

超・亜両側からの古典的音速理論(線型)の 若干の数値計算

山本雄三* 安東茂典**

Some Numerical Calculations by Using Linear Classical Sonic Theories Approached from Sub- or Supersonic Speeds

by

Yuzo YAMAMOTO, Shigenori ANDO

ABSTRACT

In this paper, unsteady aerodynamics of a two-dimensional wing at sonic speed are studied by using so-called classical sonic theories (linear), approached from supersonic flow ($M = 1 + 0$) or subsonic flow ($M = 1 - 0$). In the former approach, the exact expressions of lift and lift distribution are obtained in terms of Fresnel integrals, while in the latter approach an integral equation must be solved, the kernel function of which is obtained from the subsonic Possio's equation and has a root singularity. The discrete analysis is adopted on the basis of the semi-circle method (SCM) and the weighting function for subsonic-flow-Gauss'-quadrature, as well as modified diagonal elements resulting from the root singularity. Aerodynamic characteristics obtained from both approaches agree quite well with each other. The results obtained by the present computations are compared with those of DLM-C (subsonic 2D code) developed by ANDO et al, and are found to give a reasonable outer boundary for subsonic unsteady aerodynamics.

1. 序 論

非定常揚力面の遷音速の非線型計算が盛んに行われている。しかし周知のごとく, reduced frequency k が $|1-M| \ll k$ を満たすときには古典的遷音速理論が有効となる。それで主流が音速のとき, k が 0.5 ~ 1 以上では線型理論が通用することになる^{1), 2), 3)} 本研究においては, 音速で非定常運動をする二次元平板翼の非定常空力特性を, 超音速・亜音速両側(そ

れぞれ $M=1+0$, $M=1-0$ とする)からの古典的線型音速理論より計算する。

本研究の動機は次の2つである。通常フラッターは k が 0.3 以下で発生するので, 線型理論による計算結果は無効となる。しかし, k の大きいところで非線型理論と線型理論が一致することは, 多くの非線型理論に課せられた一つの妥当性判定基準となる。今一つは亜音速非定常揚力面について安東ら⁵⁾が開発した 2D-code, DLM-Cへの外側境界を与えることである。

$M=1+0$ (超音速からの $M=1$ への接近法)での定式化からは, 揚力や揚力分布が直接評価され閉じ

* 岐阜工業高等専門学校 機械工学科

** 名古屋大学 航空工学教室

た陽わな解がえられる。それに対し $M=1-0$ (亜音速からの $M=1$ への接近法) では, integrand の中に未知関数圧力を含む積分方程式が与えられる。その核関数は平方根特異性を有する。揚力分布をうるには数値積分が必要だが, あらかじめ揚力分布が判らないため, GAUSS の数値積分法における weighting 関数の選び方が一義的には定まらない。このように $M=1-0$ の計算にはやっかいな問題がある。しかし $M=1+0$ の計算結果と $M=1-0$ の計算結果は一致せねばならない。そのため本研究では双方の計算を行なった。

$M=1-0$ の積分方程式の核関数は, POSSIO の亜音速二次元非定常理論の核関数から導びかれる^{2), 6)}。数値積分を行う際に, 核関数中の平方根特異性を精度よく評価できるように解法を工夫した。weighting 関数は前縁に平方根特異性を有し, 後縁が KUTTA 条件で零となる通常の亜音速のものをそのまま用いた。 $M=1+0$ の揚力, 揚力分布の結果と, $M=1-0$ の離散化法による計算結果とはよく一致する。我々の結果は DLM-C 法による亜音速の結果 ($M=0, 0.5, 0.8, 0.9$)⁵⁾ と同一図上に比較され, 亜音速解の $M \rightarrow 1$ での外側境界を与えることが確認された。

N. Rott⁷⁾ (1949年) は $M=1+0$ での二次元非定常空気力の線型計算を行なった。H. C. NELSON と J. H. BERMAN⁸⁾ (1952年) は, エルロン付きの翼についての $M=1+0$ での二次元非定常空気力を解析した。P. F. JORDAN⁹⁾ (1953年) は, $0 \leq M \leq 2.0, 0 \leq k \leq 0.4$ の間での二次元非定常空気力を線型理論により調べた。音速での解析については, $M=1+0$ での基本吹き下ろしと揚力分布の関係を実無限級数によって表わしている。そしてこの揚力分布と基本吹き下ろしが, $M=1-0$ での積分方程式の解であることを証明している。そして音速での揚力分布は, 前縁が平方根特異性を有し, 後縁が KUTTA 条件を満足しないことを指摘している。本論文の成果の多くは JORDAN のその追証である。しかし亜音速からの接近において本論文で採用された方法は JORDAN のそれとは異なって新しく, 非常に有効である。

本研究では簡単のため上下運動 ($w/U = -1$) を扱った。しかし得られた結果の多くは, もっと広い運動に対しても多分通用すると思われる。また翼は

x 軸上 ($-1, 1$) の範囲にあるとされている。

2. 記号

- $\tilde{\alpha}$: 空力オペレータ
- a : 音速
- b : 半翼弦長, $b=1$ として計算
- C, S : フレネル積分
- $C(z) = \int_0^z \cos \{(\pi/2)t^2\} dt,$
- $S(z) = \int_0^z \sin \{(\pi/2)t^2\} dt$
- C_L : 揚力係数
- ΔC_p : 上下面の圧力差に基づく圧力係数
- D_{ij} : 連立方程式の係数行列
- E : 第 2 種の完全楕円積分, 母数 $\sqrt{(1+x_i)/2}$
- ΔF_{ij} : 式(4, 10)参照
- $H_i = 2\pi \sqrt{1-\xi^2} / (2NC+1)$: GAUSS の quadrature で用いられる。
- $i = \sqrt{-1}$: 純虚数
- i, j : i はコントロール点, j は積分点の番号
- $K(x_0; M_\infty=1, k)$: $M=1-0$ の積分方程式の核関数 $K_{ij} = K(x=x_i, \xi=\xi_j)$
- \tilde{K} : $1/\sqrt{x_0}$ の特異性を除いた核関数
- $k = \omega b / U = \omega / U$: reduced frequency
- $M = U/a$: マッハ数
- NC : SCM (semi-circle method) における分割数 $Q = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \sqrt{x_0} K(x_0)$
- Δp : 翼の上下面の圧力差
- U : 一様流流速
- w : 翼上での垂直速度, 上方向き正
- $W(\xi) = \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$: GAUSS の数値積分法における weighting 関数, 亜音速流用のもの。
- $x = -\cos \theta, \xi = -\cos \phi$: 翼弦方向位置, 座標
- $\alpha = -w/U$
- θ_i, ϕ_j : $\theta_i = 2i\pi / (2NC+1), \phi_j = (2j-1)\pi / (2NC+1)$
- $\lambda = x - \xi$
- ω : 円振動数
- 添字
- $R_e()$: 実部
- $I_m()$: 虚部

(*) : $()^* e^{i\omega t}$ の複素振幅。ただし明らかな場合 * 印ははぶく。

$\bar{(\)}$: $\bar{x} = kx$, etc. Appendix B で使用

$\hat{(\)}$: Appendix B で使用

3. 超音速からの接近法の定式化

音速での二次元翼の非定常空気力を調べる。

簡単のため、二次元平板翼が上下運動、しかも時間的に単純調和運動する場合のみを取り扱う。この節では超音速の非定常空気力学理論から音速への接近法で解析する。

3.1 揚力分布

次の公式がある³⁾

$$\frac{\Delta p^*}{q} = \tilde{a} \left\{ \frac{w^*}{U} \right\}, \quad \tilde{a} = 4 \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) I(x)$$

以後 * 印ははぶく。

$$I(x) \equiv \int_{-1}^x G(x_0) () d\xi, \quad G(x) = -e^{-i(kx^2)/\sqrt{2\pi ikx}} \\ -1 \leq x, \quad \xi < 1, \quad x_0 = x - \xi \quad (3.1)$$

もしも、 $w/U = -1$ ならば、

$$I(x) = \left\{ (i-1)/k \left[C(\sqrt{k(1+x)}/\pi) - i S(\sqrt{k(1+x)}/\pi) \right] \right\}$$

ここで $C(\)$, $S(\)$ はフレネル積分¹⁰⁾ また

$$\partial/\partial x I(x) = (-1/\sqrt{2\pi ik}) \cdot e^{-ik(1+x)/2} \sqrt{1+x}$$

となり、これらより次の表現をうる。

$$\Delta C_{pa} = 4 \left\{ (1+i) \left[C\left(\sqrt{\frac{k(1+x)}{\pi}}\right) - i S\left(\sqrt{\frac{k(1+x)}{\pi}}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{e^{-ik(1+x)/2}}{\sqrt{1+x}} \right\} \quad (3.2)$$

または

$$\left. \begin{aligned} R_e(\Delta C_{pa}) \\ I_m(\Delta C_{pa}) \end{aligned} \right\} = 4 \left\{ C\left(\sqrt{\frac{k(1+x)}{\pi}}\right) \pm S\left(\sqrt{\frac{k(1+x)}{\pi}}\right) \right\} \\ \pm \left\{ 2/\sqrt{\pi k(1+x)} \right\} \left[\cos\{k(1+x)/2\} \right. \\ \left. \mp \sin\{k(1+x)/2\} \right]$$

(3.2)'

ここに、 $M=1+0$ で上下運動をする二次元平板翼の揚力分布が求まった。(3.2)は、前縁特異性はあるが、後縁で KUTTA 条件は充たされないことを示す。

なお、(3.4)において $k \rightarrow \infty$ とすると $\Delta C_{pa} \rightarrow 4$ と

なる。これはピストン理論¹¹⁾による結果と一致する。

3.2 全揚力

揚力は

$$L/q = \int_{-1}^1 4(\partial/\partial x + ik) I(x) dx = 4I(1) \\ + 4ik \int_{-1}^1 I(x) dx \quad (3.4)$$

再び $w/U = -1$ の時を考える。

$$\int_{-1}^1 I(x) dx = - \int_0^2 G(y)(2-y) dy$$

$$-I(1) = \int_{-1}^1 G(1-\xi) d\xi = \int_0^2 G(\eta) d\eta$$

といった関係より

$$C_L = -2 \left\{ \int_0^2 G(x_0) dx_0 + ik \int_0^2 G(x_0)(2-x_0) dx_0 \right\} \quad (3.5)$$

よって単なる一重積分で C_L が求められる。結果はフレネル積分¹⁰⁾で表わされ、次の表現となる。

$$C_L = 4(1+i) \left[C\left(\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\right) - i S\left(\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\right) \right] \\ + 2(1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi k}} (\cos k - i \sin k) \quad (3.6)$$

または

$$\left. \begin{aligned} R_e(C_L) \\ I_m(C_L) \end{aligned} \right\} = 4 \left[C\left(\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\right) \pm S\left(\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\right) \right] \\ \pm 2 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} (\cos k \mp \sin k) \quad (3.6)'$$

ここに、 $M=1+0$ における上下運動を行う二次元平板翼の、任意の reduced frequency k に対する、揚力が定式化された。結果は NELSON-BERMAN の結果と一致する。〔文献8)式(23)参照〕

なお、 k が大きくなると、 C_L は 4 に近づく。これはピストン理論¹¹⁾からの結果と一致する。

4. 亜音速からの接近法の定式化

3節と同じ問題を、亜音速から音速への接近法で解析する。この場合、積分方程式を解かねばならないが、ここでは離散化法によって調べる。

4.1 Kernel 関数

POISSO の亜音速二次元非定常空気力学の積分方

程式³⁾を音速にすると,

$$w^* = -(1/4\pi) \int_{-1}^x \Delta C_p^*(\xi) K(x_0; M_\infty=1, k) d\xi \quad (4.1)$$

以後*印ははぶく。

$$\Delta C_p = \Delta p / (1/2) \rho U^2, \quad C_L = (1/2) \int_{-1}^1 \Delta C_p(\xi) d\xi \quad (4.2)$$

なお, kernel 関数は

$$K(kx_0, M=1) = \sqrt{\pi} \left\{ \begin{aligned} &((1+i)k/\sqrt{kx_0}) e^{-ikx_0/2} \\ &+ (1-i)\sqrt{\pi} k e^{-ikx_0} [C(\sqrt{kx_0/\pi}) \\ &+ iS(\sqrt{kx_0/\pi})] \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここで

$$x_0 = (x - \xi) / b = x - \xi, \quad k = \omega b / U$$

の関係がえられる。(Appendix A参照)なお, この音速での積分方程式は, WATKINSらの三次元亜音速非定常揚力面の論文⁶⁾の付録(B, 23)にも載っている。

前節と同じく $w = -U$ という場合を考える。 $M=1-0$ ではここに示すように積分方程式となるが, $M=1+0$ と同じ問題を扱っているので, 結果は一致せねばならない。

4.2 離散化法による計算

あらかじめ最良の方法が判らないので, 積分点, コントロール点の分布は亜音速の場合と同様に行う(SCM)。

$$\begin{aligned} \xi_j &= -\cos \phi_j, \quad \phi_j = (2j-1)\pi / (2NC+1) \\ & \quad j=1, 2, \dots, NC \\ x_i &= -\cos \theta_i, \quad \theta_i = 2i\pi / (2NC+1) \\ & \quad i=1, 2, \dots, NC \end{aligned} \quad (4.4)$$

ξ_j は積分点, x_i はコントロール点。 ΔC_{pj} , $j=1, 2, \dots, NC$ が求まると

$$C_L = (1/2) \int_{-1}^1 \Delta C_p d\xi = (1/2) \sum_{j=1}^{NC} H_j \Delta C_{pj} \quad (4.5)$$

となる。ここで H_j は亜音速の場合 GAUSS の求積法の係数で weighting 関数 $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ に対するものを用いる⁴⁾

$$H_j = 2\pi \sqrt{1-\xi_j^2} / (2NC+1) \quad (4.6)$$

この H_j 関数は, 前縁で平方根特異性を有し, 後縁で KUTTA 条件を満足する亜音速の計算には適している。

音速では H_j を用いる根拠はないが試みとしてそのまま採用した。

(4.1)は, 平凡に考えると

$$-w_i(\theta_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{j=i} \frac{2\pi}{2NC+1} \sin(\phi_j) K(kx_0; M_\infty=1, k) C_{pj} \quad (4.7)$$

と離散化される。この連立方程式の係数行列式は対角線要素を含む下三角行列(亜音速の場合とちがって)となる。しかしながら, 核関数 $K(kx_0; M_\infty=1, k)$ が $1/\sqrt{x_0}$ の特異性を有するので, それを考慮した補正が必要である。

4.3 補正された D_{ij}

$1/\sqrt{x_0}$ の特異性を有する部分を取り出すため

$$K \equiv \tilde{K} + Q / \sqrt{x_0}$$

とする。ここで

$$Q \equiv \lim_{x_0 \rightarrow 0} \sqrt{x_0} K(x_0) = \sqrt{k\pi} (1+i)$$

これを用いると

$$-\tilde{w}(x) = \int_{-1}^x \tilde{K}(x_0) C_p(\xi) d\xi + Q \int_{-1}^x (1/\sqrt{x_0}) C_p(\xi) d\xi \quad (a)$$

ここで, 右辺第1項はおとなしい積分なので,

$$\int_{-1}^x \tilde{K}(x_0) C_p(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{j=i} H_j \tilde{K}(x_i - \xi_j) C_p(\xi_j) \quad (b)$$

と評価できる。第2積分においては

$$C_p(\xi) \equiv W(\xi) \hat{C}_p(\xi), \quad W(\xi) \equiv \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} \quad (c)$$

ここで $\hat{C}_p(\xi)$ は多項式とする。(音速での揚力分布には, 前縁の特異性はあるが後縁の KUTTA の条件はないので, これは一つの試みである。) その時

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \frac{C_p(\xi)}{\sqrt{x_0}} d\xi &= \int_{-1}^x \frac{W(\xi) \hat{C}_p(\xi) - \hat{C}_p(x)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \\ &+ \frac{C_p(x)}{W(x)} \int_{-1}^x \frac{W(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \\ &\doteq \sum_{j=1}^{j=i} H_j \frac{1}{\sqrt{x-\xi_j}} [C_p(\xi_j) - W(\xi_j) \frac{C_p(x)}{W(x)}] \\ &+ \frac{C_p(x)}{W(x)} F(x, \xi) \end{aligned} \quad (d)$$

と書けることを考慮すると, 式(a)は

$$-\tilde{w}(x_i) = \sum_{j=1}^{j=i} D_{ij} C_p(\xi_j)$$

$$\begin{aligned} & \doteq \sum_{j=1}^{j=i} C_p(\xi_j) \left\{ H_j \left(\tilde{K}_{ij} + \frac{Q}{\sqrt{x_i - \xi_j}} \right) \right. \\ & \left. + \left[F(x_i, \xi_j) - \sum_k \frac{H_k W_k}{\sqrt{x_i - \xi_k}} \right] \frac{Q}{W_i} \delta_{ij} \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

と近似できる。式(4.8)より

$$\begin{aligned} D_{ij} &= H_j K_{ij} + (Q/W_i) \Delta F_{ij} \cdot \delta_{ij} \quad (4.9) \\ \Delta F_{ij} &= 2\sqrt{2} E \\ & - \sum_{k=1}^{j=i} (H_k / \sqrt{x_i - \xi_k}) \sqrt{(1 - \xi_k) / (1 + \xi_k)} \end{aligned}$$

$$(4.10)$$

と書ける。ここで $K_{ij} \equiv K(x=x_i, \xi=\xi_j)$ 。また

$$\int_{-1}^{x_i} [W(\xi) / \sqrt{x_i - \xi}] d\xi = 2\sqrt{2} E$$

を用いた。Eは $\sqrt{(1+x_i)/2}$ を母数とする第2種の完全楕円積分、式(4.9)の第2項は核関数の $1/\sqrt{x_0}$ の特異性を考慮した一補正法になっていることに注意する。

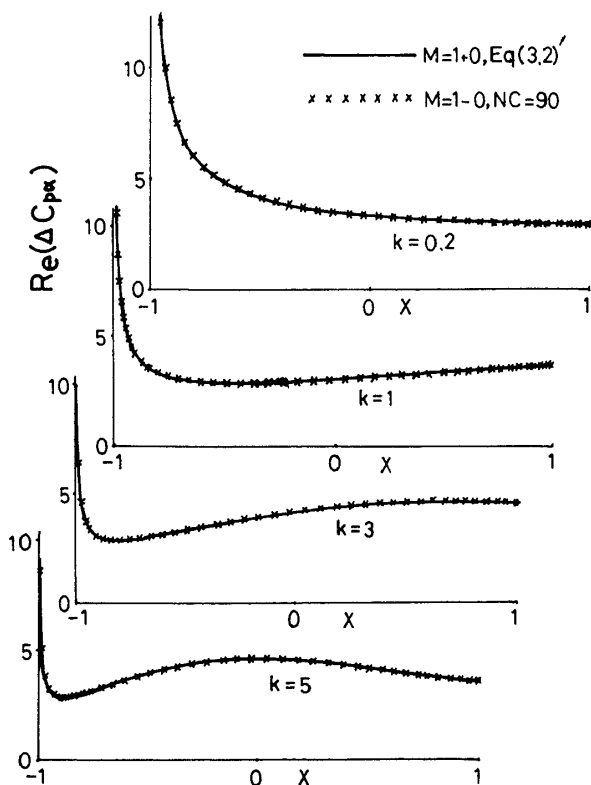
5. 計算結果と考察

音速で上下運動 ($w/U=-1$) する二次元平板翼の空力特性の計算結果について述べる。 $M=1+0$ の計算では、式(3.2)'より揚力分布が、式(3.6)'より C_L/α が評価される。フレネル積分は、名古屋大学の大型計算機のライブラリープログラムより評価される。 $M=1-0$ の計算では、4節で述べたように、離散化法により複素変数をもつ連立方程式の問題となるが、係数行列が下三角行列であり、解法は簡単である。この連立方程式を計算機を用いて解けば揚力分布が、それを数値積分して C_L/α が評価される。

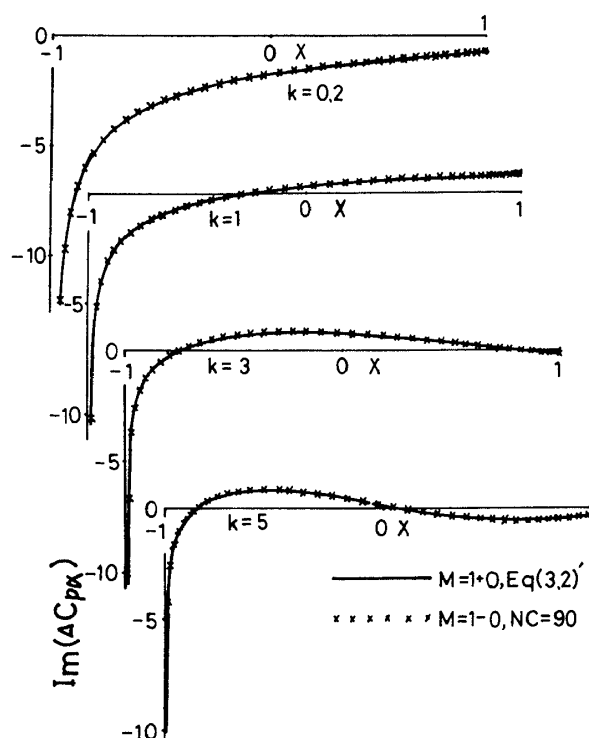
5.1 揚力分布

reduced frequency $k=0.2, 1.0, 3.0, 5.0$ に対する揚力分布を第1図に示す。第1図a)は $Re(\Delta C_{pa})$ vs. x 、第1図b)は $Im(\Delta C_{pa})$ vs. x をそれぞれ示す。実線は $M=1+0$ の厳密な解析解で、点×は $M=1-0$ の $NC=90$ で4.3で述べた補正をほどこしたものの。 $M=1+0$ の結果と $M=1-0$ の結果は揚力分布についてはよく一致している。

$M=1$ での揚力分布は、JORDAN⁹⁾も指摘している



a) $Re(\Delta C_{pa})$ vs. X



b) $Im(\Delta C_{pa})$ vs. X

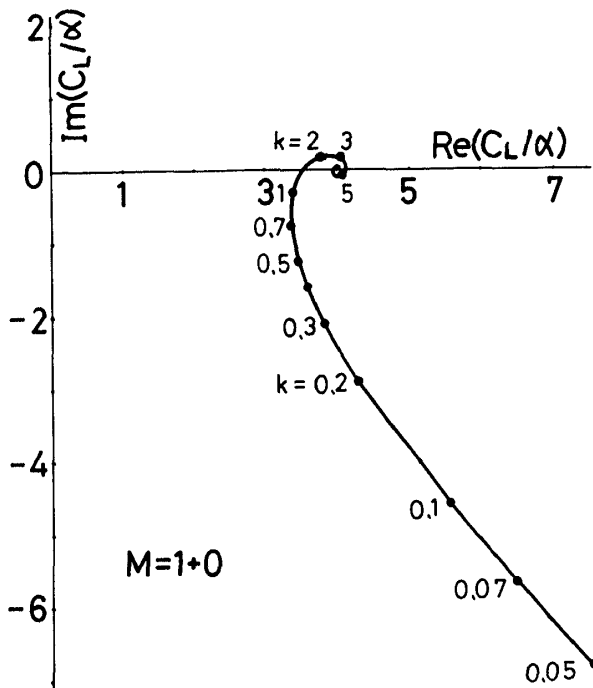
第1図 翼弦方向揚力分布, 上下運動, $k=0.2, 1.0, 3.0$ and 5.0

ように、前縁では亜音速のそれと同じように 特異性を有し、後縁では超音速のそれと同じように KUTTA の条件を満足しない。そして k が 5.0 という大きな場合にも亜音速のそれのような著しい波動性を有しない。

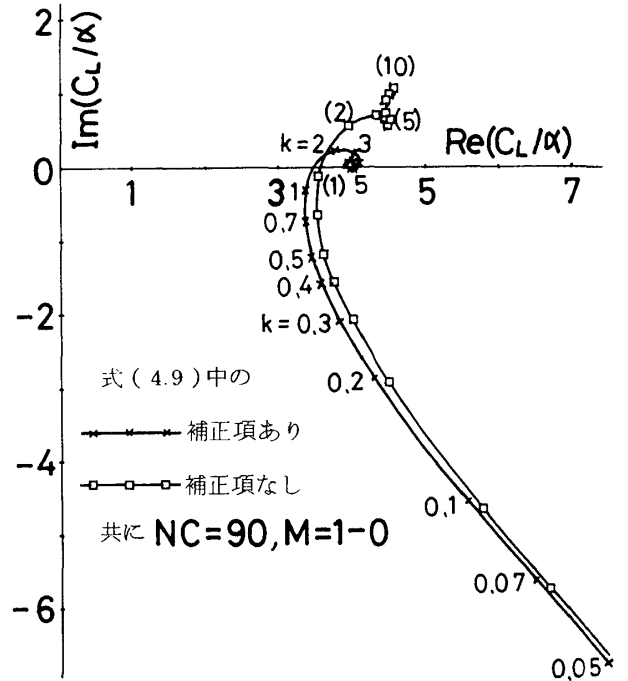
5.2 揚 力

$M=1+0$ の $k=0.1\sim 10$ に対する $I_m(C_L/\alpha)$ vs. $R_e(C_L/\alpha)$ の計算結果を第 2 図に示す。これは式 (3.5) による厳密解である。

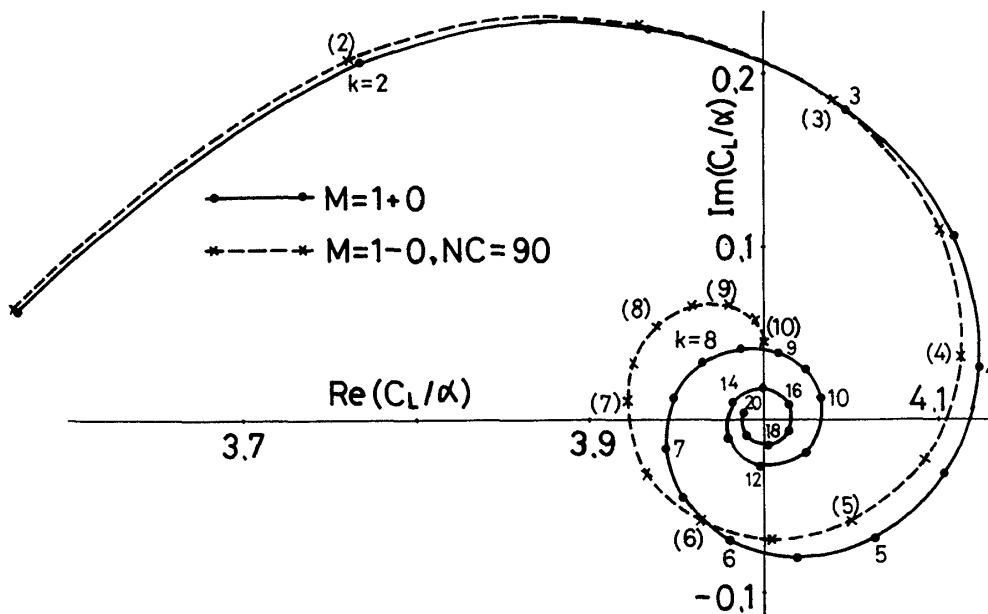
離散化法を用いる $M=1-0$ での同じ結果を第 3 図に示す。 $NC=90$ に選んだ。 4.3 に述べた補正を行なった場合と、補正を行わない場合を比較のため同



第 2 図 超音速からの接近による $M=1+0$ での揚力 (上下運動), $I_m(C_L/\alpha)$ vs. $R_e(C_L/\alpha)$ for $k=0.1\sim 10$



第 3 図 亜音速からの接近による $M=1-0$ での揚力 (上下運動), (離散化法による)



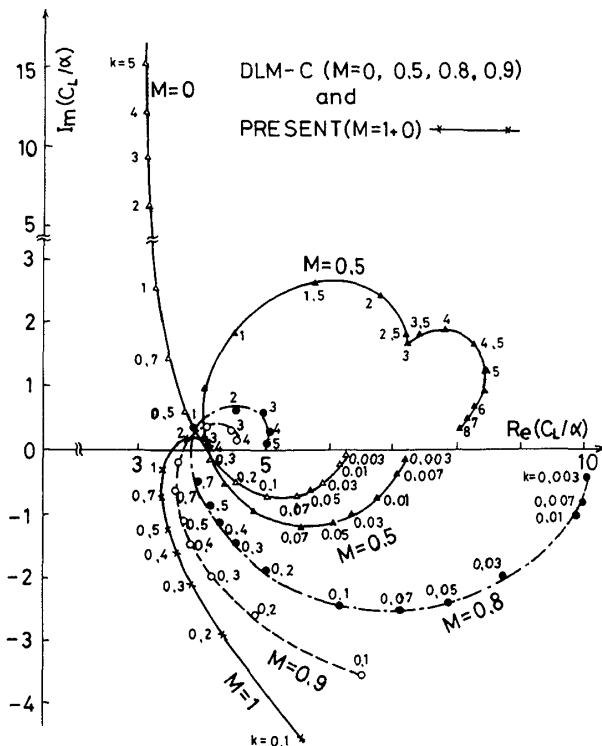
第 4 図 k が大きい場合の $I_m(C_L/\alpha)$ vs. $R_e(C_L/\alpha)$ (上下運動)

一図上に示す。結果は我々の行った補正法が非常に有効であることを示す。

k が大きい場合 ($k=2.0\sim 20$) の揚力を第4図に示す。実線が $M=1+0$ の解で破線が $M=1-0$ の計算 (補正法を用い $NC=90$) である。 $k < 3$ で双方はよく一致すると思われる。 k を大きくすると $Re(C_L/\alpha)$ vs. $Im(C_L/\alpha)$ 平面で線を描いて $(C_L/\alpha) = 4$ に近づく。 $k \rightarrow \infty$ で $(C_L/\alpha) = 4$ はピストン理論¹¹⁾からも導びかれる。なお、 k が大きい場合の C_L/α の特性を Appendix C に記した。

本計算の目的の一つは、亜音速の非定常空力特性の計算結果の $M=1.0$ での外側の境界を与えることにある。我々の揚力の結果 ($M=1+0$) を DLM-C 法による亜音速の結果⁵⁾ と同一図上に比較したものを第5図に示す。我々の結果は、亜音速の非定常空力特性の外側の境界をたいそう合理的に与えている。

本研究における数値計算には、名古屋大学大型計算機センター FACOM M380 を用いた。計算時間は $M=1+0$ の計算で $0.4 \text{ sec}/50 \text{ case}$ 、 $M=1-0$ の計算では $NC=90$ で $9 \text{ sec}/50 \text{ case}$ だった。



第5図 DLM-C ($M=0, 0.5, 0.8, 0.9$) および現問題 ($M=1+0$) の計算結果の比較 (上下運動)

6. 結 論

本研究で得られた成果を記す。

線型の古典的音速理論は $k \geq 0.5 \sim 1.0$ で、非線型の遷音速数値解法の妥当性判定基準になる。ここでは、二次元、上下運動のみについて数値計算を行った。しかし、他の運動のタイプについても本成果は同様に成り立つであろう。

$M=1+0$ と $M=1-0$ の両側からのアプローチが行われた。 $M=1+0$ からは閉じた陽わな厳密解がえられる。

- (1) 亜音速側 ($M=1-0$) のアプローチにおいて、
 - (1-1). 核関数の誘導を POSSIO のそれ²⁾ から行った。
 - (1-2). 積分方程式の数値解を、離散化法で行なった。核関数のもつ平方根特異性を処理する方法を考えた。これは収束性を著しく改善した。
 - (1-3). 揚力分布を数値積分して、揚力を求める際に、GAUSS Quadrature の係数として、亜音速の場合のそれ⁴⁾ を用いて一応の成功を収めた。
- (2) 計算結果
 - (2-1). $M=1+0$ と $M=1-0$ での計算による揚力分布・揚力は数値上互いによく一致した。
 - (2-2). 揚力分布の特徴は、JORDAN の指摘のように、前縁で平方根特異性があるが、後縁で KUTTA 条件は満たされない。そして k が大きいにもかかわらず、高亜音速のような波動性は少ない。
 - (2-3). 揚力係数は、亜音速揚力面からえられたものの合理的境界を与えた。
- (3) 積分方程式の反転解という見地からの簡潔な表現式が示された。

参 考 文 献

- 1) Hounjet, M.H.L.: Transonic Panel Method to Determine Loads on Oscillating Airfoils with Shocks, AIAA Journal, Vol. 19, No.5, (1981), pp. 559-566.
- 2) Bisplinghoff, R.L., Ashley, H. and Halfman, J.L.: Airplane Aerodynamics, Wiley, New York, 1949, pp. 100-101.

- R.L.: Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass., 1955, pp. 375-379.
- 3) Bisplinghoff, R.L. and Ashley, H.: Principles of Aeroelasticity, Dover, 1962. pp. 107-108.
 - 4) 安東茂典: 揚力面の数値計算法に現われるガウスの数値積分法, 日本機械学会誌, 第86巻, 第774号, 1985年5月, pp. 489-495.
 - 5) 安東茂典, 加藤三千代, 市川明夫: 有限翼幅の亜音速揚力面理論を検証するのに役立つ, 二次元“DLM-C”, 日本航空宇宙学会誌, 第33巻, 第382号, 1985年11月, 掲載予定.
 - 6) Watkins, C.E., Runyan, H.L. and Woolston, D.S.: On the Kernel Function of the Integral Equation Relating the Lift and Downwash Distributions of Oscillating Finite Wings in Subsonic Flow. N.A.C.A. Rep. 1234, 1955, pp. 703-718.
 - 7) Rott, N.: Oscillating Airfoil at Mach Number 1, J.A.S., Vol. 16, No. 6, 1949, pp. 380-381.
 - 8) Nelson, H.C., and Berman, J.H.: Calculations on the Forces and Moments for an Oscillating Wing-Aileron Combination in Two-Dimensional Potential Flow at Sonic Speed, N.A.C.A. Rep. 1128, 1952, pp. 469-484.
 - 9) Jordan, P.F.: Aerodynamic Flutter Coefficients for Subsonic and Supersonic Flow (Linear Two-dimensional Theory), British A.R.C. R. & M. No.2932, April 1953, pp. 1-54.
 - 10) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1964, pp. 300-301.
 - 11) Ashely, H. and Zartarian, G.: Piston Theory - a New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, J.A.S., Vol.23, No.12, (1956), pp. 1109-1118.

Appendix A. 亜音速から接近する場合の核関数
我々が本文中で亜音速の接近に用いた二次元音速での積分方程式, 式(4.1)~(4.3)は

$$w/U = A_w \int_{-1}^x \Delta C_p e^{ikx_0} \mathcal{K} d\xi \quad (\text{A.1})$$

ここで

$$A_w = -\sqrt{2\pi\epsilon}/4\pi \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{K} \equiv (k/\sqrt{kx_0}) e^{ikx_0/2} - i k \sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{kx_0/\pi}} e^{i\pi\lambda^2/2} d\lambda \quad (\text{A.3})$$

を変形したものである。

亜音速二次元流れの($w/U \sim \Delta C_p$) 式中の一般的な核関数は無次元で表わすと

$$K(x_0; k; M) = \frac{-k}{8\beta} e^{i\mu x_0} \left\{ H_0^{(2)}(\kappa|x_0|) - i M \frac{x}{|x_0|} H_1^{(2)}(\kappa|x_0|) - i \beta^2 e^{-ikx_0/\beta^2} \int_0^{kx_0/\beta^2} e^{i\lambda} H_0^{(2)}(M|\lambda|) d\lambda \right\} \quad (\text{A.4})$$

ただし, $\kappa \equiv kM/\beta^2$, $\mu \equiv kM^2/\beta^2$ となる。これに引数のきわめて大きい時のハンケル関数の漸近公式を用いると, 最終的に次の結果をうる。

$x_0 > 0$ に対して

$$K(x_0, y_0; M \rightarrow 1) = -A_w e^{-ikx_0} \mathcal{K}$$

$$x_0 < 0 \text{ に対して } K(x_0, y_0; M \rightarrow 1) = 0$$

ここに, POSSIO の kernel²⁾ から式(A.1)~(A.3)が導かれた。これは文献6)の(B.23)と同じものである。

Appendix B. 超音速からの接近の積分式と,
亜音速からの接近の積分方程式
の反転関係についての考察

超音速からの接近の式を変形すると,

$$\hat{P}(\bar{x}) = (\partial/\partial \bar{x}) \int_{-k}^{\bar{x}} L(\bar{x}_0) \hat{W}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (\text{B.1})$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{P}(\bar{x}) &\equiv -(\sqrt{2\pi\epsilon}/4) e^{i\bar{x}} \Delta C_p(x), \\ \hat{W}(\bar{\xi}) &\equiv \{w(\xi)/U\} e^{i\bar{\xi}} \\ L(\bar{x}_0) &\equiv (1/\sqrt{\bar{x}_0}) e^{i\bar{x}_0/2}, \quad \bar{x} \equiv kx, \quad \bar{\xi} \equiv k\xi \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

亜音速からの接近の式は,

$$\widehat{W}(\bar{x}) = (1/\pi) \int_{-k}^{\bar{x}} \widehat{P}(\bar{\xi}) M(\bar{x}_0) d\xi \quad (\text{B.4})$$

$$M(\bar{x}_0) = L(\bar{x}_0) - \sqrt{i} \pi \int_0^{\sqrt{\bar{x}_0/\pi}} e^{i\pi\lambda^2/2} d\lambda$$

$$= L(\bar{x}_0) + (\sqrt{i}/2) \int_0^{\bar{x}_0} l(t) dt \quad (\text{B.5})$$

となり, (B.4) という積分方程式の反転解が (B.1) で与えられることを示している。 $\widehat{P}(\bar{x})$, $\widehat{W}(\bar{x})$ はそれぞれ, 変形された圧力差と変形された upwash である。この反転関係は, 物理的意味からは存在が主張できるが, 数学的, 直接的な証明はまだ行われていない。

Appendix C. C_L の $k \rightarrow \infty$ での振舞い

文献 10) 式 7.3.9, 7.3.10, 7.3.27, 7.3.28 より

$$C(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi z} \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - \frac{1}{\pi^2 z^3} \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) + O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

$$S(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) - \frac{1}{\pi^2 z^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) + O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

をうる。この $z \rightarrow \infty$ での漸近表現を用いて, 式(3.6) の揚力の表現の $k \rightarrow \infty$ の極限特性を調べると次式をうる。

$$\left(\frac{C_L/\alpha}{4} - 1\right) e^{ik} = -\frac{(1+i)}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{k^{3/2}} + O\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right) \quad (\text{C.1})$$

k が大きくなると C_L/α が $I_m(C_L/\alpha)$ vs. $R_e(C_L/\alpha)$ 図上で 4 という点を中心に巻き込むことが, これからも確認される。

