

高レイノルズ数流れのための有限要素法

姫野 龍太郎* 桑原 邦郎**

A Finite Element Method for High Reynolds Number Flow

by

Ryutaro HIMENO and Kunio KUWAHARA

ABSTRACT

A new finite element method has been developed, which has a higher-order accuracy with fourth order artificial dissipation. Flows in a two-dimensional duct and in a back-step duct were calculated. It was found that this scheme works well at high Reynolds numbers.

1. まえがき

有限要素法は構造解析の分野で非常な成功を収めているが、流体现象の解析、特に高レイノルズ数の流れの計算ではあまりはかばかしくない。一方、差分法では十分高いレイノルズ数まで計算され、一般座標の導入で形状に対する自由度は飛躍的に高くなっている。しかし、差分法では計算領域のトポロジーが変化する場合、その問題毎にプログラムが必要となる。この点に関しては、有限要素法ははっきりとしたメリットを持っている。ここでは、高レイノルズ数の計算が可能である上流差分を、従来の上流有限要素法とは異なる方法で取り入れている。

2. 計算手法

2.1 差分法での上流差分

上流差分の考え方は、一般的には流れは上流側の影響を強く受けるため、対流項の計算時に次式のように差分の取り方を変えるものとして説明される。

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} v_i(v_i - v_{i-1})/\Delta x & (v_i > 0) \\ v_i(v_{i+1} - v_i)/\Delta x & (v_i < 0) \end{cases} \quad (1)$$

しかし、これは良く知られているように、

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i &= v_i(v_{i+1} - v_{i-1})/(2\Delta x) \\ &\quad - |v_i|(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})/(2\Delta x) \end{aligned} \quad (2)$$

と、まとめて書くことができる。これをテーラー展開すると、次式のようにになっていることがわかる。

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = v \frac{\partial v}{\partial x} - |v|\Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} / 2 + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

つまり、対流項の中心差分近似の他に、差分化による誤差が人工的な粘性として付け加わったものとみなすことができる。レイノルズ数が高くなる、つまり粘性効果が小さくなると、数値的な不安定性が起ころが、この不安定性を人工粘性項が抑える働きをしている。この1次精度の上流差分では、この人工粘性項と全く同じ形をしているため、高レイノルズ数の計算は格子点が十分でなければ、あまり信頼できないものになってしまう。河村らは3次精度の上流差分を提案し、これにより初めて円柱の抵抗係数がレイノルズ数によって急減する現象を数値計算で捉えている¹⁾。この3次精度の上流差分をテーラー展開すると、次のようになる。

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = v_i(-v_{i+2} + 8(v_{i+1} - v_{i-1}))$$

* 日産自動車株式会社

** 宇宙科学研究所

$$+v_{i-2})/12 \Delta x + |v_i|(v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2})/4 \Delta x \quad (4)$$

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = v \frac{\partial v}{\partial x} + |v| \Delta x^3 \frac{\partial v}{\partial x^4} / 4 + O(\Delta x^4) \quad (5)$$

これは、1次精度の上流差分と異なり、人工粘性項は分子粘性とは区別できる4階微分の形であることがわかる。3次精度の上流差分が高レイノルズ数で非常に有効であるのは、差分の近似の精度が上がり、4階微分の人工粘性項が誤差の主要項になって、計算の安定化をしていることにある。

2.2 有限要素スキーム

近年行なわれている上流有限要素スキームは、要素内の積分をするときに上流側の重みを強くする方法をとっているものが主である。前項で説明したように、上流差分は中心差分に人工粘性項を付け加えたものとみなすと、次のような高レイノルズ数の流れのための有限要素スキームが考えられる。

流速と圧力を3次の試行関数で近似して非圧縮性、非定常のナビエ・ストークス方程式を離散化する。このとき、数値的な不安定性を抑えるための4階微分の微係数をもった人工粘性を付け加える。ここで、時間方向の離散化は差分法で行ない、空間の離散化はガラーキン法で、12節点のアイソパラメトリック要素を用いる。非圧縮性の条件は圧力のポアソン方程式の中に修正項として入れるMAC法を使う。

2.3 離散式

基礎方程式は次の2式である。

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \nabla^2 \mathbf{v} / R_e \quad (7)$$

ナビエ・ストークス方程式の両辺の発散をとって導かれる圧力のポアソン方程式は、次式のようになる。

$$\nabla^2 p = -\operatorname{div}(\mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v}) + R \quad (8)$$

where

$$R = -D_t + \nabla^2 D / R_e, \quad D = \operatorname{div} \mathbf{v}$$

(7), (8)式をガラーキン法で定式化すると、

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{M}^t \mathbf{U}_e \\ v &= \mathbf{M}^t \mathbf{V}_e \\ p &= \mathbf{M}^t \mathbf{P}_e \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{M} u_t dx dy + \int \mathbf{M}(uu_x + vu) dx dy \\ & + \int \mathbf{M} p_x dx dy - \frac{1}{R_e} \int \mathbf{M}(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0 \\ & \int \mathbf{M} v_t dx dy + \int \mathbf{M}(uv_x + vv_y) dx dy \\ & + \int \mathbf{M} p_y dx dy - \frac{1}{R_e} \int \mathbf{M}(v_{xx} + v_{yy}) dx dy = 0 \\ & \frac{1}{R_e} \int \mathbf{M}(p_{xx} + p_{yy}) dx dy + \int \mathbf{M}((u_x)^2 + (v_y)^2 \\ & + u_y v_y) dx dy - \frac{1}{\Delta t} \int \mathbf{M}(u_x + v_y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これから、離散化された式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_j C_{ij} U_{ej}^{n+1} &= \sum_j C_{ij} U_{ej}^n \\ & - \Delta t \left(\sum_j \sum_k (E_{ijk}^x U_{ej}^n U_{ek}^n \right. \\ & \left. + E_{ijk}^y U_{ej}^n V_{ek}^n) + \sum_j H_{ij}^x P_{ej}^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_e} \sum_j K_{ij} U_{ej}^n - \nu_a \sum_j A_{ij} U_{ej}^n \right) \\ \sum_j C_{ij} V_{ej}^{n+1} &= \sum_j C_{ij} V_{ej}^n \\ & - \Delta t \left(\sum_j \sum_k (E_{ijk}^x V_{ej}^n U_{ek}^n \right. \\ & \left. + E_{ijk}^y V_{ej}^n V_{ek}^n) + \sum_j H_{ij}^y P_{ej}^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_e} \sum_j K_{ij} V_{ej}^n - \nu_a \sum_j A_{ij} V_{ej}^n \right) \\ \sum_j K_{ij} P_{ej}^{n+1} &= \sum_j \sum_k (R_{ijk}^x U_{ej}^n U_{ek}^n \\ & + R_{ijk}^y V_{ej}^n V_{ek}^n) + \sum_j \sum_k (S_{ijk} U_{ej}^n V_{ek}^n) \\ & - \frac{1}{\Delta t} \sum_j (H_{ij}^x U_{ej}^n + H_{ij}^y V_{ej}^n) \end{aligned}$$

$$\text{where } C_{ij} = \int_e M_i M_j dx dy$$

$$E_{ijk}^x = \int_e M_i M_{xj} M_k dx dy$$

$$E_{ijk}^y = \int_e M_i M_{yj} M_k dx dy$$

$$H_{ij}^x = \int_e M_i M_{xj} dx dy$$

$$H_{ij}^y = \int_e M_i M_{yj} dx dy$$

$$K_{ij} = \int_e (M_{xi} M_{xj} + M_{yi} M_{yj}) dx dy$$

$$R_{ijk}^x = \int_e M_i M_{xj} M_{xk} dx dy$$

$$R_{ijk}^y = \int_e M_i M_{yj} M_{yk} dx dy$$

$$S_{ijk} = \int_e M_i M_{yi} M_{xk} dx dy$$

$$A_{ijk} = \int_e (M_{\xi i} (M_{\xi \xi \xi j} + M_{\xi \eta \eta j}) + M_{\eta i} (M_{\xi \xi \eta j} + M_{\eta \eta \eta j})) d\xi d\eta$$

3. 計算結果

3.1 ダクト内の流れ

図1にレイノルズ数1000のときの流速分布を示す。徐々にポアズイユ流に近づいてゆくのがわかる。

3.2 バックステップを過ぎる流れ

図2から図4にバックステップを過ぎる $R_e=100$ -2000の流れを計算した結果を示す。粗い計算であるが、図5の差分法による結果との定性的一致は悪くない。

4. 結論

高いレイノルズ数の流れにおいて、ナビエ・ストークス方程式を有限要素法で解くために4階微分

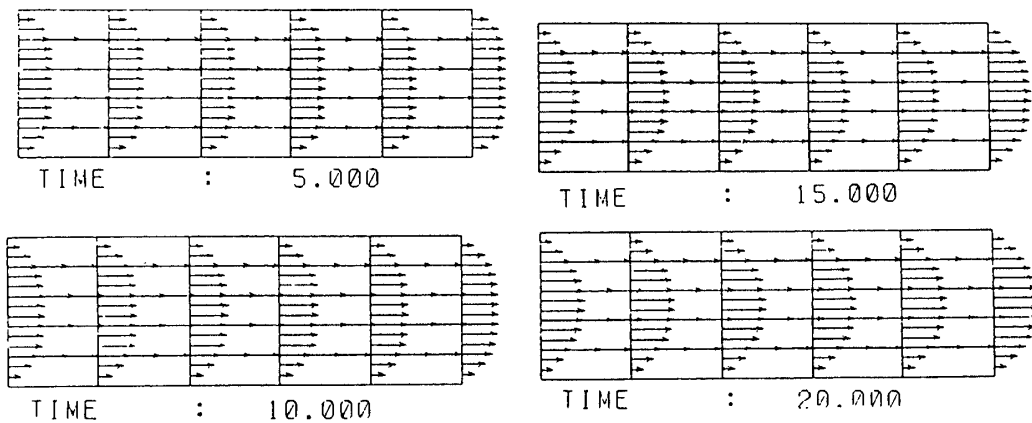


図1 ダクト内の流速分布

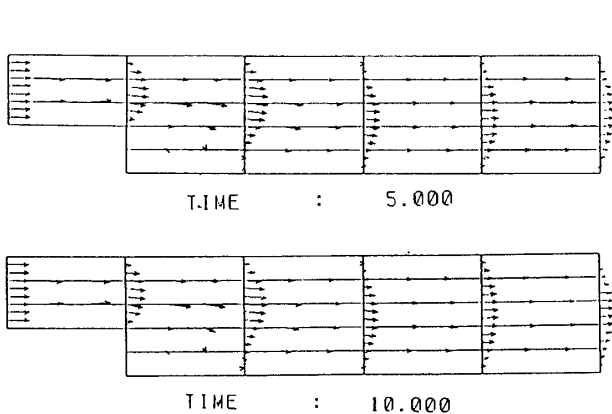


図2 バックステップを過ぎる流れ ($R_e=100$)

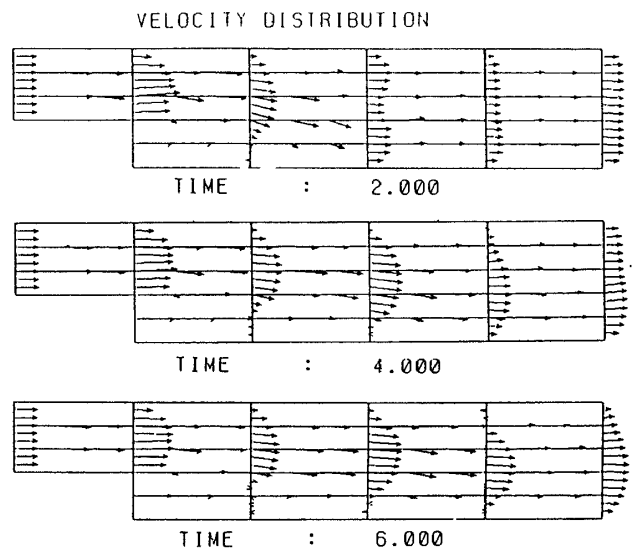


図3 バックステップを過ぎる流れ ($R_e=1000$)

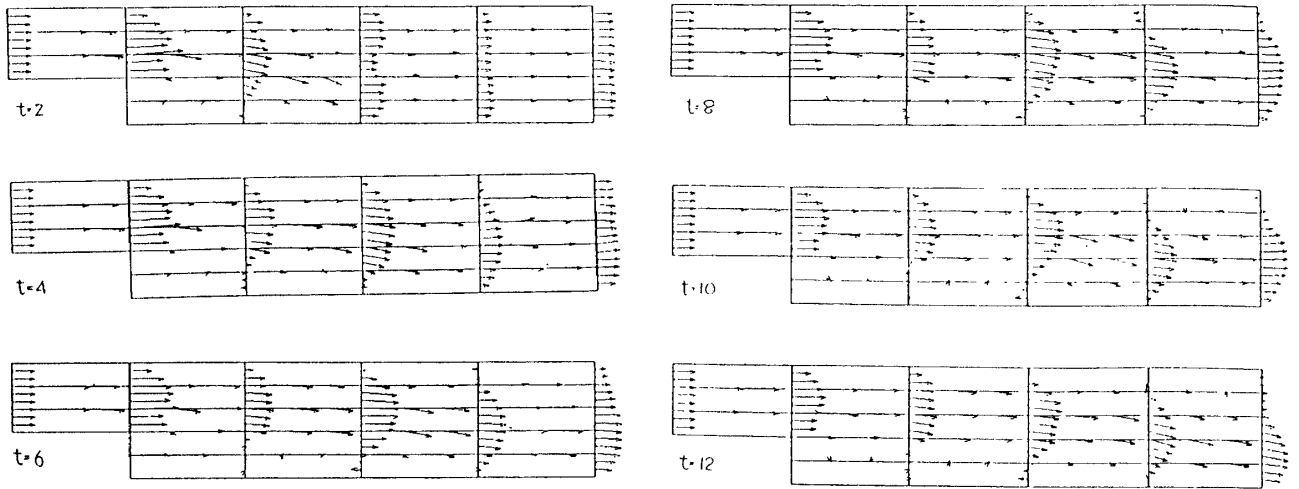


図 4 バックステップを過ぎる流れ ($Re=2000$)

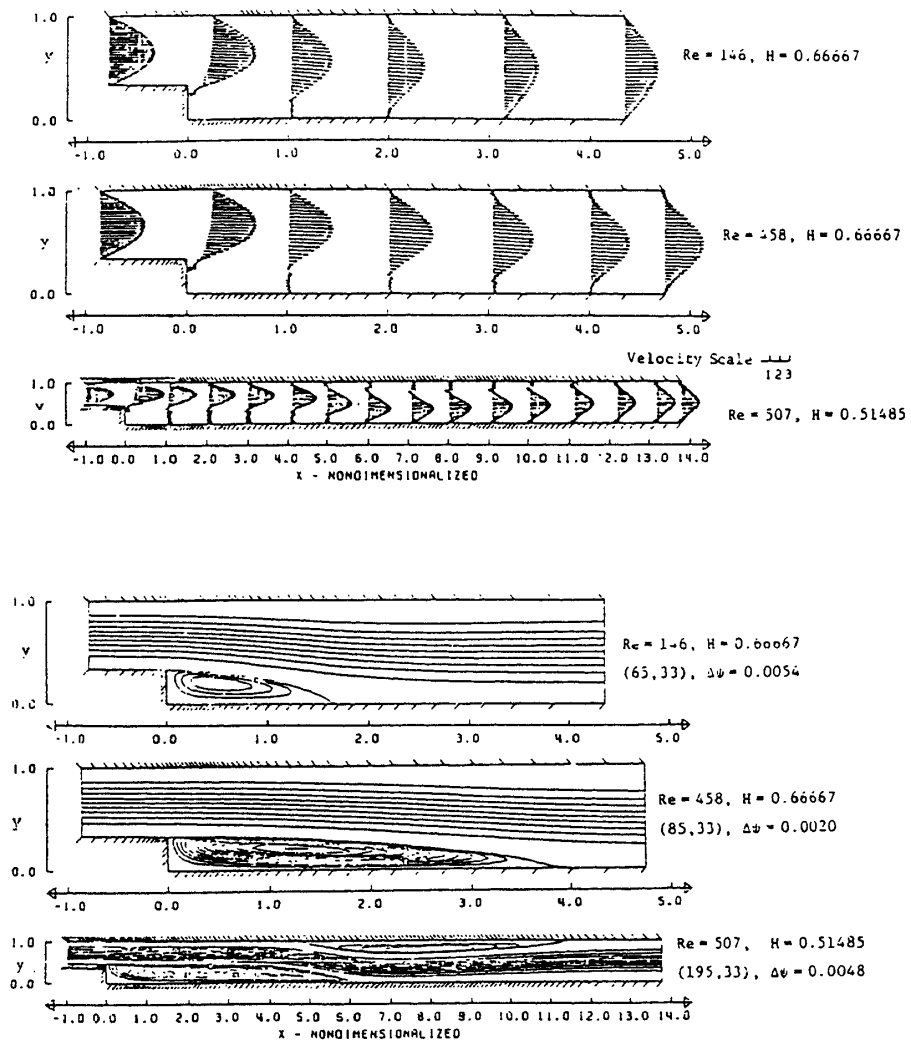


図 5 差分法による計算結果

の人工粘性項を用いる新しい手法を開発した。この方法は高いレイノルズ数でも安定に働くが、差分法に比べ計算時間が約10倍ほどかかるということが明らかになった。

参 考 文 献

- 1) T. Kawamura and K. Kuwahara: "Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface roughness", AIAA Paper 84-0340.
- 2) T. Kawamura and K. Kuwahara: "Direct Simulation of a Turbulent Inner Flow by Finite Difference Method", AIAA Paper 84-0376.
- 3) R. Himeno, S. Shirayama, K. Kamo and K. Kuwahara: "Computational Study of Three-Dimensional Wake Structure", AIAA Paper 85-1617.
- 4) S.Y. Tuann and M.D. Olson: "A Transient Finite Element Solution Method for the Navier-Stokes Equations.", Computers and Fluids Vol.6, pp. 141-152.
- 5) G.A. Osswald, K.N. Ghia and U. Ghia: "Study of Incompressible Separated flow Using an Implicit Time-Dependent Technique.", AIAA Paper 83-1894CP.

