

乱流の代数応力モデル

石垣 博*

Algebraic Stress Model of Turbulence

Hiroshi ISHIGAKI

1. まえがき

乱流モデルの検討がすすみ、応力バランスなどの測定が行われるにつれて、どの流れにどの程度のレベルの乱流モデルを用いて計算すべきかがわかりつつある。

ゼロ方程式の混合長モデルは乱れエネルギーの平衡関係(生成=消滅として対流と拡散項を無視する)にもとづくから、物理的正当性をもって適用できる範囲は速度分布の対数領域が壁近傍を支配する比較的簡単な壁境界層に限定される。 $k-\epsilon$ モデルなどの2方程式モデルは乱れの速度、長さスケールを輸送方程式で取扱い、対流と拡散も考慮するから、ゼロ方程式よりも守備範囲はかなり広い。

しかしそれでも、Prandtl-Kolmogoroff型の等方的乱流粘性を用いているため、異方性の強い流れは正しく計算できない。たとえば長方形ダクト内の2次流れは乱流垂直応力成分の差により発生するので、標準的 $k-\epsilon$ モデルを用いた計算では2次流れは出てこない。もちろん、乱流応力各成分の輸送方程式を個別に扱う応力方程式モデルのレベルまでゆけばこの問題はなくなるが、計算時間と記憶領域の増加は大きいし、多数ある未定係数の調節が不完全にしか行われていない現段階での応力方程式モデルは実用性からは遠い。

$k-\epsilon$ モデルと応力方程式モデルの中間レベルにあるものとして、ここに紹介する代数応力モデルがある。これは $k-\epsilon$ モデルに各応力成分の代数式を追加したもので、乱流応力の異方性を考慮でき、か

つ計算時間と記憶量も $k-\epsilon$ モデルと大差ない。

2. 代数応力モデルの誘導

乱流応力 $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式は、Navier-Stokes式の時間平均操作から、次のように表わすことができる。

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} - \epsilon_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} \quad (1)$$

ここで

$$P_{ij} \equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (2a)$$

$$\phi_{ij} \equiv \overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \quad (2b)$$

$$\epsilon_{ij} \equiv 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad (2c)$$

$$D_{ij} \equiv - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \delta_{ik} \frac{\overline{u_j p}}{\rho} + \delta_{jk} \frac{\overline{u_i p}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (2d)$$

ただし、 U_i は平均速度成分、 u_i は変動速度成分、 p は変動圧力である。

(1)式の左辺は平均流線に沿う $\overline{u_i u_j}$ の変化率(対流)、右辺は順に $\overline{u_i u_j}$ の生成、消滅、他成分への再分配、および(乱れ、圧力、分子による)拡散を表わす。(図1参照)

(1)を平均流の式と連立させて解を得るためには、変数が平均成分と $\overline{u_i u_j}$ で表わされている(2a)および(2d)の分子拡散項を除いた(2b)、(2c)、(2d)を U_i と $\overline{u_i u_j}$ の項で表示(モデル化)する必要がある。

変動圧力 p は純乱流変動の項と平均速度が関与する項に分けられるので、 ϕ_{ij} も純粋な乱れ相関 ϕ_{ij1}

* 航空宇宙技術研究所

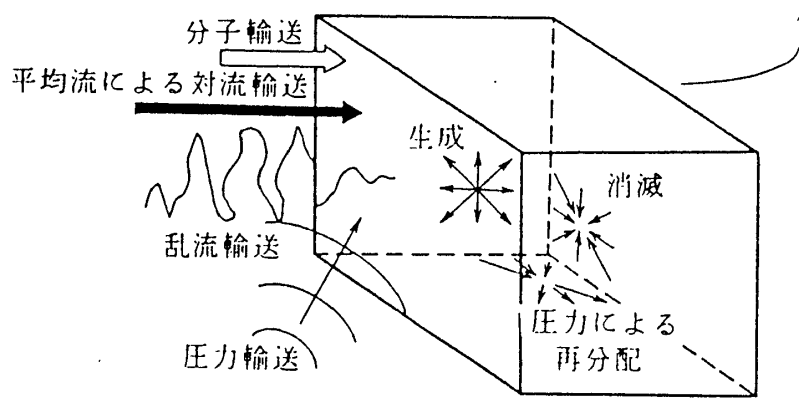


図1 応力輸送方程式の一般形

と平均流の影響を含む ϕ_{ij2} に分けてモデル化する。最もよく使われるモデルは次のようなものである。

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= \phi_{ij1} + \phi_{ij2} \\ &= -C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) \\ &\quad - C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで乱れエネルギー $k \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$, P は $P \equiv \frac{1}{2} P_{ij} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ である。一般に ϕ_{ij2} は ϕ_{ij1} に比べて小さい。

乱れエネルギーを熱に変換する散逸渦はスケールが小さく等方的であると考えられるので、等方的散逸を仮定して次のようにモデル化するのが普通である。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (4)$$

さて、(3)、(4)のようにモデル化して k と ε の式を別に解くことを前提に考えれば、式(1)を微分方程式たらしめているのは対流項と拡散項であり、この項を除けば式(1)の代数式となる。

最も簡単な場合として、対流、拡散項および ϕ_{ij2} を無視した場合を考える。

$$P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) = 0$$

すなわち

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = \frac{k}{C_1 \varepsilon} (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon) \quad (5)$$

となる。2次元境界層の場合を考えれば、乱流せん断応力の式は

$$-\overline{u_1 u_2} = \frac{k}{C_1 \varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

となり、 $\overline{u_2^2}$ を(5)から求めて代入すれば

$$-\overline{u_1 u_2} = \frac{2}{3 C_1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{C_1}\right)}_{C_\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (6)$$

となる。(6)は標準的 $k - \varepsilon$ モデルで使われる等方的乱流粘性式にはかならないから、 $k - \varepsilon$ モデルは $\overline{u_1 u_2}$ の対流、拡散項が無視できて $\phi_{ij1} \gg \phi_{ij2}$ の場合に物理的正当性をもつことがわかる。しかし、(5)は3成分の総和をとると、

$$0 = \frac{2k}{C_1 \varepsilon} (P - \varepsilon)$$

となって、 $P = \varepsilon$ の場合以外は総和関係を満足しない。そこで、楕円型の流れなどに対しては総和関係をみたすように(6)を形式的に拡張した次の乱流粘性式を使っている。

$$\begin{aligned} -(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) &= \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \\ \nu_T &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (7)$$

つぎに ϕ_{ij2} を加えた

$$P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij1} + \phi_{ij2} = 0$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k &= \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3 C_1} \delta_{ij} (P - \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - C_2}{C_1} (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。このとき、(6)の C_μ に対応する係数は定数で

はなく P/ϵ の関数となるが、総和関係はやはり $P = \epsilon$ の場合以外は満足されない。

さて、対流、拡散項を追加して総和関係を満足させるようにモデル化しようという一石二鳥をねらった2つのモデルがある。乱れエネルギー k の輸送方程式は、 k の拡散項を $D(k)$ として微分項を左辺にまとめれば、次のようになる。

$$\frac{Dk}{Dt} - D(k) = P - \epsilon$$

したがって $\overline{u_i u_j}$ の輸送項を k の輸送項でおきかえれば、(1)は代数式になる。

Launder は

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{Dk}{Dt} - D(k) \right) \\ &= \frac{2}{3} \delta_{ij} (P - \epsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

とおいて、(1), (3), (4)から次のモデル式を得た⁽¹⁾

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{k}{\epsilon} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (10)$$

(10)の対角成分の和をとれば両辺ともにゼロとなり、総和関係を満足する。しかし(9)では $\overline{u_1 u_2}$ などの輸送項がゼロとなり、非対角成分の輸送は考慮できない。

Rodi は

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D(k) \right) \\ &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P - \epsilon) \end{aligned} \quad (11)$$

とおいて、次のモデルを導いた⁽²⁾

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k = \frac{(1 - C_2)}{C_1 - 1 + \frac{P}{\epsilon}} \cdot \frac{k}{\epsilon} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (12)$$

(11)は非対角成分の輸送も考慮してあり、また(12)は総和関係を満足する。輸送項の比例係数も(9)では一定値であるが、(11)では関数形になっているのでより広い一般性を持ち、現在では専ら Rodi のモデルが使われている。

2次元境界層の場合のせん断応力表示式は次のようになる。

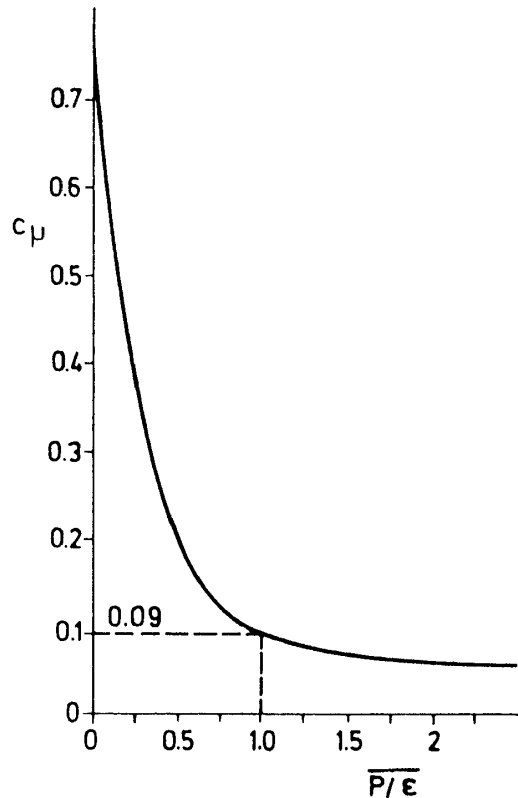


図2 経験関数 $C_\mu = f(P/\epsilon)$

$$-\overline{u_1 u_2} = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{(1 - C_2)(C_1 - 1 + C_2 \frac{P}{\epsilon})}{(C_1 - 1 + \frac{P}{\epsilon})^2}}_{C_\mu} \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (13)$$

$k - \epsilon$ モデルでは $C_\mu = 0.09$ で一定値であるが、(13)では P/ϵ の関数になる。Rodi はうすいせん断層についての実験データをまとめて、図2のような関数形を求めた。横軸は P/ϵ で P/ϵ のせん断層内の平均値である。この図から P/ϵ の大きな強いせん断流では $C_\mu = 0.09$ のよい近似であるが、噴流や後流のような弱いせん断流では C_μ は大きく変化する関数であることがわかる。したがって P/ϵ の小さい領域を流れの重要部分として含むような流れは、 $k - \epsilon$ モデルでは正しく計算しえないであろう。

3. 代数応力モデルによる計算例

つぎに、(12), (13)の Rodi タイプの代数応力モデルを用いた計算結果の例を紹介する。これらの例は2つの解説論文^{(3),(4)}から借用したものであり、出典などの詳しいことはそちらを見て頂きたい。

図3は正方形ダクト内の発達乱流の計算結果であ

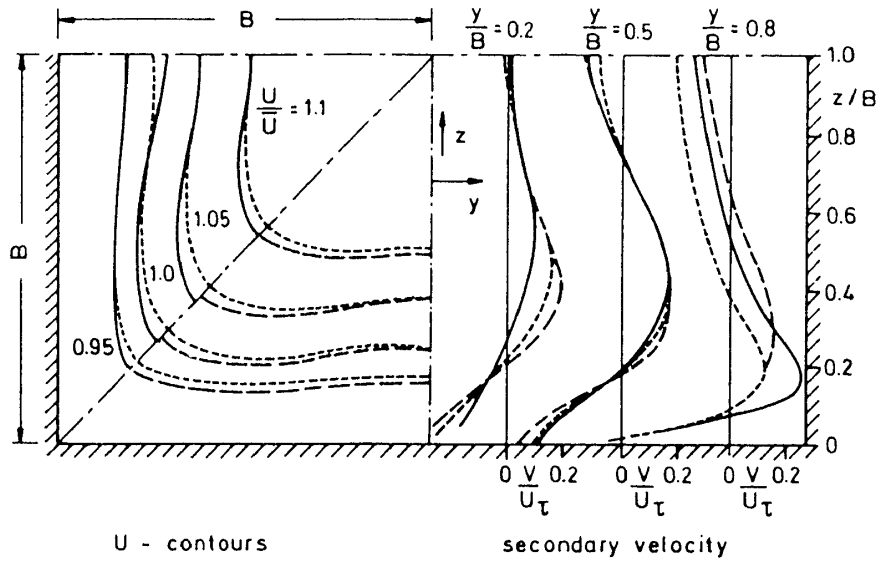
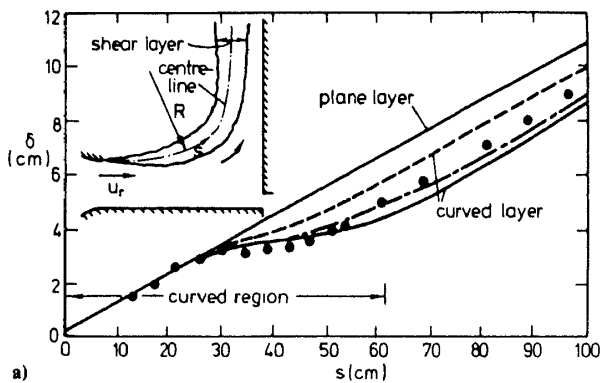


図3 正方形ダクトの発達した乱流

—— 代数応力モデル --- 応力方程式モデル 実験データ



a)

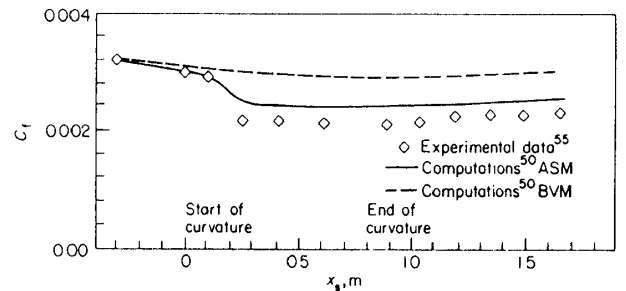
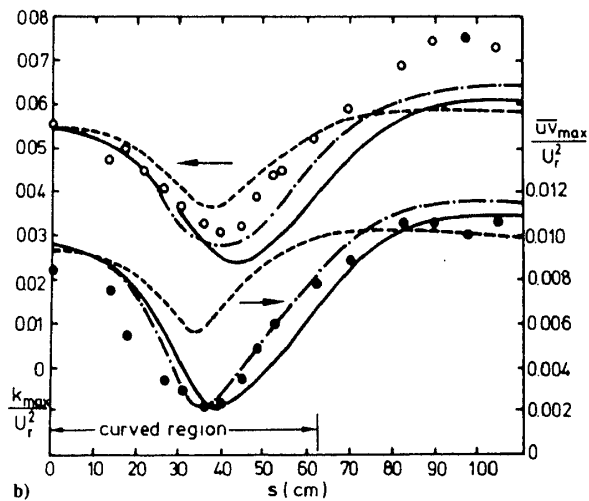


図5 凸曲面上の表面まさつ係数

--- $k - \epsilon$ モデル —— 代数応力モデル



b)

図4 湾曲した混合層の計算

----- $k - \epsilon$ モデル --- 代数応力モデル
—— 応力方程式モデル ○● 実験データ

る。 $(\overline{u_1^2} - \overline{u_2^2})$ により発生した2次流れのために等速度線はコーナーに引き寄せられるが、この2次流れは $k - \epsilon$ モデルでは計算できない。この計算例では代数応力モデルは応力方程式モデルにほとんど遜色のない結果を与えている。

図4は(a)図中にあるような湾曲混合層の計算で(a)は層幅 δ の成長、(b)は乱れエネルギーと乱流せん断応力の最大値の変化を示す。代数応力および応力方程式モデルでは流線曲率の影響がよくとらえられていることがわかる。図5は長方形ダクト流れの表面まさつの結果で、試験部中心は円弧の凸曲面、上流部と下流部は平面になっている。 $k - \epsilon$ モデルでは流線曲率への応答があらわれていない。

図6は流入部の乱れが低い場合(a)と高い場合(b)の 4° コニカルディフューザの計算結果である。代数応

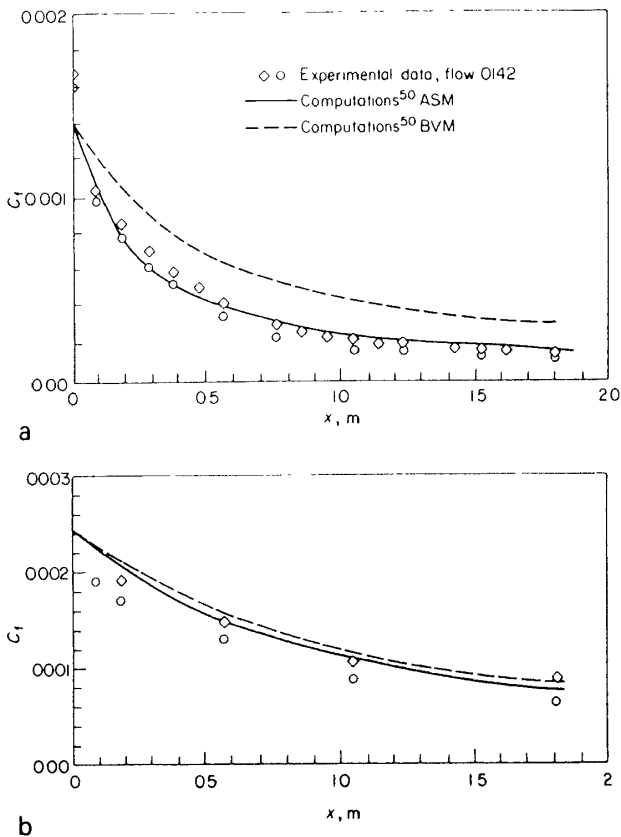


図6 4°コニカル・ディフューザの表面まっさつ係数
(a) 低コア乱れ, (b) 高コア乱れ
---- $k - \epsilon$ モデル, —— 代数応力モデル

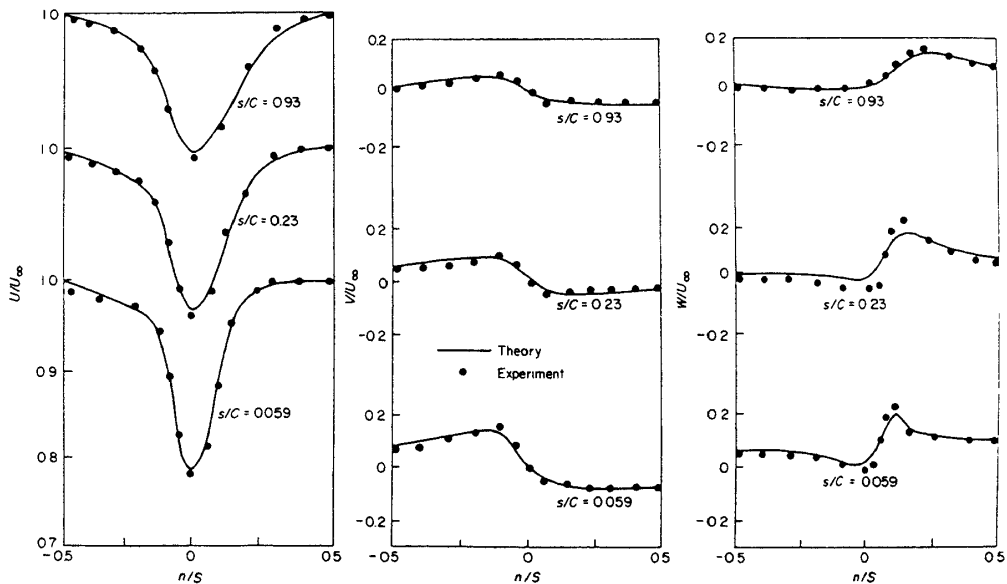


図7 回転翼後流の代数応力モデルによる三次元計算

力モデルは両方の場合に妥当な結果を与えている。

図7は回転翼の3次元後流についてのHahとLa-kshiminarayanaによる実験データと代数応力モデルの計算結果である。両者はきわめてよく一致している。

4. あとがき

代数応力モデルは k と ϵ の輸送方程式と6ケの代数方程式(12)を解くので、乱れの輸送方程式の個数で分類すれば2方程式モデルの範ちゅうに入る。乱れの非等方性、流線曲率、回転効果、など複雑乱流の諸要素をかなりよく計算できそうなことは計算例で見たとおりである。とはいえ、 $\overline{u_i u_j}$ の輸送項を k の輸送項でおきかえる(11)は便宜的なもので、物理的正当性は証明されていない。とくに $\overline{u_i u_j}$ が急激に変化するような流れでは、 $D \overline{u_i u_j} / Dt$ を厳密に取扱うと同時に拡散項に対してもっとゆるやかなモデル化を行う応力方程式モデルに頼らざるをえないであろう。

引用文献

- 1) Launder, B.E., Imperial College Report TM/TN/A8 (1971)
- 2) Rodi, W., ZAMM56, 219 (1976)
- 3) Rodi, W., AIAA J. 20, 872 (1982)
- 4) Launder, B.E., Heat and Fluid Flow 3, 171 (1982)

