No. 4, 1973, pp. 165-171.
- 6) Linkins, P.W., "Dynamics and Control of Flexible Spacecraft," JPL TR 32-1329, 1970.

- 7) Kane, T.R., and Levinson, D.A., "Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft, J. Guidance and Control," Vol. 3, No. 2, Mar-Apr, 1980, pp. 99-112.
- 8) 狼, 藤井: 柔軟衛星のモデリング — ハイブリッド・システムとトランケーション, 日本航空宇宙学会誌, 第32巻, 第364号, 1984年5月, 頁263-273.
- 9) Kane, T.R., Dynamics, Holt, Reinhart and Winston Inc., New York, NY., 1968.
- 10) Likins, P.W., and Eleischer, G.E., "Large-Deformation Modal Coordinates for Non-rigid Vehicle Dynamics," JPL TR 32-1565, Nov., 1972.

2章

2.1

- 1) Hooker, W.W. and Margulies, G., "The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite," Journal of Astronautical Sciences, Vol. 12, No. 4, 1965, pp. 123-128.
- 2) Hooker, W.W., "A Set of r Dynamical Attitude Equations for an Arbitrary n-Body Satellite Having r Rotational Degrees of Freedom," AIAA Journal, Vol. 8, No. 7, July 1970, pp. 1205-1207.
- 3) Roberson, R.E. and Wittenburg, J., "A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control," 3rd IFAC paper 46, D, June, 1966, pp. 46D.1-46D.9.
- 4) Boland, P., et al., "Stability Analysis of Interconnected Deformable Bodies in a Topological Tree," AIAA Journal, Vol. 12, No. 8, Aug., 1974, pp. 1025-1030.
- 5) Likins, P.W., "Dynamic Analysis of a System of Hinge-Connected Rigid Bodies with Non-rigid Appendages," JPL Technical Report 32-1576, Feb. 1, 1974.

2.2

- 1) Boland, P., et al., "Stability Analysis of Interconnected Deformable Bodies in a Topological Tree," AIAA Journal, Vol. 12, No. 8, Aug., 1974, pp. 1025-1030.
- 2) Boland, P., et al., "Stability Analysis of

Interconnected Deformable Bodies with Closed-Loop Configuration," AIAA Journal, Vol. 13, Jul., 1975, pp. 864-867.

- 3) Roberson, R.E. and Wittenburg, J., "A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control," Proceedings of the 3rd International Congress of Automatic Control, Butterworth, London, 1967, pp. 46D.1-46D.8.

2.3

- 1) Likins, P.W. "Dynamic Analysis of a System of Hinge-Connected Rigid Bodies with Non-rigid Appendages" JPL Technical Report 32-1576, Feb. 1, 1974.
- 2) Likins, P.W., "Finite Element Appendage Equations for Hybrid Coordinate Dynamic Analysis," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 8, pp. 709-731, 1972. (Also available in expanded form as Technical Report 32-1525, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., Oct. 15, 1971.)
- 3) Hooker, W.W., and Margulies, G., "The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite," *J. Astropaut. Sci.*, Vol. 12, 1965, pp. 123-128.

2.4

- 1) Hooker, W.W., "Equations of Motion for Interconnected Rigid and Elastic Bodies; A Derivation of Angular Momentum," *Celestial Mechanics*, Vol. 11, 1975, pp. 337-359.
- 2) Ho, J.Y.L., "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics," *Journal of Spacecrafts and Rockets*, Vol. 14, Feb., 1977, pp. 102-110.
- 3) Hooker, W.W. and Margulies, G., "The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite," *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 12, No. 4, 1965, pp. 123-128.
- 4) Hooker, W.W., "A Set of r Dynamical Attitude Equations for an Arbitrary n-Body Satellite Having r Rotational Degrees of Freedom," AIAA Journal, Vol. 8, No. 7, July 1970, pp. 1205-1207.

2.5

- 1) Frisch, H.P., "A Vector-Dyadic Development of the Equations of Motion for N-Coupled Flexible Bodies and Point Masses," NASA TN D-8047, 1975.

2.6

- 1) Ho, J.Y.L., "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics, Journal of Spacecrafts and Rockets," Vol. 14, Feb., 1977, pp. 102-110.
- 2) Ho, J.Y.L., Herber, D.R., "Development of Dynamics and Control Simulation of Large Flexible Space Systems," AIAA Guidance and Control Conference, San Diego, CA., No. 82-1564, 1982, pp. 367-378.
- 3) Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, Apr. 1965.

2.7

- 1) Bodley, C.S., et al., "A Digital Computer Program for the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure (DISCOS) Vol. 1," NASA Technical Paper 1219, 1978.

2.8

- 1) Jerkovsky, W., "The Structure of Multibody Dynamics Equations," AIAA J. Guidance and Control, Vol. 1, No. 3, May-June, 1978, pp. 173-182.

2.9

- 1) Sunada, W.H., Dubowsky, S., "On the Dynamic Analysis and Behavior of Industrial Robotic Manipulators with Elastic Members, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design," Vol. 105, March, 1983, pp. 42-51.
- 2) Sunada, W.H., Dubowsky, S., "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-Planar Linkage Systems," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, No. 3, July, 1981, pp. 643-651.
- 3) Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA

Journal Vol. 3, No. 4, April, 1965, pp. 678-685.

2.10

- 1) Kane, T.R., Likins, P.W., Levinson, D.A., Spacecraft Dynamics, McGraw-Hill, 1983.
- 2) Kane, T.R., Levinson, D.A., "Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft," Journal of Guidance and Control, Vol. 3, No. 2, 1980, pp. 99-112.
- 3) Singh, R.P., Likins, P.W., "Manipulator Interactive Design with Interconnected Flexible Elements," Proc. American Control Conference, San Francisco, 1983.

2.11

- 1) Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA Journal, Vol. 3, No. 4, April, 1965, pp. 678-685.
- 2) Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, 1965, pp. 380.
- 3) Likins, P.W., "Finite Element Appendage Equations for Hybrid Coordinate Dynamic Analysis," JPL TR 32-1525, 1971.
- 4) Likins, P.W., "Dynamic Analysis of a System of Hinge-Connected Rigid Bodies With Non-rigid Appendages," JPL TR 32-1576.
- 5) Likins, P.W., and Wirsching, P.H., "Use of Synthetic Modes in Hybrid Coordinate Dynamic Analysis," AIAA J., Vol. 6, 1968, pp. 1867-1872.
- 6) Likins, P.W., and Gale, A.H., "Analysis of Interactions Between Attitude Control Systems and Flexible Appendages," Proc. 19th Int. Astronaut. Congress, Vol. 2, Pergamon Press, 1970, pp. 67-90.
- 7) Likins, P.W., *Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles*, Technical Report 32-1329, Rev. 1. Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., Jan. 15, 1970.
- 8) Meirovitch, L., and Nelson, H.D., "On the High-Spin Motion of a Satellite Containing Elastic Parts," *J. Spacecraft Rockets*, Vol. 3, 1966, pp. 1597-1602.
- 9) Vigneron, F., "Stability of a Freely Spinning

- Satellite of Crossed Dipole Configuration,” *C.A.S.I. Trans.*, Vol. 3, No. 1, Mar. 1970, pp. 8–19.
- 10) Rakowsky, J.F., and Renard, M.L., “A Study of the Nutational Behavior of a Flexible, Spinning Satellite Using Natural Frequencies and Modes of the Rotating Structure,” AIAA Paper 70–1046, presented at AAS/AIAA Astro-dynamics Conference, Santa Barbara, Calif., Aug. 19–21, 1970.