

三次元亜音速非定常空気力のラプラス領域での数値計算

上 田 哲 彦*

Numerical Calculation in the Laplace Domain for Subsonic Unsteady Aerodynamic Forces Acting on a Finite Wing

by

Tetsuhiko UEDA
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

A method of obtaining subsonic unsteady aerodynamic forces in the Laplace domain is presented in this paper. The kernel function of singular integral equations based on the lifting surface theory is numerically computed in the exact way for the entire s -plane. In an example calculation of the generalized forces, a singularity appears in the left half of the p -plane at a high Mach number of eight-tenths. It is shown that the singularity is a pole of the order one and that it can be modeled by a simple rational function which is relevant to the aeroelastic analysis. The theory of functions is utilized for obtaining the singularity model for the generalized forces.

1. はじめに

アクティブ制御技術が近年注目されるに至り、ラプラス領域で与えられる非定常空気力が再び議論されるようになった。すなわち、空気弾性系を制御の対象とする場合、弾性体としての翼に作用する非定常空気力を、如何にしてラプラス変換面である S 平面で表現するか、あるいは、系を記述する微分方程式の中に如何に組み込むかが問われている。アクティブ制御により、突風荷重を軽減したり、フラッターモードを制御しようとする場合、その制御則を設定しなければならないが、それを設計する際に、非定常空気力を精度良くシステム要素として表現することが必要になってくる¹⁾。特に、操舵面により発生す

る非定常空気力は、制御力そのものであり、系にとって非常に重要な要素となる。

空気力を制御システムの中に組み入れられる形に表現する方法として、これまで近似的に行われてきた方法は、以下に述べる2通りがある。一つの方法は、これまで30年以上の間にフラッター解析屋達によって精力的に研究されてきた振動数領域の空気力を利用するものである^{2,3)}。調和振動空気力は、複素 s 平面の虚軸上の空気力と解釈することができる。したがって、空力伝達関数を物理的考察により形を仮定し、その係数を虚軸上での空気力を使って定めることにより s 平面上の空気力を求めることができる。当然のことながら、この方法で求めた空力伝達関数は、虚軸近傍では精度が良いが、虚軸から離れるに従って、近似精度が期待できない。調和空気力から任意の安定な運動に対する空気力への拡張の妥

* 航空宇宙技術研究所 機体第一部

当性については、歴史的な論争があった。しかし、解析接続によりその正当性は保証されている。⁴⁾ もう一つの方法は、空気力の時間履歴応答を求めて曲線の当て嵌めを行い、当て嵌めた曲線のラプラス変換を求めることにより s 平面上の空気力を得るものである。^{5,6)} Stark は、非圧縮流れにある有限翼について精度の良い時間関数を提示している。彼は、過渡応答の正規化された衰退関数 (deficiency function) は、圧縮流れにおいては、翼の変形モードに依存しないと仮定した。また、亜音速流れおよび超音速流れについてもある形の衰退関数を提案している。

しかし、亜音速流れの中の有限翼については、 s 平面の虚軸から離れた左半面 (安定側) における空気力の特性を、厳密に議論するに耐える方法は、これまでに見あたらない。そこで、これを本研究の目的とする。

本論文では、亜音速揚力面上の揚力分布のラプラス変換を直接計算する方法を示す。その方法は、振動数領域でのダブレット・ポイント法 (DPM)⁷⁾ を一般化するものであり、任意形状の翼に適用できる。更に、本方法は、他の振動数領域の空気力を用いたり、時間領域の空気力を用いたりする近似法とは異なり、ラプラス変換をするときに如何なる近似をも用いないという意味で、厳密なものである。

また、この方法により計算された空気力の特異点を、制御システムに都合の良い形にモデル化する方法を示す。

2. 積分方程式と解法

ラプラス領域において、薄翼面上の揚力分布と吹き上げ速度を結びつける目的とする方程式は、振動数領域と類似の形をとる。⁸⁾

$$\bar{w}(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\text{wing}} \bar{L}(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta \quad (1)$$

ここで、 \bar{w} と \bar{L} は、それぞれ一様流速で無次元化した吹き上げ速度と動圧で無次元化した揚力分布である。この方程式において、物理量はすべて無次元して用いる。方程式(1)における特異核関数 K は次式により与えられる。

$$K(x_0, y_0) = M^2 e^{-p\lambda} / (R\lambda) + e^{-px_0} B(p, r, X) \quad (2)$$

ここで、

$$X = \beta^{-2}(x_0 - MR) \quad (3a)$$

$$R = (x_0^2 + \beta^2 r^2)^{1/2} \quad (3b)$$

$$r = |y_0| \quad (3c)$$

$$y_0 = y - \eta \quad (3d)$$

$$x_0 = x - \xi \quad (3e)$$

$$\lambda = x_0 - X = M(X^2 + r^2)^{1/2} \quad (3f)$$

$$p = bs/U \quad (3g)$$

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad (3h)$$

座標のとり方は、第1図に示す。

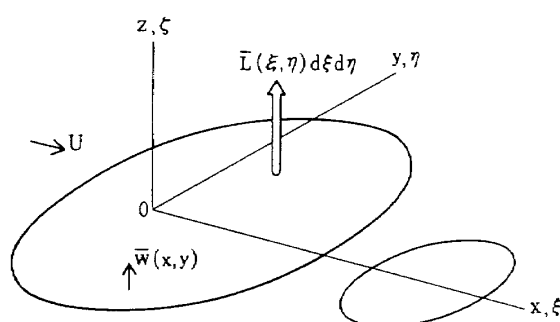
(2)式の右辺第2項の関数 $B(p, r, X)$ は、次の積分形で表現することができる。

$$B(p, r, X) = \int_{-\infty}^X e^{-pv} (v^2 + r^2)^{-3/2} dv \quad (4)$$

この関数は、無限級数に展開される。

$$\begin{aligned} B(p, r, X) = & \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m}(p, r, X) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m+1}(p, r, X) \\ & + \frac{p^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{pr}{2}\right)^{2n} \{ \Psi(n+1) \\ & + \Psi(n+2) \} - \frac{p^2}{2} \ln \left| \frac{p}{2} \right| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \\ & \cdot \\ & \times \left(\frac{pr}{2}\right)^{2n} - i \arg[p] \frac{p^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \\ & \times \left(\frac{pr}{2}\right)^{2n} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに $\Psi(n)$ は、引数が整数のポリガンマ関数であ



第1図 揚力面と座標

る。(5)式右辺の第1項および第2項の総和に現われる $U_n(p, r, X)$ は、次の漸化式を用いて計算することができる。

$$U_n(p, r, X) = \frac{p^2}{(n-2)n!} \frac{X^{n-1}}{\sqrt{X^2+r^2}} - \frac{(pr)^2}{n(n-2)} U_{n-2}(p, r, X) \quad (n \geq 2) \quad (6)$$

この漸化式の初項および(5)式に必要な U_0 は次式となる。

$$U_0(p, r, X) = \frac{1}{\sqrt{X^2+r^2}(\sqrt{X^2+r^2}-X)} \quad (7a)$$

$$U_1(p, r, X) = -\frac{p}{\sqrt{X^2+r^2}} \quad (7b)$$

$$U_2(p, r, X) = -\frac{p^2}{2} \left\{ \frac{X}{\sqrt{X^2+r^2}} + \ln(\sqrt{X^2+r^2}-X) \right\} \quad (7c)$$

積分表示をした(4)式では、複素数 p の実数部が負の場合(p 平面の左半面に対応する)に積分値は有限確定値とならないが、(5)式を用いれば、解析接続により定義される関数値を計算することができる。

積分方程式の離散化については、調和運動に対して開発したDPMの手法に従う。DPMで用いた調和核関数を、(2)式で記述されている核関数に入れ替えれば良い。台形状の要素については、DPMと同様に、要素幅中央位置1/4要素弦長にダブレット点 (ξ_i, η_i) を、同3/4要素弦長に吹き上げ点 (x_i, y_i) をそれぞれ置く。 i 番目要素の面積を d_i として、積分方程式(1)式は、次の様な複素係数をもつ連立1次代数方程式に離散化される。

$$\bar{w} = D(p)\bar{L} \quad (8)$$

ここで、

$$D(p) = [d_{ij}] = \frac{1}{8\pi} [d_j K(x_i - \xi_j, \eta_i - \eta_j)] \quad (9a)$$

$$\bar{L} = \{\bar{L}(\xi_j, \eta_j)\} \quad (9b)$$

$$\bar{w} = \{\bar{w}(x_i, y_i)\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N_A) \quad (9c)$$

特異積分のアングラの主値を考慮して、 $r > \sigma$ かつ

$X > 0$ となる上流要素については、吹き上げ速度を次の核関数により評価する。

$$K(x_0, 0) = M^2 e^{-p\lambda} / (R\lambda) + e^{-p x_0} \{ B(p, 0, -X) - \pi^2 / (6\sigma^2) - p^2 (\ln \sigma - 1) - 2 \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m}(p, 0, -X) \} \quad (X > 0) \quad (10)$$

ここで、 σ は、要素幅の半分である。吹き上げ速度は翼の変形 $h(x, y, \tau)$ と

$$\bar{w}(x, y) = \partial \bar{h}(x, y) / \partial x + p \bar{h}(x, y) \quad (11)$$

と関係付けられ、ここで、上付き記号 $-$ は、無次元時間 $\tau = bt/U$ に関するラプラス変換を表わす。以上より、(8)式の解は最終的に

$$\bar{L} = D^{-1}(p) (\bar{h}_x + p \bar{h}) \quad (12)$$

となり、ここで

$$\bar{h} = \{\bar{h}(x_i, y_i)\} \quad (13a)$$

$$\bar{h}_x = \{\partial \bar{h}(x_i, y_i) / \partial x\} \quad (13b)$$

である。もし、 k を調和振動の無次元振動数として、 $p = ik$ と置くと、上述の過程は、振動数領域のDPMに完全に一致する。

また、変形モード $h_j(x, y)$ によって生じる揚力分布 $\bar{L}_j(x, y)$ の一般化空気力は、 p の関数として

$$q_{ij}(p) = \iint_{\text{wing}} h_i(x, y) \bar{L}_j(x, y) dx dy \quad (14)$$

と計算される。

3. 数値計算例とその結果

3.1 非圧縮流れの矩形翼

数値計算例として、非圧縮流れ($M=0$)の中におかれたアスペクト比3の矩形翼について、 s 平面上の非定常空気力を計算した。考慮した変形モードは、以下の4個の左右対称モードである。

$$h_1 = 1 \quad (\text{並進運動})$$

$$h_2 = 1.2 \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 0.2 \left(\frac{y}{3}\right)^4 \quad (\text{曲げ変形})$$

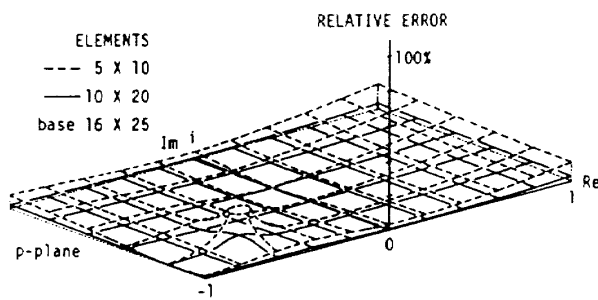
$$h_3 = x - 1 \quad (\text{ピッチング運動})$$

$$h_4 = (x-1) \left\{ 1.2 \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 0.2 \left(\frac{y}{3}\right)^4 \right\} \quad (\text{振り変形})$$

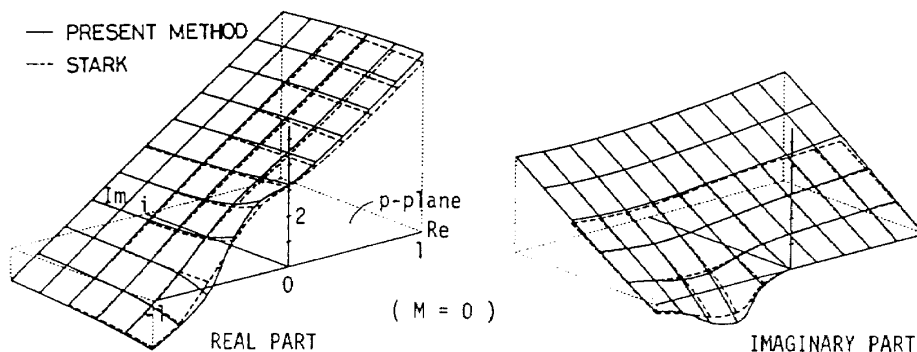
ここで、座標はすべて翼根半弦長 b により無次元化されたものである。これら 4 個のモードは、参考文献 6) の例題と同じである。従って、両者の結果を直接比較することができる。

まず、複素数 p について他に厳密な解が存在しないので、要素数を変えて計算し、解の収束性を検討した。その結果を第 2 図に示す。縦軸は、一般化空気立 q_{13} について、翼弦方向 16 要素、半翼幅方向 25 要素の解を基本にした相対的な誤差を示したものである。この図から、示された p 平面全体に亘って良好な収束状況を見てとれる。 $p = -0.6 + 0.2i$ 付近で 5×10 の解の精度が悪化しているように見えるが、これは q_{13} の絶対値が零に近く、少しの零点のずれが大きく表われているものであって本質的なものではない。片側 200 要素の解で十分収束しているといえよう。なお、左右対称性を利用して自由度は全翼の半分で計算を行った。

次に、この 400 要素を使った解を Stark の結果と比較した。第 3 図に、 q_{13} について両者を比較して示す。両者の一致は、図示した p 平面全体について良好である。ここで示された様に、全く解法の異なる二つの解が一致することは、非常に説得力をもつ。



第 2 図 解の収束状況 q_{13}



第 3 図 過渡応答近似との比較 q_{13}

Stark は、過渡応答の正規化した衰退関数を次式で与えた。

$$\phi(\tau) = \{a / (a + \tau)\}^n \tag{15}$$

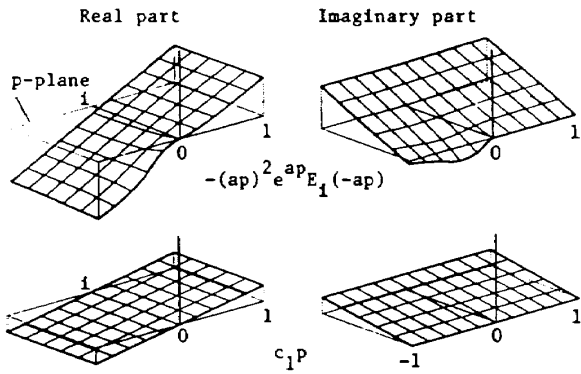
(15) 式のラプラス変換は

$$L[\phi(\tau)] = \frac{(-1)^n p^{n-1} a^n}{(n-1)!} e^{ap} E_i(-ap) + \frac{(-1)^n a^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{n-2} p^{n-m-2} (-a)^{-m} \cdot m! \tag{16}$$

と計算され、ここで E_i は積分指数関数である。(16) 式の成分を $n=3$, $a=5.5$ の場合について第 4 図に示す。この変数値は、Stark がこの翼について設定したものであり、この図から、(15) 式が非圧縮流れについてラプラス変換を得るのに適した関数で、ほぼ本質的なものであると見る事ができる。本方法は、ラプラス変換を求めるには、近似法を用いていないことを再び強調しておきたい。

3.2 圧縮流れの矩形翼

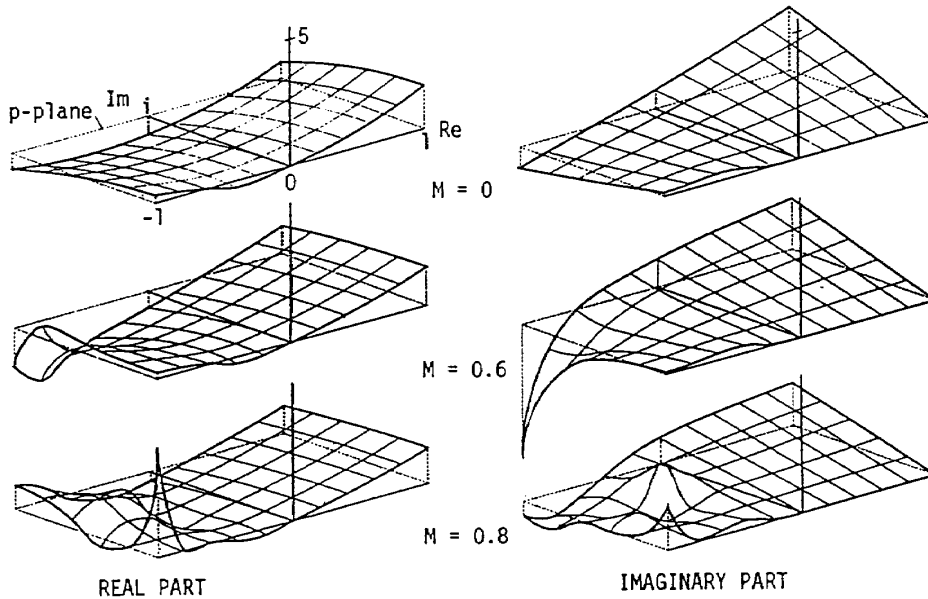
同じ矩形翼に対して、流れの圧縮性の効果を 200 要素の解を使って調べた。圧縮性流れについては、虚軸上の空気力を除いて信頼できる解はこれまで見あたらない。一般化空気力 q_{12} について、三つの異なるマッハ数、0, 0.6, 0.8 の場合の結果を第 5 図に示す。また参考のため、 $p = -0.4 + 0.4i$, $M = 0.8$ の一般化空気力を表 1 に掲げる。 $M = 0.8$ の場合、 p 平面の左半面で複雑に空気力が変化している。計算点は格子状に行っており、間はスプラインで補間したものである。従って、変化の大きなところは格子点間は精度が期待できない。そこで、実数部が $-0.8 \sim 0.4$, 虚数部が $0.4 \sim 0.8$ の p 平面の正方領



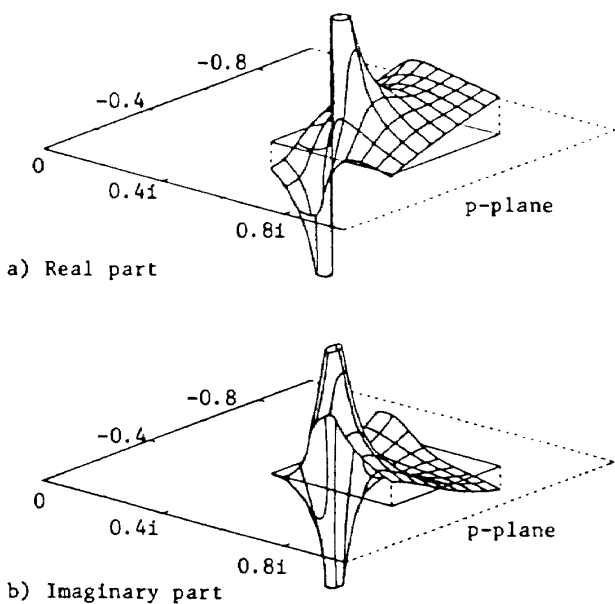
第4図 $\phi(\tau)$ のラプラス変換成分

表1 一般化空気力 ($P = -0.4 + 0.4i$, $M = 0.8$)

(i,j)	q_{ij}	(i,j)	q_{ij}
(1,1)	-1.6756 + 0.03321i	(1,2)	-0.5075 + 0.00021i
(2,1)	-0.5075 + 0.00021i	(2,2)	-0.2000 - 0.01551i
(3,1)	1.1984 - 2.12011i	(3,2)	0.3460 - 0.63941i
(4,1)	0.3296 - 0.63351i	(4,2)	0.1353 - 0.22941i
(1,3)	0.9375 + 4.17311i	(1,4)	0.3050 + 1.26751i
(2,3)	0.2886 + 1.27341i	(2,4)	0.0930 + 0.49931i
(3,3)	-0.6217 + 0.06171i	(3,4)	-1.8717 + 0.10391i
(4,3)	-1.8439 + 0.11711i	(4,4)	-0.6825 + 0.06901i



第5図 圧縮性の影響 q_{12}

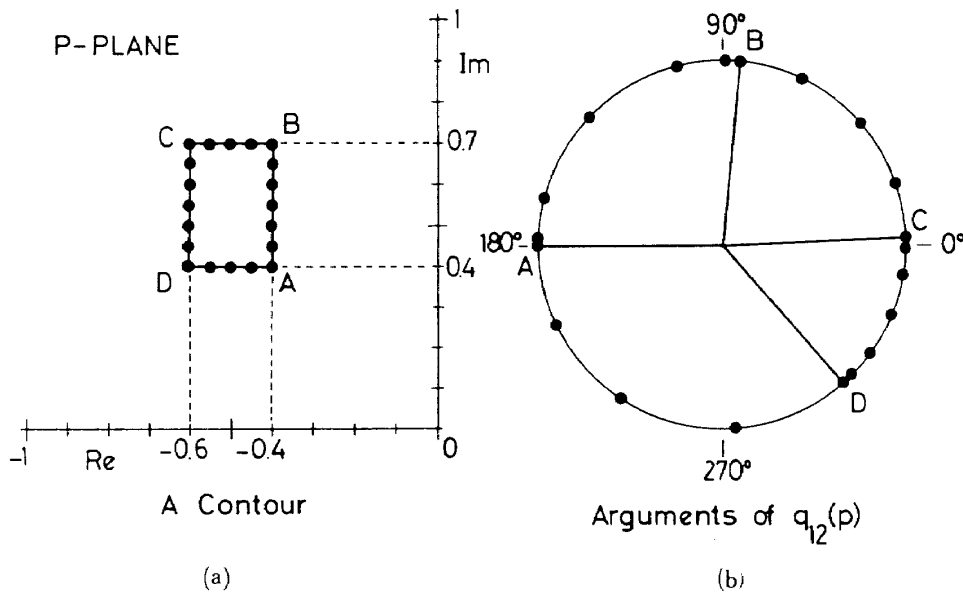


第6図 空気力詳細 (q_{12} , $M = 0.8$)

域において、より詳細な格子点について空気力を計算した。結果を第6図に示す。眺める位置が第5図とは異なっていることに注意する。この図から、領域内に特異点が存在していると考えるのは自然である。そこで、この特異点の特性を更に検討した。

3.3 空力特性根

まず、この特異点の次数を明らかにするために、複素関数論の手法を用いて、これを取り囲む閉曲線上で、複素数である関数値の偏角を計算した。結果を第7図に示す。7a図の矩形の閉曲線ABCDの各点についての偏角は7b図に単位円上の点として図示した対応を示す。すなわち、 p の値がABCDと左まわりに動く時、関数値の偏角はA点の約180度から右まわりに360度回転する。この閉曲線内に



第 7 図 特異点まわりの偏角

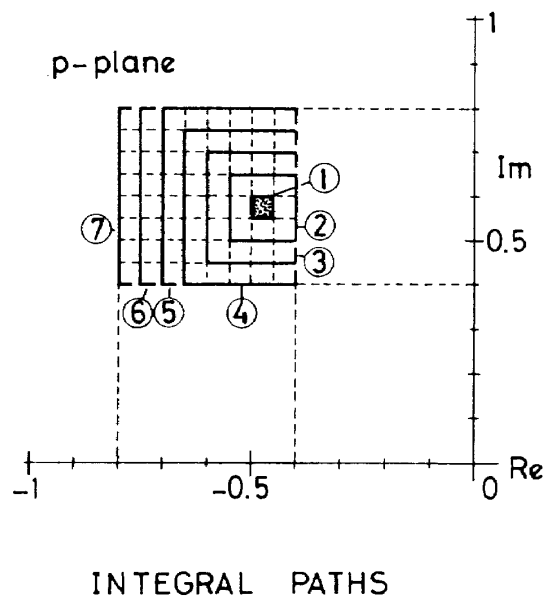
は、零点が 1 個も存在していないと思われるので、このことは、閉曲線内に 1 位の極が 1 個存在していることを示している。すなわち、この空気力は、ABCD 内に空力特性根を持つということが言える。

3.4 特性根の位置

根の位置をより正確に求める方法として、直接関数値を指標にして、繰り返し計算により探索する方法が考えられるが、求める点が特異点であることから数値的に扱い難く、また、特異点を零点に変換してもマトリックスの次数が大きくなると計算効率が悪くなる。そこで次の様な解析的性質を利用する方法を試みた。特異点が 1 位の極であることが判っているので、この特異点の留数を求める。

$$A = \frac{1}{2\pi i} \oint_c q_{12}(p) dp \quad (17)$$

この計算は数値的に行うが、実際どの程度の精度で求められるかを検討するため第 7 図の格子点での計算値を利用して、第 8 図に示す閉曲線①～⑦について、シンプソンの台形則で(17)式の積分値を計算した。結果を表 2 に示す。これを見ると、①の場合は、関数値が大きく変化する割に積分点が少ないことで、値が他の曲線と大きく異なっているが、あとの残りの場合は、安定した値を示しており、数値積分により留数が十分計算できることを表している。この様に、留数が、正確な値の位置を必要としないで求め



第 8 図 留数のための積分路

ることができる。この留数から逆に極の位置を求めることが考えられる。すなわち、この極の近傍での関数値は、この極の貢献が大きいと思われるため

$$f(p) \approx A / (p - a) \quad \text{for } |p - a| < \epsilon \quad (18)$$

と近似することができる。ここで、 a は極の位置とする。これより

$$a = p - A / f(p) \quad (19)$$

と、 a について解ける。表 2 の⑤の値を留数として、特異点を囲む最小格子 4 点について、(19)式により、 a の値を計算した結果を表 3 に示す。各 p の値によ

ってややバラツキが見られる。精度よく求めるためには、より正確な留数値を使って、求まった a を再び P に置き換えた繰返し演算をすれがよい。ここでは、4点の平均値を特異点の位置 $a = -0.463 + 0.561i$ とする。

表2 数値積分による留数A

contour	results
①	$-0.04013 + 0.00639i$
②	$-0.08156 + 0.01298i$
③	$-0.08275 + 0.01317i$
④	$-0.08317 + 0.01324i$
⑤	$-0.08322 + 0.01325i$
⑥	$-0.08321 + 0.01324i$
⑦	$-0.08314 + 0.01323i$

表3 特異点位置

($A = -0.08322 + 0.013245i$)

p	a
$-0.45 + 0.55i$	$-0.4635 + 0.5428i$
$-0.45 + 0.60i$	$-0.4450 + 0.5624i$
$-0.50 + 0.55i$	$-0.4790 + 0.5616i$
$-0.50 + 0.60i$	$-0.4641 + 0.5782i$

3.5 空気力のモデル化

さて次に、この様にして得られた特異点の特性を考慮して空気力をシステム方程式の中に組み入れられる形にモデル化することを考える。線形系の議論であるから解の重ね合わせを前提とし、特異点から離れた部分は他の項からの貢献度が高くなるとして、ここでは、この特異点のみをモデル化してみる。満たすべき条件は、

- (イ) 実験係数をもつ有理関数である
- (ロ) 特異点での留数が一致する

とする。条件(ロ)は、空気力の特異点モデルを $f_a(p)$ と表わすと

$$\lim_{p \rightarrow a} (p-a) f_a(p) = Res \ q(a) \quad (20)$$

と書ける。これらの条件と、 a が複素数であることから $f_a(p)$ を次式に仮定する。

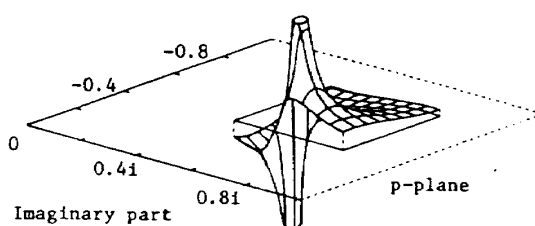
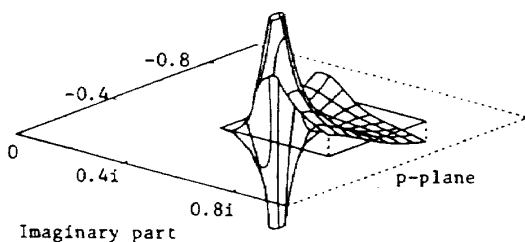
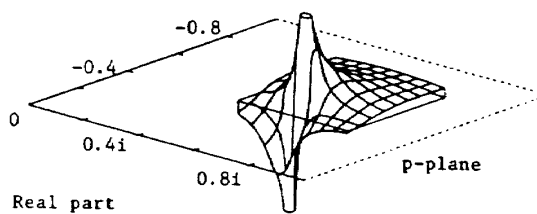
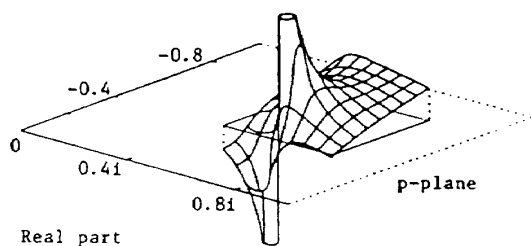
$$f_a(p) = \frac{C_1 p + C_0}{(p-a)(p-a^*)} \quad (21)$$

ここで、 C_1, C_0 は実数であり、 $*$ は共役複素数を表わす。(20)式より C_1, C_0 は一義的に定まる。これまでに求めた留数と特異点位置を用いて係数を計算すると

$$f_a^{12}(p) = \frac{-0.166p - 0.09192}{p^2 + 0.926p + 0.5291} \quad (22)$$

Exact $q_{12}(p)$ (M=0.8)

Singularity Model $f_a^{12}(p)$



第9図 特異点空気力モデル

となる。左辺の上付き文字は、近似した一般化空気力を表わす。特異点モデル(21)式がどの程度の近似になっているかを見るために、 p 平面上の特異点近傍で元の空気力と比較して第9図に示す。特異点から遠い処では両者に差があるが、求めたモデルが特異点をよく表現していることが分かる。参考までに、(21)式の過渡応答は、 $a = u + v_i$ として

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{C_1 p + C_0}{p(p-a)(p-a^*)} \right] \\ = \frac{C_0}{(u^2 + v^2)} [e^{u\tau} \cos v\tau - 1] \\ + \frac{C_1 u^2 + C_0 u + C_1 v^2}{v(u^2 + v^2)} e^{u\tau} \sin v\tau \quad (23) \end{aligned}$$

である。

4. おわりに

揚力面理論においてこれまで近似的にしか扱うことのできなかつた s 平面上のラプラス変換空気力を厳密な形で数値計算する方法を示した。計算例として示した矩形翼の空気力でマッハ数を上げていくと p 平面(無次元化 s 平面)の安定側の振舞が複雑になり、1位の極とみなされる特異点が現われた。そして、この特異点は、留数の定理を応用することにより2次の有理関数で良くモデル化されることを明らかにした。

参 考 文 献

- 1) H. Ashley and W.W. Boyed: On Choosing the Best Approximations for Unsteady Potential Theory, Küssner Anniversary Colloquium, Göttingen, Germany, Sept. 1980, pp. 25-43.
- 2) K.L. Roger: Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design, AGARD-CP-228, Aug. 1977.
- 3) R. Vepa: Finite State Modeling of Aeroelastic Systems, NASA CR-2779, Feb. 1977.
- 4) J.W. Edwards: Unsteady Aeroelastic Modeling and Active Aeroelastic Control, SUDAAR 504, Feb. 1977.
- 5) Y. Miyazawa and K. Washizu: A Finite State Aerodynamic Model for a Lifting Surface in Incompressible Flow, AIAA J. Vol. 21, No. 2, 1983, pp. 163-171.
- 6) V.J.E. Stark: General Equations of Motion for an Elastic Wing and Method of Solution, AIAA J. Vol. 22, No. 8, 1984, pp. 1146-1153.
- 7) T. Ueda and E.H. Dowell: A New Solution Method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow, AIAA J. Vol. 20, No. 3, 1982, pp. 348-355.
- 8) T. Ueda: Integral Equation of Lifting Surfaces in Laplace Domain and Analytic Continuation of Its Pressure Kernel, NAL Rep. TR-795T, Jan. 1984.