

パネル法による超音速計算空力プログラムの開発

丸山 祐一* 秋下 貞夫* 中村 昭人**

**Development of Supersonic Computational Aerodynamic Program
Using Panel Method**

by

Yuichi MARUYAMA, Sadao AKISHITA and Akihito NAKAMURA

ABSTRACT

An aerodynamic program for steady supersonic linearized potential flow using a higher order panel method has been developed. Boundary surface is divided into planar triangular panels on each of which a linearly varying doublet and a constant or linearly varying source are distributed. Distributions of source and doublet on the panel assemblies of the panels can be determined by their strengths at nodal points, which are placed at the vertices of the panels for linear distribution or on each panel for constant distribution. Since Morino's boundary condition is employed, the source strengths at the nodal points are determined explicitly. The doublet strengths at the nodal points are so determined that the perturbation velocity potential vanishes at any point inside the panel assembly. For this purpose, control points, the total number of which is equal to that of the nodal points of the doublet, are distributed in the inside domain of the panel assembly. The positions of the control points can be chosen practically arbitrarily. This simplifies the evaluation of influence coefficients, which represent the influence of source or doublet strengths upon the potential at the control points. The strength of the doublet at each nodal point is determined by setting the potential at control points to zero.

From the test run for flows around cones, it is shown that constant source strength on each panel is preferable to that varying linearly when linear distribution is used for the doublet. The arbitrariness of the control points' positions is also assured by the simulations for the same type of flows. The results for flows around cones and spindle show good agreement with analytical solutions unless the perturbation is too large to satisfy the condition of linearized flow. Moreover, the fact that the trend of our results is just the same as that of the PAN AIR pilot code suggests equivalent computations are done by both programs, though the former's scheme is much simpler than the latter's.

* 三菱電機株式会社

** 三菱スペースソフトウェア株式会社

1. まえがき

パネル法を超音速流に適用する場合、基礎方程式が双曲形となるため、定式化の際、非圧縮流や亜音速流とは違った注意が必要となる。これに関し、PAN AIR (Boeing社)の開発過程で次のような事実が明らかとなった¹⁾

- (1) パネルの継目において、二重湧き出しの面密度の連続性、及びパネル自身の連結性が保証されねばならない。
- (2) パネル面上には、Greenの公式に従って、湧き出し、二重湧き出しの双方を分布させねばならない。

ここで(1)は、継目から下流方向に出る特性面を横切った速度ポテンシャルの飛びを防ぐため、(2)は計算領域外(物体内部)への仮想的なMach波の伝播を防ぐために要請される。

我々は、この二つの発見を出発点として、パネル法の概念の根本に立ち帰ることにより、従来手法よりも簡単なスキームを用いたプログラム MARCAP (Mitsubishi's Arbitrary Configuration Aerodynamic Program)の開発に成功した。以下でこのプログラムの特徴及び概略を述べ、計算結果を示す。

2. 本プログラムの特徴

2.1 パネルと節点との区別の明確化

前記(1)の要請により、超音速パネル法においては、各パネル上で二重湧き出しの分布密度が整関数に従って変化する、いわゆる高次パネル法を用いる必要性が生じる。互いに連結したパネルの集合体面上において、湧き出しあるいは二重湧き出しが整関数に従って分布する場合、面上の有限個の点での値が決まれば、集合体面上での分布は一意的に定まる。これらの点を節点(nodal points)と名づけることにする。節点総数はパネル総数と一致する必要はない。ところが従来のパネル法は0次分布(各パネル上で分布密度一定)が主流であったため、結果的に両者の総数が一致し、従って両者の区別が明確でなかった。例えばPAN AIRにおいては、湧き出し(1次分布)・二重湧き出し(2次分布)ともパネルと節点の総数を無理に一致させたため、分布関数の決定

過程において、そのままでは未知数と方程式の数が一致せず、最小二乗法を用いたり遠くのパネル上の節点での値を動員したりして、非常に複雑なスキームとなっている。

本プログラムにおいては、二重湧き出しに1次分布を用い、湧き出しは0次分布と1次分布の両ケースを試みた。パネル形状は三角形とし、1次分布のケースでは各パネルの共通頂点上に節点を設けた。従って各パネルにおいて分布関数に現われる3つの未知係数は、そのパネルに接する3節点上での値により一意的に定まる。またパネルの継目での分布密度は、継目の両端の節点上での値から一意的に定まるので、パネル間での連続性が保証される。同時にパネルの連結性も保証され、平均面の定義やサブパネル分割の必要がない(図1)。また0次分布の場合には、パネル自体を一つの節点と考えることにする。

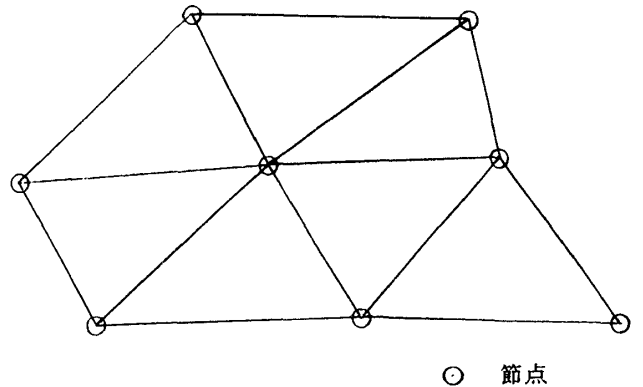


図1 パネル分割法及び節点設定法

2.2 検査点とパネル・節点との区別の明確化

超音速流におけるPrandtl-Glauert方程式を、Greenの公式を用いて積分形に変換すれば、

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_w} \mu \frac{\partial}{\partial n_c} \left(\frac{1}{R} \right) dS - \frac{1}{2\pi} \int_{S_w} \frac{\sigma}{R} dS \quad (1)$$

となる。ここで

$$\mu = \phi^+ \quad (\text{二重湧き出しの面密度}) \quad (2)$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_c} \right)^+ \quad (\text{湧き出しの面密度}) \quad (3)$$

$$R = \sqrt{(x_p - x_q)^2 - B^2(y_p - y_q)^2 - B^2(z_p - z_q)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_c} = -B^2 n_x \frac{\partial}{\partial x_q} + n_y \frac{\partial}{\partial y_q} + n_z \frac{\partial}{\partial z_q}$$

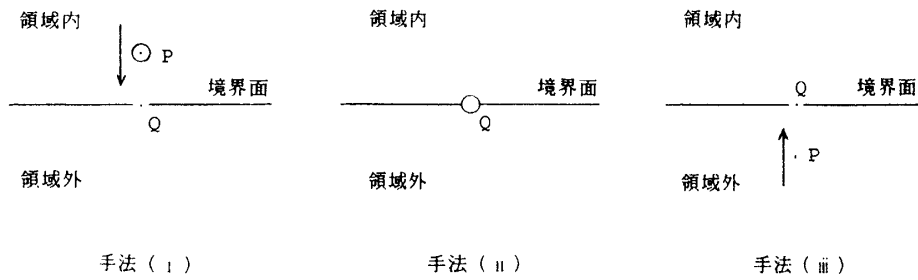


図2 検査点設定方法

$$B^2 = M^2 - 1$$

S_w : パネル集合体面 S のうち P の依存領域部分

$\int^* dS$: 面積分の有限部分

Q : S 上の点

M : 主流マッハ数

n_x, n_y, n_z : S の法線ベクトルの各成分

添字⁺: 計算領域内(流体内部)から S に近づけた極限での値

である。ただし x 軸を主流の方向に取った。

ここで(1)式において、擾乱速度ポテンシャル ϕ の計算される点 P を検査点 (control points) と名づけることにする。検査点は、パネルや節点とは別の概念である。これらの区別を明確にした上で従来手法を再検討すると、検査点の設定方法としては次の3通りの手法があることが判る(図2)。

- (i) 検査点を計算領域内から S 上の節点に近づけた極限を取る。
- (ii) 検査点を S 上の節点と一致させる。(Cauchyの主値積分)
- (iii) 検査点を計算領域外から S 上の節点に近づけた極限を取る。

それぞれの手法において、(1)式を離散化すると、

手法(i), (ii)

$$\sum_{j=1}^{j \max} (\delta_{ij} - a_{ij}) \mu_j - \sum_{j'=1}^{j \max'} b_{ij'} \sigma_{j'} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, i \max) \quad (4a)$$

手法(iii)

$$\sum_{j=1}^{j \max} a_{ij} \mu_j + \sum_{j'=1}^{j \max'} b_{ij'} \sigma_{j'} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, i \max) \quad (4b)$$

となる。ここで i は検査点番号, j, j' はそれぞれ

二重湧き出し, 湧き出しの節点番号, $a_{ij}, b_{ij'}$ は影響係数である。

手法(i), (ii)において、検査点を節点と一致させるか、節点に近づけた極限を取るのには、(4a)式の導出に(2)式を用いる必要があるからである。即ち、もし検査点と節点とが離れていれば、(1)式の左辺は μ_j とは独立な値となり、(4a)式が μ_j について閉じなくなるからである。ところが手法(iii)では左辺は常に0である。従って、検査点を節点に近づけた極限を取らなくても、方程式は閉じている。即ち、検査点を節点から離れた位置に設定することもできる。このことは以下の様な利点をもたらす。

検査点がパネルの境界線上あるいはその延長上にある場合、影響係数を表わす積分は特異性を持ち、特別な表式による計算が必要となる。また検査点がパネル面上あるいはその延長上にある時にも微妙な判断機能が要求される。ところが検査点位置の任意性が許されると、これらのケースは容易に回避でき、プログラムが非常に簡単なものになる。従来手法においてこのことが提案できなかったのは、検査点と節点、検査点とパネルの区別が明確でなかったからである。

3. 計算スキーム

境界条件の設定は Morino の方法²⁾ によった。従ってパネル集合体面 S は、物体形状を近似する形に作られる(一般にはこのことは必ずしも必要とされない)。節点上での湧き出し面密度 σ が陽に定まり、 S で囲まれた領域(計算領域外)での擾乱速度ポテンシャル ϕ を近似的に0にするような、各節点上での二重湧き出し面密度 μ を求めることになる。そのため面内部の空間に、 μ の節点と同数の検査点

を分布させる。各検査点上での ϕ が、各節点上での σ 、 μ 及び影響係数の関数として表わされ、これらの ϕ がすべて 0 となるような各節点上での μ が求められる。各パネル上の圧力係数は、その頂点となる 3 節点での μ から計算される。

4. 計算結果

4.1 円錐まわりの流れ

図 3 に計算に用いた円錐形の一例を示す。まず迎角 $\alpha=0^\circ$ 、半頂角 $\delta=10^\circ$ 、主流マッハ数 $M=\sqrt{2}$ として、湧き出し σ に 0 次分布と 1 次分布を用いた場合の計算結果（円錐表面上の圧力分布）を図 4 に示す。ただし 1 次分布の場合、先端部の σ は 0 とした。理論的には圧力係数 C_p は位置によらず一定となるはずであり、 σ に 0 次分布を用いた方が良い結果を示している。従って円錐まわりの流れの計算においては、 σ には 0 次分布を用いることにする。

次に上述のケースにおいて、検査点位置を円錐内部で 3 通りに変化させた結果（円錐表面上の圧力分布）を表 1 に示す。ここで検査点位置は、影響係数行列 a_{ij} の行列式が 0 となつてはならないので、それぞれ対応する節点を決めておき、その節点から周囲のパネルを通してその検査点に及ぼす影響が 0 とならないように定めねばならない。従って対応する節点から物体表面に垂直に、物体内部に向かって距離 d だけ移動した位置とした。ここで d は

- ケース 1 : $d = 0.005 l_1$
- ケース 2 : $d = 0.005 l_1$ (先端部)
 $d = 0.2 r$ (その他)

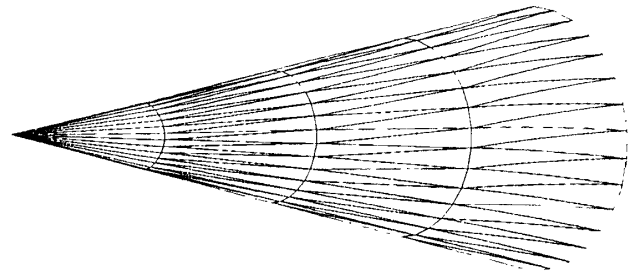


図 3 パネル分割図（円錐）

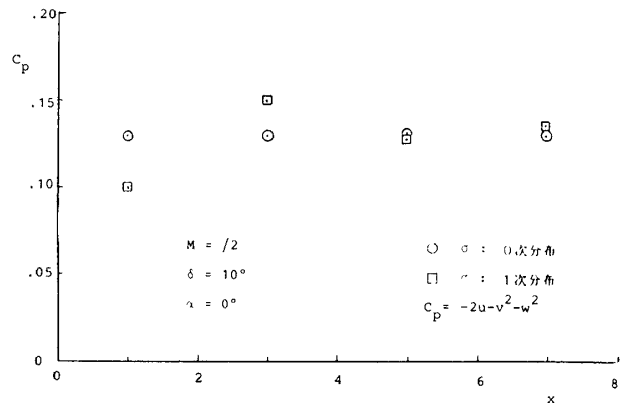


図 4 円錐表面上の圧力分布

- ケース 3 : $d = 0.005 l_1$ (先端部)
 $d = 0.5 r$ (その他)
- l_1 : 上流から一列目のパネル下流側の辺の長さ
- r : 各位置での円錐半径

とした。ケース 1 と 2 はほとんど同じ結果を示す。これは上述のように、検査点位置がパネルから離れていても正しい解が得られることを証明するものである。ところがケース 3 では、3 列目以降のパネルで解が発散する。これは影響係数行列の優対角性が

表 1 円錐表面上の圧力分布

$$(C_p = -2u - (1 - M^2) u^2 - v^2 - w^2)$$

| X | 1.3 | 3.0 | 5.0 | 7.0 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| ケース 1 | 0.1350 | 0.1349 | 0.1349 | 0.1349 |
| ケース 2 | 0.1350 | 0.1350 | 0.1350 | 0.1350 |
| ケース 3 | 0.1350 | 0.1350 | 発散 | 発散 |

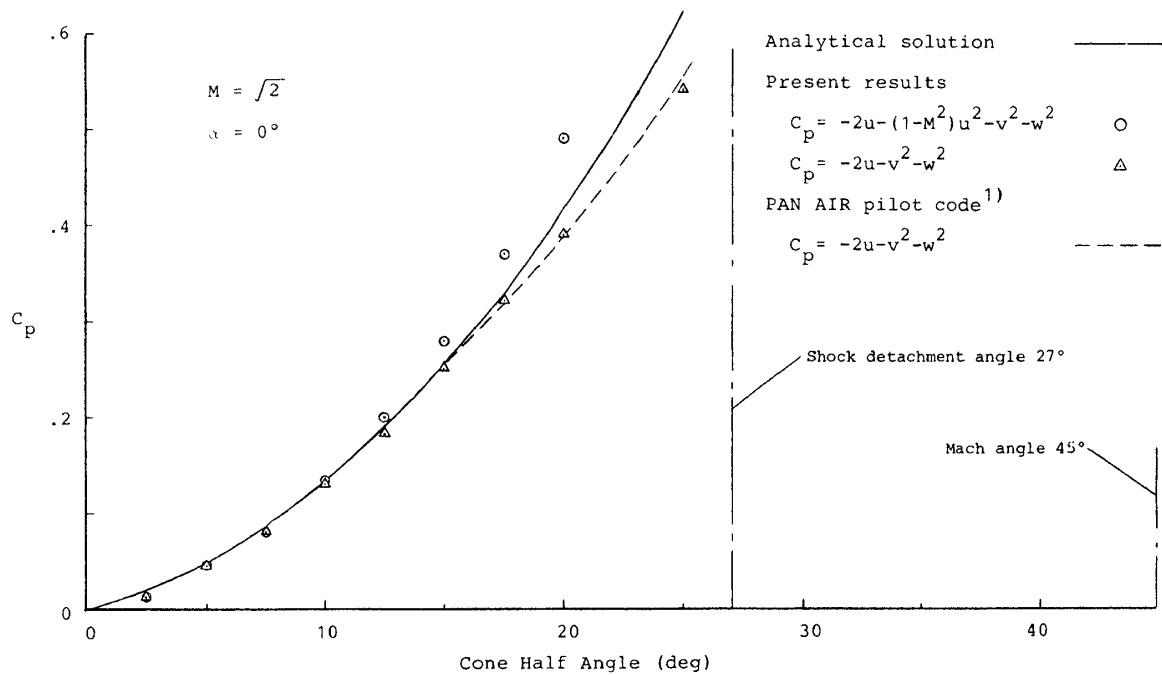


図5 円錐表面上の圧力係数

くずれるため、逆行列計算の過程で計算機の丸め誤差が集積することによって考えられる。従って、検査点の位置はある程度任意に設定できるが、行列 a_{ij} の優対角性がくずれるほど節点から離してはならない。

次に迎角 $\alpha = 0^\circ$ として、半頂角 δ を変化させて計算した結果、主流マッハ数 M を変化させて計算した結果を、解析解³⁾⁻⁶⁾と比較してそれぞれ図5、図6に示す。また $M = 1.5$ 、 $\alpha = 5^\circ$ 、 $\delta = 10^\circ$ とした時の表面圧力の周方向分布を解析解³⁾⁻⁶⁾と比較して図7に示す。圧力係数 C_p は二通りの表式により計算した。主流に対する擾乱があまり大きくない時、即ち定式化に用いた線形化が妥当と考えられる範囲内では、解析解と良く一致する結果が得られている。また表式 $C_p = -2u - v^2 - w^2$ の方が良い値を示す(u 、 v 、 w は擾乱速度の各成分)。以上の結果はPAN AIR pilot codeによる計算結果¹⁾と全く同じ傾向を示しており、両者の計算スキームが大きく異なるにもかかわらず等価な計算をしていると言える。

以上の数値計算において、計算時間は1ケース当たり約43秒(半形状、倍精度計算、IBM4361-5中型計算機)であった。

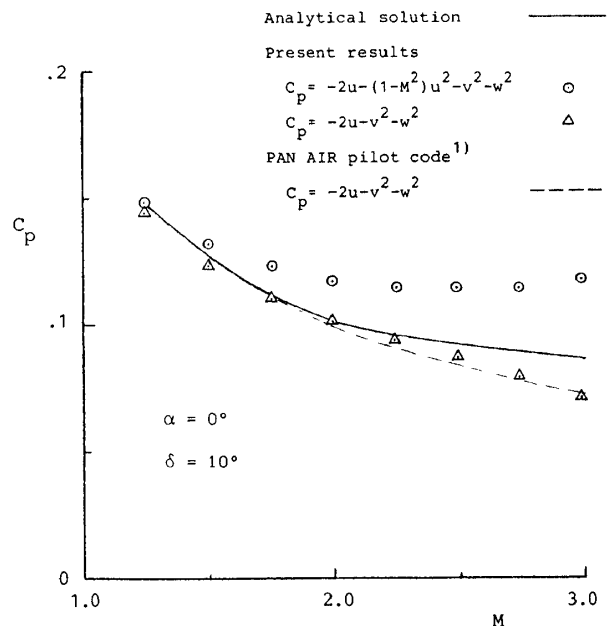


図6 円錐表面上の圧力係数

4.2 紡錘形まわりの流れ

形状が $r = 0.08x^2(1-x)$ で表わされる紡錘形を、迎角 $\alpha = 0^\circ$ で $M = \sqrt{2}$ の流れの中に置いた時の圧力分布を、解析解¹⁾と比較して図8に示す。湧き出し σ には1次分布を用いた。 C_p の表式によらず、解析解と良く一致する結果が得られている。

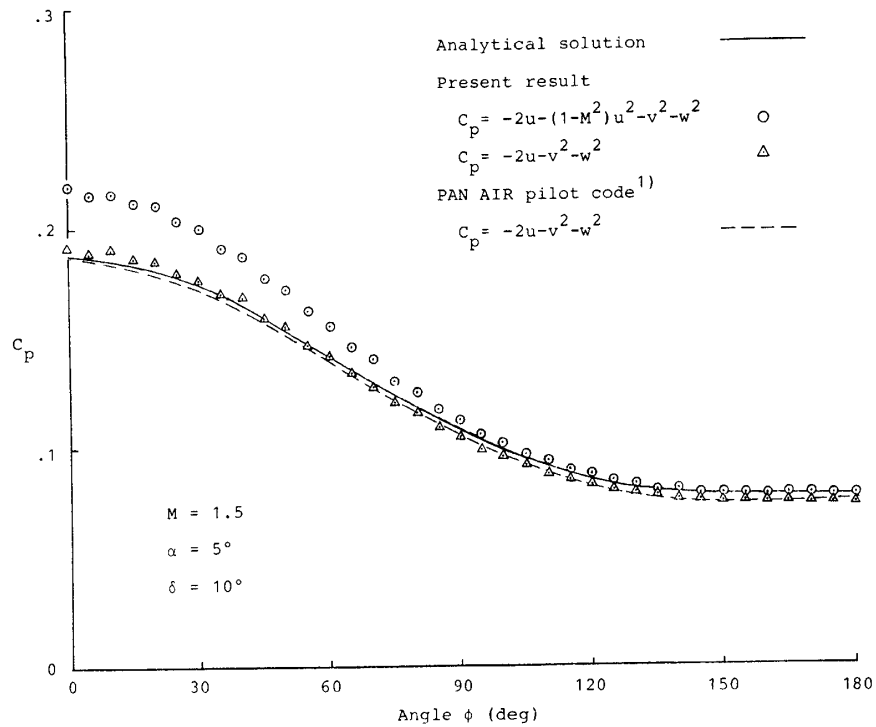


図 7 円錐表面上の圧力分布

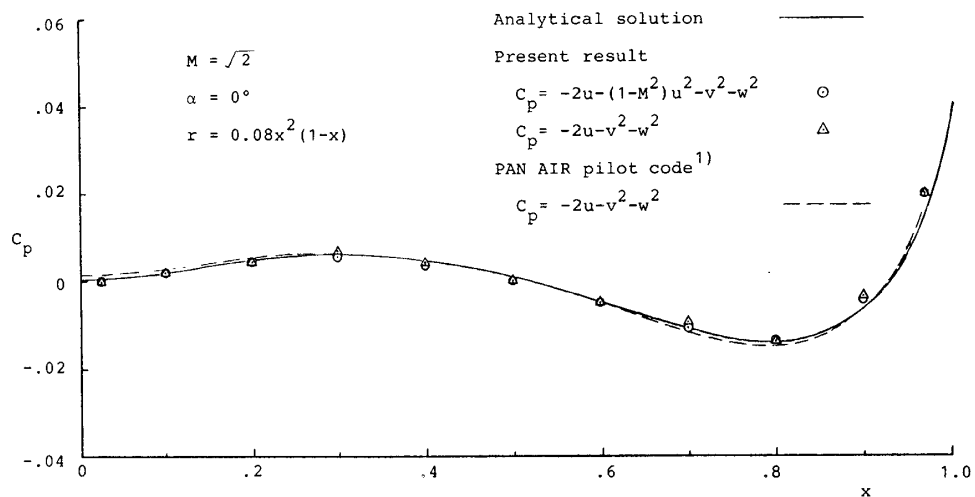


図 8 紡錘上の圧力分布

5. 結 論

パネル法を超音速流に適用する場合に必要となる高次手法において、パネル・節点・検査点の概念の区別を明確化することにより、パネル分割法、分布関数決定法、検査点設定法等の点で、従来手法よりはるかに簡単な計算スキームを提案することができた。計算結果は従来手法と同じ精度で解析解と一致している。また検査点は、影響係数行列に関する制

約を満たす範囲内で、物体内部の任意の位置に設定できることが示された。

参 考 文 献

- 1) Ehlers, F.E., et'al., NASA CR-3062 (1978)
- 2) Morino, L., NASA CR-2464 (1974)
- 3) Kopal, Z., Tech. Report, No.1, M.I.T. (1947)
- 4) Kopal, Z., Tech. Report, No.3, M.I.T. (1949)

- 5) Kopal, Z., Tech. Report, No.5, M.I.T. (1949)
- 6) Roberts, R.C., et al., J. Aeronautical Sciences, Vol.21, pp. 336-342 (1954)

