

層流制御計算における e^N 法の応用

石田 洋治* 伊藤 信毅*

Application of the e^N Method to Calculations of Laminar
Flow Control

by

Yoji ISHIDA and Nobutake ITOH

ABSTRACT

The e^N method was applied to two-dimensional, incompressible laminar boundary layers with and without suction with the aim of developing an aerodynamic design method for a laminar flow control airfoil. The method consisted of an airfoil, boundary layer and e^N codes, respectively. The airfoil code used the vortex singularity method and the boundary layer code Keller's Box method. In the e^N code, the Orr-Sommerfeld equation was solved spatially with a given fundamental flow by the Itoh method (ref.8) and the growth rate $-\alpha_i$ was integrated from the neutral point to an arbitrary downstream point, which gave the total amplification of the disturbance. A transition point was predicted by the point at which the total amplification became e^N .

As an example of the calculation, the laminar boundary layer over the surface of the NACA 0012 airfoil with the suction velocity determined by the Michel criterion (ref.2) which could maintain the laminar flow over a full chord length was tested to confirm the very strong stabilizing effect of the suction. The result showed that both the Michel and the e^N methods agree well qualitatively, but some uncertainty remains about quantitative agreement.

1. 序

境界層の層流から乱流への遷移現象は、物理的にも工学的にもきわめて興味ある重要な現象である。物理的には遷移の発生の機構とかその構造の解明が主題となるが、工学的には遷移の発生の制御が主要課題となる。層流から乱流への遷移を遅らせることによって、物体表面に働く表面摩擦抵抗の大幅な低減が可能となるからである。¹⁾

層流制御技術は境界層に吸い込みを働かせることによって積極的に層流状態を維持し、表面に働く摩

擦抵抗を低減しようとする技術であり、近年再び大きな関心を集めている。この問題では、どのような吸込みを行えば遷移の発生が抑えられるかが重要になる。それを決定するためには遷移の発生の有無を予測しなければならない。厳密に理論的に遷移の発生を予測することはまだ一般的に成功していないので、現在工学的な立場からは経験的もしくは半経験的な予測法に頼らなければならない。非圧縮2次元流に対しては、経験的遷移点判定法はいくつか公表されており²⁾⁻⁴⁾、実用上の問題で多用されている。しかし、それらはすべて吸込みのない境界層の遷移データをもとにして導かれたものであるので、吸込みがある場合にもはたしてそれが正しいかどうか保

* 航空宇宙技術研究所

証はない。これまでの筆者の経験によれば少なくとも定性的には正しいが、定量的にはまだ十分に確かめられたとは言えない。それゆえこれらの経験法則とは別の予測法によって、その妥当性が確かめられることがのぞましいわけである。そのような予測法として、我々は e^N 法を採用することにした。

e^N 法は A.M.O. Smith⁵⁾ および van Ingen⁶⁾ によって独立に始められたもので、後に述べるように線型安定理論に基礎をおいており、中立点（増幅率が 0 となる流れ方向位置）から、任意の下流側の点 x までの、擾乱の全増幅を求め、それが e^N となった所を遷移点とする方法である。 N の値は理論だけからは決らず、実験データとの相関から決めなければならない（通常 $N = 9$ が選ばれる）。それゆえこの方法は半経験的な予測法である。

本報告では層流制御翼に対して e^N 法を組込んだ空力設計法を開発し、それを用いて具体的計算を行ない経験的な遷移点判定法を用いた結果と比較した。

対象は非圧縮二次元流に限定した。

2. 計算法

e^N 法を組込んだ層流制御翼の空力設計法は、第 1 図に示したような構成を持つ。まず与えられた翼型まわりの非粘性流速度 $U_e(s)$ を計算する。次に吸込み速度分布 $v_s(s)$ を適当に仮定し、 U_e と v_s が与えら

れたとして境界層方程式を解く。次にこの境界層内速度分布 $U(y,s)$ を基本流として Orr-Sommerfeld 方程式を S 方向に解いて行き、中立点 S_N からそれより下流の任意の点 s までの擾乱の全増幅を求め、それが e^N (例えば $N = 9$) となるかどうか、つまり遷移が発生しているかどうかを見る。もし遷移が生じていれば初めに仮定した吸込み速度 $v_s(s)$ を手直しし、上述の計算をくり返す。最終的に全増幅が e^N に達しなくなる、即ち遷移が起らなくなるまで計算をくり返し、 $v_s(s)$ を逐次的に改良して行く。

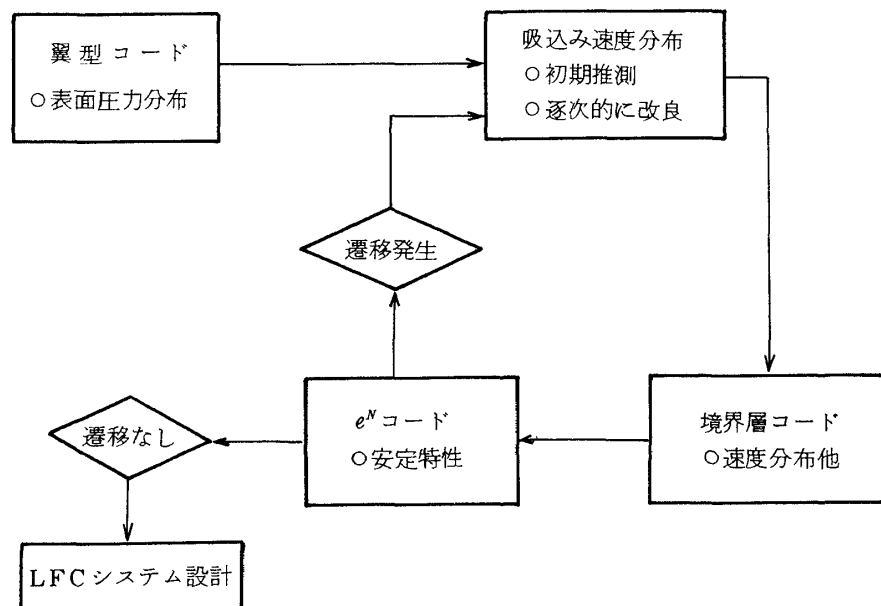
このようにこの空力設計法は、非粘性流、境界層および線型安定の三つの計算から構成される。その各々について簡単に説明する。

2.1 非粘性流

非粘性流はポテンシャル流と仮定し、渦特異点によって計算した。これは与えられた翼型表面上に単位長さ当りの強さ $\gamma(s)$ の渦面を分布させて、与えられた物体の流れ場を表わすもので、複素ポテンシャル W は

$$W = U_\infty e^{i\alpha} Z + \frac{i}{2\pi} \oint \gamma(s) \ln(Z - \zeta(s)) ds \quad (1)$$

で与えられるここで α は迎角である。一周積分を評価するために翼型を N 多角形で近似し、各要素辺上では $\gamma(s)$ は線型変化をすると仮定する。それゆえ $N + 1$ 個の頂点における γ の値 $\gamma_j (j = 1, \dots, N + 1)$



第 1 図 層流制御翼の空力設計手順

が未知数となる。この未知数は翼面上の N 個のコン
トロール点 (各要素辺の midpoint) における境界条件と、
Kutta 条件

$$\gamma_1 + \gamma_{N+1} = 0 \quad (2)$$

とから決定される。 $\gamma(s)$ は翼面上の接線速度に他な
らないから、 γ_j が求まれば境界層計算に必要な局所
主流速度 $U_e(s)$ が直ちに得られる

$$U_e(S_j) = \gamma_j \quad (3)$$

2.2 境界層計算

非圧縮二次元層方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{ds} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4b)$$

である。これを境界条件

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad v = v_s(s) \quad (y = 0 \text{ で}) \\ u \rightarrow U_e \quad (y \rightarrow \infty \text{ で}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の下で解く、数値計算は Keller の Box 法を用いた。
解法の詳細は文献 7 に詳しいので省略する。

2.3 線型安定計算と e^N 法

層流境界層の線型安定計算は、層流境層 (以後基
本流と呼ぶ) 中の微小擾乱の成長あるいは減衰特性
を調べるのが目的である。その際基本流は平行流で
あると仮定され、その流れ関数を $\Phi(y)$ とする。擾乱
はその流れ関数 $\psi(s, y, t)$ が

$$\psi(s, y, t) = \phi(y) e^{i(\alpha s - \omega t)} \quad (6)$$

で与えられる波と考える。 e^N 法ではこの擾乱の空間
的成長を問題とするので、(6) 式で ω は実数と仮定さ
れ擾乱波動の角速度を表わす。 α は複素数 ($\equiv \alpha_r +$
 $i\alpha_i$) で実数部 α_r が波数を、虚数部 α_i が減衰率を
それぞれ表わす。基本流 $\Phi(y)$ と擾乱 $\psi(s, y, t)$ を重
ね合せて Navier-Stokes 方程式に代入し、擾乱が
十分小さいものとして二次以上の微小項を省略すれ
ば、Orr-Sommerfeld 方程式

$$\left[\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 - iR \left\{ (-\omega + \alpha \frac{d\Phi}{dy}) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) - \alpha \frac{d^3\Phi}{dy^3} \right\} \right] \phi(y) = 0 \quad (7)$$

が得られる。ただし、全ての量は基準長さ L 、基準
速度 U_c で無次元化してある。 R はレイノルズ数

$$R = U_c L / \nu \quad (8)$$

である。本計算では U_c として局所主流速度 U_e 、 L と
して境界層厚さ δ を用いた。(7) 式に対する境界条件
は

$$\left. \begin{aligned} \phi = d\phi/dy = 0 \quad (y = 0 \text{ で}) \\ d\phi/dy \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty \text{ で}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であるが、 $y \rightarrow \infty$ における境界条件は数値計算には
便利でないので、適当に定義された外縁 ($y = 1$)
において (7) 式の外部解と接合させた形を用いる。

Orr-Sommerfeld 方程式の解法については現在
ではいくつかの方法が利用できるが、ここでは Itoh
のべき数展開法を用いた。詳細については文献 8 を
参照のこと。

(7) 式は同次方程式であり、境界条件 (9) 式も同次形
であるから、(7) 式は固有値問題となる。すでにのべ
たように e^N 法では擾乱の空間的増幅を考えるから
 ω は実数で α が複素数である場合を考える。それゆ
え (7) 式には R 、 ω 、 $\alpha (\equiv \alpha_r + i\alpha_i)$ の 4 個の未知数
があることになり、方程式の数は 2 個 ((7) 式の実部
と虚部) しかないから、これら未知数のうちどれか
2 個を指定しなければならない。ここでは R と ω を
指定し、 α_i 、 α_r について解いた。即ち

$$F(\alpha_r, \alpha_i; R, \omega) = 0 \quad (10)$$

固有問題 (10) は繰返し法によって解かれる。それゆ
え、 α_i 、 α_r に対する初期推測が実際の計算で必要とな
る。それについては次の 2.4 で述べる。

e^N 法は翼面上の各点において固有問題 (10) 式を解い
て行き、中立点 ($\alpha_i = 0$ となる点) S_N より下流の任
意の位置 S までの擾乱の増幅率 $-\alpha_i^*$ を積分する。

その値の指数関数

$$a = \exp \left[- \int_{S_N}^S \alpha_i^* ds \right] \quad (11)$$

は中立点 S_N から S までの擾乱の全増幅率を与える。
この a の値が e^N ($N \approx 9$ の値) となった点 S を遷移
点とするわけである。(11) 式を無次元変数で表わすと、

$$\alpha(\bar{S}) = \exp \left[- R_c \int_{\bar{S}_N}^{\bar{S}} (\alpha_i/R) (U_e/U_\infty) d\bar{s} \right] \quad (12)$$

となる。ここで

$$\bar{S} = S/C, \quad R_c = U_\infty C/\nu, \quad C = \text{翼弦長}$$

である。

2.4 実際の計算における工夫点

e^N 法を実際に翼面上の境界層の遷移点判定に使

う場合には、かなり前方（例えば $S/C = 0.04$ ）から下流方向に適当な、細かなステップ間隔 ΔS で線型安定計算を進めて行かなければならない。そのため計算時間がかなりかかる。また翼面上の境界層は非平衡流であるから、各ステップごとに基本流の状況が変わり、固有値問題を解く際の、 α_c , α_r に対する初期推測値の与え方に十分な注意が必要となる。さらに各ステップごとに基本流の情報を 2.2 で得られた数値のまま入力しておくことは記憶容量の点からのもましくない。このような問題に対処するため、いくつかの計算上の工夫が必要となった。それについて簡単にのべる。

2.4.1 基本流（境界層速度分布）の近似表現

2.2 の境界層計算によって求められた速度分布 U はここでは文献 9 に従って多項式近似で表現することにした。この多項式近似は境界層を $y = 0.45\delta$ の所で内層と外層に分け、内層では $y = 0, 0.15\delta$ および 0.45δ の三点における速度、 U_0 ($\equiv 0$), U_{15} , U_{45} と $y = 0.45\delta$ における速度勾配 $(\partial U / \partial y)_{45}$ とを用いて多項式近似を行ない、外層では $y = 0.45\delta, 0.79\delta$ および δ における速度 U_{45} , U_{79} , U_{100} ($\equiv 1.0$) と、 $y = 0.45\delta$ における速度勾配 $(\partial U / \partial y)_{45}$ とを用いて多項式近似を行なうものである。この多項式近似は、 U_{15} , U_{45} , U_{79} および $(\partial U / \partial y)_{45}$ の 4 個のパラメータを与えれば、かなり精度よくもとの解を表現できることが確かめられている。従って基本流については各ステップで上記 4 個のパラメータだけを与えておけばよいことになり、記憶容量の問題が解決された。

2.4.2 α_i , α_r の初期推測値の与え方

すでに述べたように線型安定計算では R と ω を与えて α_r , α_i について解くわけであるが、その解法は繰り返し法によるため、 α_r , α_i について適当な初期推測値を与えなければならない。その与え方が悪いと計算が上手く進まない。特に計算の出発点 ($S = S_0$) においてそうである。そこで出発点 S_0 とそれ以降の各点 S における初期推測値の与え方を述べることにする。

まず出発点では次のような仮想的な基本流を考える。

$$U^{(i)} = (1 - r^{(i)}) U_{F.P.} + r^{(i)} U_S \quad (13)$$

ここで $U_{F.P.}$ は平板境界層の（無次元）速度分布であり、 U_S は出発点における実際の速度分布である。そして r は一種の緩和係数で 0 から 1 までの値をとる。 $r^{(1)} = 0$ とおくと、 $U^{(1)}$ は $U_{F.P.}$ となるが、平板境界層の空間的安定計算はすでに行なわれているので、⁸⁾ その結果を α_r , α_i の初期推測値に使うことができ、容易に $\alpha_r^{(1)}$, $\alpha_i^{(1)}$ について解くことができる。次に r を Δr だけ増すと ($r^{(2)} = r^{(1)} + \Delta r$)、(13) 式に従って $U^{(2)}$ は平板境界層のそれから少しずれる。そのずれが小さい限り $U^{(2)}$ に対する固有値 $\alpha_r^{(2)}$, $\alpha_i^{(2)}$ は、平板境界層のそれから大きくずれることはないであろうから、 $\alpha_r^{(1)}$, $\alpha_i^{(1)}$ を初期推測値に使うことができる。この手順をくり返して $r = 1$ まで行なえば、出発点における基本流 U_S に対する α_i , α_r を容易に求めることができる。

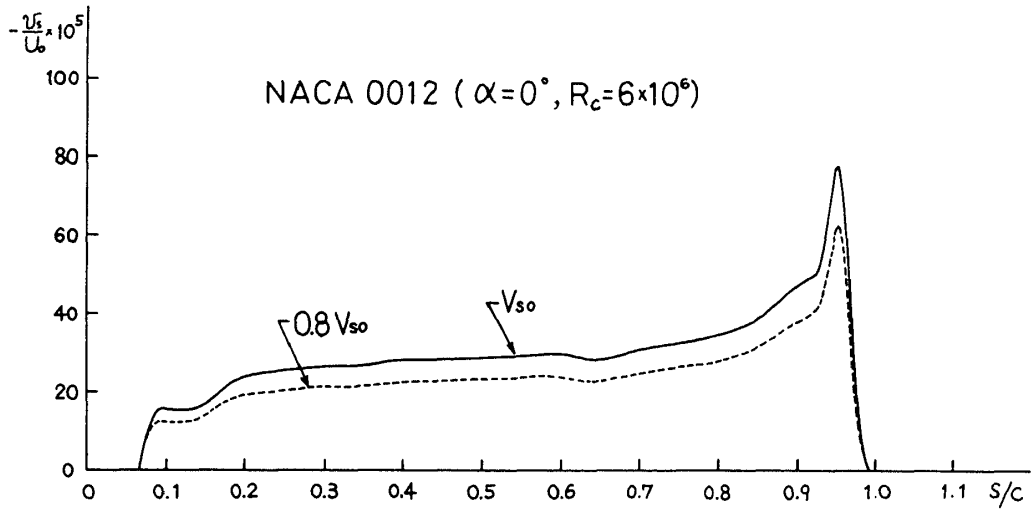
次に出発点以降の各点 S においては、出発点と同様なやり方を使うこともできるが、ここでは計算ステップ ΔS を小さくとり、 S_j ($\equiv S_{j-1} + \Delta S$) における初期推測値としては、 $S = S_{j-1}$ における α_r , α_i の値を用いることとした。 ΔS としては 0.01 又は $0.1 \times |\alpha_i / (d\alpha_i / ds)|$ のうち小さい方を採用した。この工夫により一般的な非平衡層流境界層に対して困難なく計算を進めることができた。

3. 計算結果

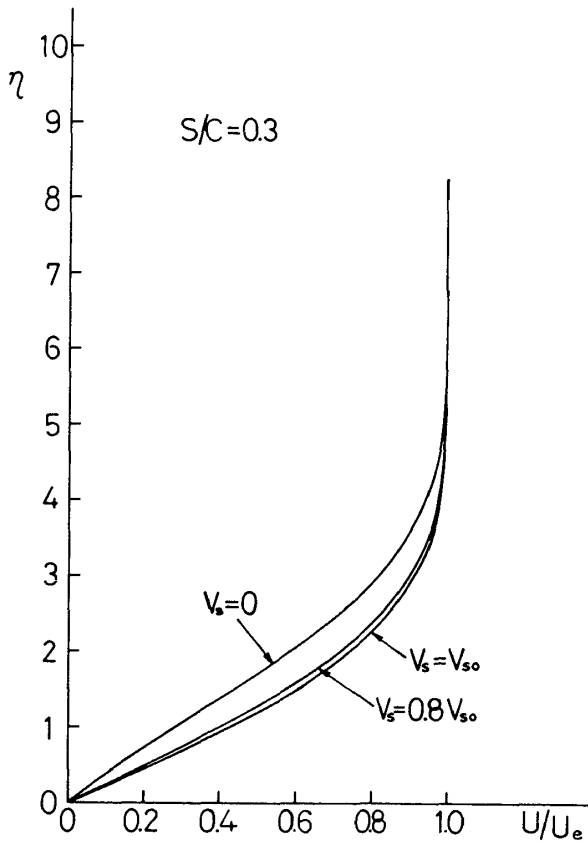
計算結果の一例として、NACA0012 翼型の $\alpha = 0^\circ$, $R_c = 7 \times 10^6$ の場合を示す。吸込みがない場合と、第 2 図に示すような吸込み速度を与えた場合とを計算した。第 2 図の吸込み速度 V_{S0} は、文献 10 の方法によって与えられた条件 ($\alpha = 0^\circ$, $R_c = 6 \times 10^6$) の下で全弦長にわたって層流が維持できるような吸込み速度として決められたものであり、 R_c が本計算例に近い所でのデータであるので、本計算において用いることにした。

第 3 図は $S/C = 0.3$ における $V_S = 0, 0.8V_{S0}$ および V_{S0} の時のそれぞれの境界層速度分布を示す。 $V_{S0} = 0$ の時にはすでに変曲点が現われて不安定な速度分布になっているのに対し、 $V_S \neq 0$ の時にはどちらも速度分布に変曲点は現われず、安定な速度分布になっている。

第 4 図は吸込みがない時の（無次元）増幅係数



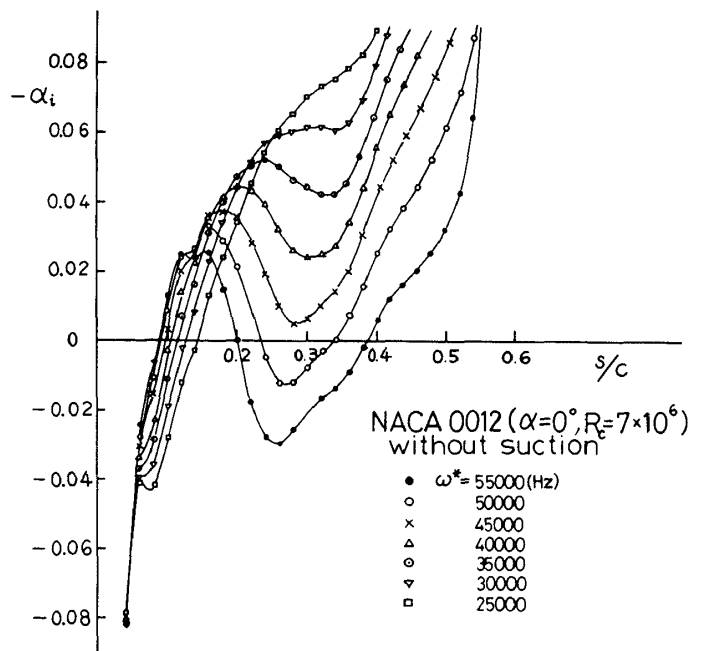
第2図 本計算で用いた吸込み速度分布



第3図 NACA0012 翼型表面上の速度分布
($S/c=0.3$, 吸込みありとなしの
場合の比較)

$-\alpha_i$ の計算結果を示す。擾乱の角速度 ω^* (Hz) をパラメータとして求めた。計算は層流剥離点 $S/c=0.55$ まで行なっているが、実際には $S/c=0.32$ で遷移が起るから、それ以後の計算は余り意味はない。

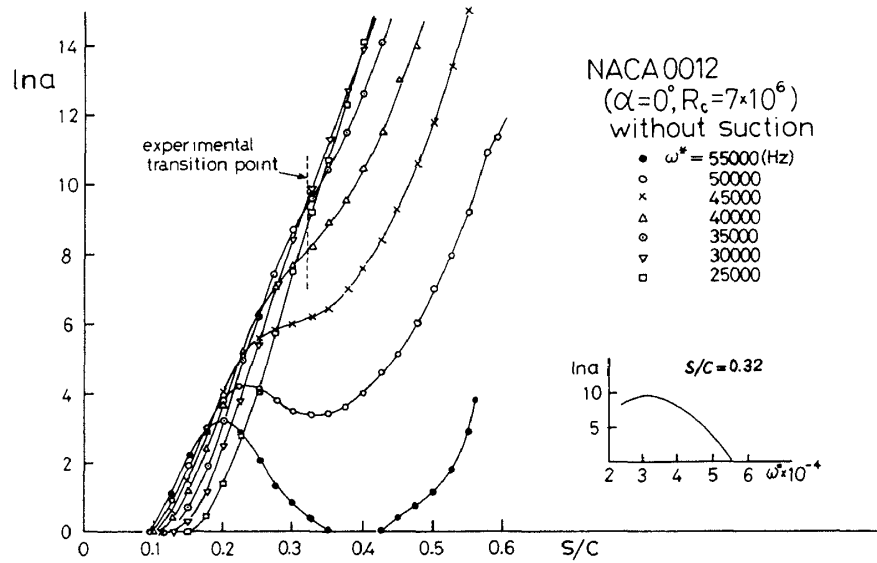
第4図の結果を(12)式から全増幅 a が計算できる。



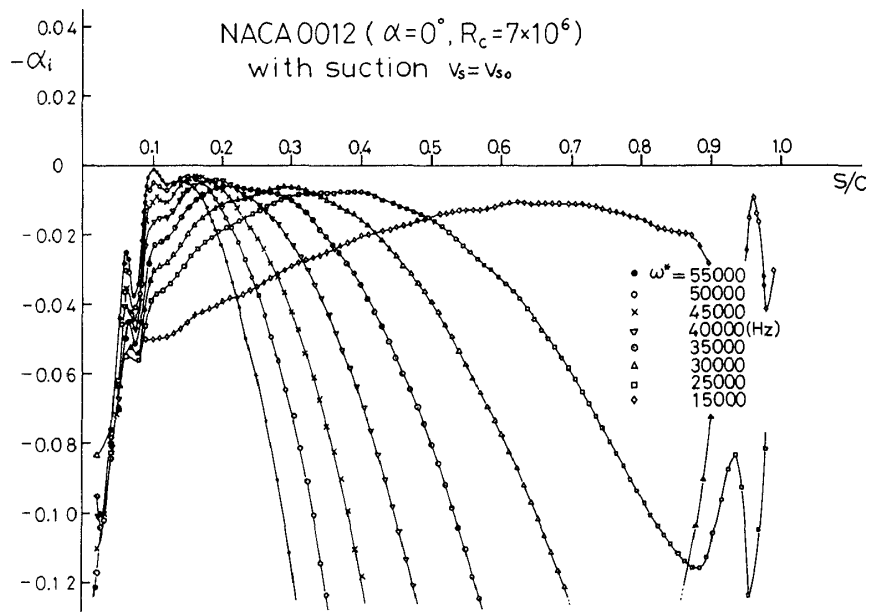
第4図 吸込みがない時の擾乱の増幅率

第5図は $\ln(a)$ を S/c に対してプロットした結果である。各角速度 ω^* に対して曲線が得られるが、それらの包絡線を取り、それが $\ln(a) = N$ の線と交わる点 S/c が遷移点となる。いま N として 9 をとると、 $S/c = 0.31$ となる。実験的遷移点は $S/c = 0.32$ であり、一致は非常に良好である。

次に吸込みがある場合であるが、第6図は吸込み速度として第2図の V_{so} を用いた時の増幅係数を示す。角速度 ω^* をパラメータとしてである。この結果から、吸込みを行なうと、ここに示したすべての擾乱



第 5 図 吸込みがない場合の擾乱の全増幅 a



第 6 図 吸込みあり ($V_s = V_{s0}$) の場合の擾乱の増幅率

は全弦長にわたって全く増幅しないことがわかる。吸込みによる境界層の安定化は非常に顕著である。

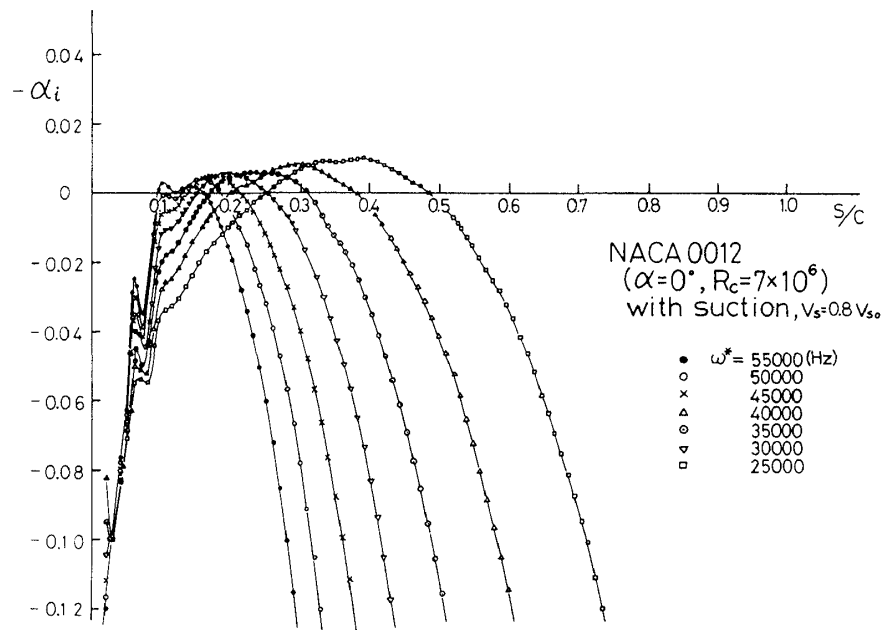
第 7 図は吸込み速度を少し減らして、 $0.8V_{s0}$ とした時の増幅係数の結果である。吸込みが減ったため、各角速度に対して若干の増幅領域が現われるが、全増幅 a が e^N を越えることはなく、従って遷移は起らない。

4. 検 討

吸込みを供う層流境界層について e^N 法を適用し、

吸込みによる境界層の安定化が非常に顕著であることを確認した。本計算で用いた吸込み速度 (第 2 図) は、経験的な遷移点判定法である Michel の方法を用いて決められた。しかしながら、序でも述べたようにこの方法は吸込みのない境界層の遷移点データのみによって経験的に導かれた法則であり、吸込みのある境界層に対しても正しいかどうかは検討を要する。

本計算結果はほんの一例にしかすぎないが、Michel の方法によって決められた吸込み速度は e^N 法

第7図 吸込みあり ($V_s=0.8V_{s0}$) の場合の擾乱の増幅率

によって計算しても遷移をひき起すことがなく、少なくとも定性的には Michel の方法が吸込みのある境界層に対しても正しいことを示している。しかし定量的にも正しいかどうかは今回の結果だけからは不明である。第6, 7図の結果を良く見ると、確かに吸込みの効果は明瞭に出ているが、その効果が強すぎるように思われるからである。 e^N 法によれば、擾乱の全増幅が e^N になった所が遷移点であるから、擾乱が第6図のように全く減衰してしまう必要はなく、ある程度の増幅は許してもよいわけである。従って、第6, 7図で用いた吸込み速度よりもっと少ない量でも遷移を起さないであろうと推測については本報告では検討できなかったので、次の機会に組織的に調べて報告するつもりである。

5. まとめ

遷移点の予測のため、半経験的な方法である e^N 法を、吸込みのある層流境界層に対して適用した。 e^N 法の基礎である Orr-Sommerfeld 方程式を、与えられた基本流に対して、翼のかなり前方領域から任意の下流側位置(但し層流剥離点よりは前方)まで、何らの問題なしに解くことができた。その際基本流は境界層方程式を Keller の Box法で解いて求め、さらに O-S 方程式の固有値問題を効率よく解くため、

固有値に対する初期推測値の与え方および基本流の表わし方に工夫を行った。

本方法は、吸込みによる層流制御翼の問題への応用を念頭において開発されたものであり、本結果はその目的に十分応えられるものであることを示している。

参考文献

1. H. Schlichting; Boundary-Layer Theory (1968) pp. 362-390, McGraw-Hill.
2. R. Michel; Etude de la transition sur les profils d'aile; établissement d'un critere de determination de point de transition et calcul de la traînée de profile incompressible, ONERA Rep. 1/1578A (1951)
3. P.S. Granville; The calculation of the viscous drag of bodies of revolution, The David W. Taylor Model Basin Rept. No. 849 (1953)
4. E.R. Van Driest and C.B. Blumer; Boundary Layer transition, free stream turbulence, and pressure gradient effects, AIAA J., Vol. 1, No.6, June 1963, pp. 1303-1306.
5. A.M.O. Smith and N. Gamberoni; Transition, pressure gradient, and stability theory, Proc. Int. Congr. Appl. Mech., 9th, Brussels, Belgium, Vol. 4, 1957, pp. 234-244.

6. J.L. Van Ingen; A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary-layer transition region. Rept. No. V.T.H71, V.T.H74, Delft, Holland.
7. T. Cebeci and P. Bradshaw, Momentum Transfer in Boundary Layers (1977), pp. 213-234, Hemisphere.
8. N. Itoh; A power series method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 17, No.36, 1974, pp. 65-75.
9. 石田洋治; 層流, 遷移, 乱流境界層および乱流伴流に適用できる統一的な速度分布族, 航空宇宙技術研究所報告 TR-523 (1978)
10. 石田洋治; 非圧縮 2 次元翼の層流制御設計法 (その 1) — 積分法に基づく吸込み速度の近似計算法 —, 航空宇宙技術研究所報告 TR-845 (1984)