

液滴スプラッシュのシミュレーション

西川 進 栄* 鈴木 敬 史* 秋 山 聡*

Numerical Simulation of Splash of Droplet at Unit Gravity

by

Nobuhide NISHIKAWA, Takashi SUZUKI
and Satoshi AKIYAMA*Faculty of Engineering, Chiba University*

ABSTRACT

In this paper descriptions are given of a numerical calculation carried out in a study of fluid motion of a liquid after impingement of a droplet with a velocity of 3.2 m/s onto the surface of water with a depth of 3 mm in a vessel.

A droplet diameter of 2.3 mm was chosen. The numerical scheme developed to calculate the axisymmetric form Navier-Stokes equation was a donor cell version of the SMAC scheme.

The typical results are shown in the images of Surface Model Computer Graphics for understanding of the dynamics of fluid.

1. はじめに

ここに示される液滴が液面に突入する問題はかなり古来より科学者の関心を引き、流体の大家も深く探究している^{1,2)}1960年代にも先端的な研究の対象となった。これは以下のような現象と本質的に同じであるためである。液体→固体入射ではタービン・ブレードや雨中の飛行体の表面侵食や土壌の変化をもたらし、固体→固体入射では隠石によるクレータ生成と密接に関連する状態が得られる。

近年、計算機本体の発達に加え周辺機器にも革新の波が及んでいる。流体研究分野でもグラフィック機器の活用が積極的にとり組まれ始めている。現状では、線画的なもの(タイヤ・フレーム型)は普及

しているが空間的三次元画像では成功例^{3,4)}はそう多くは知られていない。

さて周辺機器の様態が我々の研究対象を制約したり発展させる例があろうと思われるが、そんな後者の例のひとつとして我々の例を以下の報告に示したい。すなわち流体そのものが変形、流動するさまをグラフィックスのディスプレイの中に表現、再現し、シミュレーションの原義に一致し、広い意味をもたらせる形で数値結果の表示を試みているのである。

今日、非圧縮流れに広範に適用され、ソフトウェアハウスなどでも標準的ソフトともなっているMAC法は本来は自由表面流に対し提案されたものである。この方法はHarlowらのMAC法⁵⁾では圧力についてのポアソン方程式を解く必要があり、その点を改良するためAmsdenら⁶⁾はあるスカラー・ポテンシャルについてのポワソン方程式を解くことにより、計

* 千葉大学工学部機械工学第二学科

算時間を短縮した。さらに圧力変化を速度修正と連続の式の連関から決定し、全くポワソン方程式を解く必要をなくしたのがHirtらの⁷⁾HSMAC法である。一方、Chorinら⁸⁾にはじまるArtificial Compressibilityを用いて圧力の時間変化を出す型のMAC法も発展し、Steger & KotlerがWake⁹⁾に用い、KwarらによりNASA-AMESにおいてINS-3Dコード(定常流れ)にも取入れられた。^{10,11)}

さて本報告で扱うような自由表面問題は境界形状がデカルト格子に収まる現象でないから、境界の扱いが誤差を左右する。その点についての改良としては矩形格子を依然として用いるが、ある格子セルの中の液体含有率を未知変量として導入したNicholsらのOFの方法¹²⁾とFrommによる局所表面座標を用いたインク・ジェットの数値例^{13,14)}がある。

2. 基礎方程式

本報告では液滴衝突現象の比較的初期で、軸対称として現象を扱う。したがって液滴の中心から落下方向へ張られる直線を $R=0$ とし、液滴の底を $Z=0$ とした円柱座標を用いる。時間軸は最初の液面への接触の時 $t=0$ とする。これらにより以下のような連続の式、ナビエ・ストークス式が非圧縮層流として得られる。ただし U, V は R, Z 方向の速度成分である。

$$\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{R} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial R} + \frac{\partial uv}{\partial z} + \frac{u}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + g_R + \nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial uv}{\partial R} + \frac{\partial v^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\nu}{R} \frac{\partial(\tau \zeta)}{\partial R} \tag{3}$$

where

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial R} \tag{4}$$

境界条件のうち底面や側面で粘着条件、自由表面で n を表面法線方向を示すとして

$$p = p_s + 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial \gamma_n} \tag{5a}$$

であり、 p_s は表面張力である。さらに接線応力条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} = 0 \tag{5b}$$

も適用する。

3. 差分法

3.1 差分表示

本報告の数値結果はSMAC法の一つの改良すなわちSOLA的なSMAC法を開発することにより得られた。Fig.1に示すように差分セル中心で圧力を定義し、速度は四辺の midpoint で定義する。このような定義で矩形固定メッシュを用いて上述の非定常ナビエ・ストークスの式の各時間ステップでの解を求める。Fig.2のような格子配置で、後述のように対称軸での対称性を境界条件の一つとし $I=1/2$ が中心軸に対応し周囲側壁は $I=I_p+1+1/2$ 、底面は $J=1+1/2$ である。

以下に示す差分表示では風上差分と中心差分の重み和で微分項を表わす。したがって $\alpha=0$ では中心差分のみを表わすこととし、この場合特有の不安定

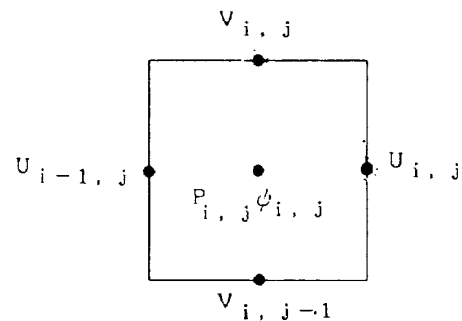


Fig.1 差分変量の定義

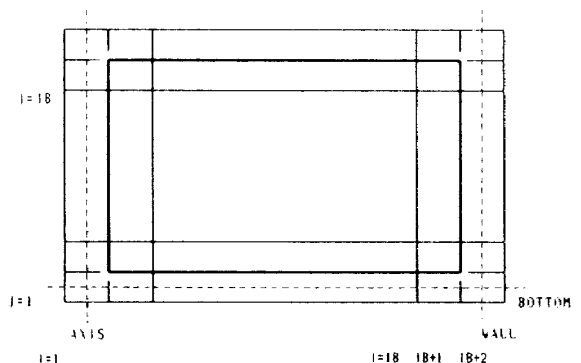


Fig.2 格子配置と境界の定義

性の傾向が強くなる。一方 $\alpha = 1$ では、風上差分のみ(ドナー・セル法)となるが、局所流速 \times 時間刻み $<$ 空間メッシュ最小値で安定解が得られる。

3.2 差分の三段階

第一段階：新タイムレベルの速度更新(陽的予測) 差分式の表示を簡潔にするため、 (I, J) 位置の U, V を含む項で和と差(格子番号小から大を減算する)をそれぞれ

$$SU_{IP} = U_{I,J} + U_{I+1,J}, \quad DU_{IP} = U_{I,J} - U_{I+1,J} \quad (6)$$

と表わし、上式も含め、 $IP = I + 1, IM = I - 1, JP = J + 1, JM = J - 1$ の表語を用いる。連続の式、ナビエ・ストークスの各式は、以下のように表わされる。

$$D_{I,J} = (U_{I,J} - U_{I-1,J})(1/\Delta R + 1/(2\Delta R(I-1.5))) + (V_{I,J} - V_{I,J-1})/\Delta Z \quad (7)$$

この式(7)の連続の式は第二段階で使い、運動量式

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{I,J}^{N+1} = & U_{I,J}^N + dt [(\theta_{I,J} - \theta_{I+1,J})/\Delta R + G_R \\ & - FUX - FUY - FUC + VISX \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{I,J}^{N+1} = & V_{I,J}^N + dt [(\theta_{I,J} - \theta_{I,J+1})/\Delta Z + G_Z \\ & - FVX - FVY - FVC + VISY \end{aligned} \quad (9)$$

より、 $\tilde{U}_{I,J}, \tilde{V}_{I,J}$ をこの段階で算出する。ここで右辺はすべて時間ステップ N での値で、 FUX などは、

$$FUX = (SU_{IP}^2 + \alpha |SU_{IP}| DU_{IP} - SU_{IM}^2 - \alpha |SU_{IM}| DU_{IM})_J / 4\Delta R \quad (10)$$

$$\begin{aligned} FUY = & (SV_{IP}SU_{I,JP} + \alpha |SV_{I,P,J}| DU_{I,JP} \\ & - (V_{I,JM} + V_{IP,JM}) SU_{I,JM} \\ & - \alpha |V_{I,JM} + V_{IP,JM}| DU_{I,JM}) / 4\Delta Z \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} FUC = & (SU_{IP}^2 + \alpha |SU_{IP}| DU_{IP} + SU_{IM}^2 \\ & + \alpha |SU_{IM}| DU_{IM})_J / (8\Delta R(I-1)) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} FVX = & (SV_{IP}SU_{I,JP} + \alpha |SU_{I,JP}| DV_{IP,J} \\ & - SV_{IM,J}SU_{IM,JP} - \alpha |U_{IM,JP} \\ & + U_{IM,JP}| DV_{IM,J}) / 4\Delta R \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} FVY = & (SV_{IP}^2 + \alpha |SV_{IP}| DU_{JP} - SV_{JM}^2 \\ & - \alpha |SV_{JM}| DV_{JM})_I / 4\Delta Z \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} FVC = & (SV_{IP}SU_{I,JP} + \alpha |SU_{I,JP}| DV_{IP,J} \\ & - (U_{IM,J} + U_{IM,JP}) SV_{IM,J} \\ & - \alpha |U_{IM,J} + U_{IM,JP}| DV_{IM,J}) / 8\Delta R(I-1.5) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} VISX = & V [(DU_{IM,J} - DU_{I,J})/\Delta R^2 \\ & - (DU_{I,JM} - DU_{I,J})/\Delta Z^2 + (U_{IP,J} \\ & - U_{IM,J})/2\Delta R^2(I-1) \\ & - U_{I,J}/\Delta R^2(I-1)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} VISY = & V [(DV_{IM,J} - DV_{I,J})/\Delta R^2 \\ & - (DV_{I,JM} - DV_{I,J})/\Delta Z^2 + (V_{IP,J} \\ & - V_{IM,J})/2\Delta R^2(I-1.5) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで

$$\theta = g_R R + g_Z Z + P_S(R) \quad (18)$$

上記の更新値 $\tilde{U}^{N+1}, \tilde{V}^{N+1}$ は連続の式を満たさず残差 $D_{I,J}$ を示す。この速度値から出発して補正值を求めて行かねばならない。そこでこの陽的予測に対応する渦度分布に影響を与えないように渦なし成分の寄与を扱うため以下のようにポテンシャル関数 ψ を導入し正確な速度場を知る。

第2段：ポテンシャル ψ の繰返しによる決定

第1段での \tilde{U}, \tilde{V} を用いた以下の関係

$$\left. \begin{aligned} U_{I,J} &= \tilde{U}_{I,J} - (\psi_{IP,J} - \psi_{I,J})/\Delta R \\ V_{I,J} &= \tilde{V}_{I,J} - (\psi_{I,JP} - \psi_{I,J})/\Delta Z \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を式(7)に代入し、 $\psi_{I,J}$ を左辺へ移項すると、加速パラメタ ω として繰返しに用いる下式を得る。

$$\begin{aligned} \psi_{I,J}^{K+1} = & \frac{1+\omega}{2} \frac{1}{\Delta R^2 + \Delta Z^2} \left[-D_{I,J} + R_{I+1/2} \psi_{IP,J}^K \right. \\ & \left. + R_{I-1/2} \psi_{IM,J}^{K+1} + \frac{\psi_{I,JP}^K + \psi_{I,JM}^{K+1} - \omega \psi_{I,J}^K}{\Delta Z^2} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ここで K は繰返し回数である。

(ψ の差分境界条件)

$$\text{固体壁, 流入境界} \quad \psi_{I-1,J} = \psi_{I,J}$$

$$\text{自由表面, 流出境界のみで} \quad \psi_{I-1} = 0$$

式(20)による繰返しの結果、ある収束判定を満たしたところでの $\psi_{I,J}$ を収束解とし、式(19)に代入し、 U, V を決定する。

第3段：自由表面の位置とマーカー粒子

近年自由表面問題以外にも用いられているMAC法の名の由来であるMARKER粒子は本報告の研究では自由表面形状の決定に重要である。簡略に記すと、液体含有セルの四辺の各中点の速度からセル格子内の各マーカー速度を算出し各時間刻みごとにオ

イラー積分で新しいマーカー位置を求める。新しい時間ステップでは粒子がセルの中に存在すればFセルかSセルなければEセルと名づける。ただ本報告での空間メッシュ巾では速度変動が大きく突出的に遠方へ行くマーカーが出るが適宜無視した。またマーカー粒子は初期的には1セル内16コ配分されているが、時間とともにセル内数密度にかなりの偏りを生ずる場合は、時間間隔でセル内16コとなるよう再配置する。

3.3 境界条件の差分表示

容器壁；粘着条件を設定し

$$\text{底部で} \quad U_{i,1} = -U_{i,2}, \quad V_{i,1/2} = 0$$

$$\text{右端側壁で} \quad U_{IB+3/2,J} = 0, \quad V_{IB+2,J} = -V_{IB+1,J}$$

$$\text{対称軸} \quad V_{1,J} = V_{2,J}, \quad U_{1,J} = -U_{2,J}$$

対称軸での条件からも判るようにプログラムの便宜のため、対称軸がI=1ラインとI=2ラインの中央を通るようにしている。

3.4 自由表面の諸量の算出手順

式(5a), (5b)を用いて、即ち接線、法線応力条件を差分化するが、接線応力条件は表面にある二つのセルの間のしきいとなる格子線上の速度から1空間ステップ外側の位置(液体含有なし)での速度を算出する。一方、表面セルの界面側格子上的速度値は連続の式より算出する。これには15ケースのセル配置が考えられ、算出差分式は7通りにまとめられる。

表面での圧力は法線応力の条件から算出される。この場合も液体含有セルに注目したセル配置に対応した表式は三通りとなり、粘性応力のかかる方向がR方向かZ方向かで二通り、含有セルが二つ以上の外界セルに囲まれていれば表面張力の寄与のみとして一通りの表式で圧力が算出される。

3.5 表面張力の算出

R-Z平面で液領域を切断して得られる表面曲率半径をr, 水平面(Z=const)での半径はR_Rと表わせ、液面が外に凸なら、表面張力P_Sは以下のようになる。

$$P_S = \gamma \left(\frac{1}{R_R} + \frac{1}{r} \right)$$

γは表面張力係数である。r, R_Rはそれぞれ隣接3セルの代表的マーカーをすぎる曲線への法線の交点から決定する。表面張力の寄与は全表面にはとり入れず中心から右側壁までの1/2の距離までとした。この外側では小さな曲率の波は張力なしで扱っていることになる。また式(10)の圧力分布もなめらかに外側の平坦に近い部分へ移行することになる。

4. 結果と考察

液滴直径2.3mmで速度3.2m/secで液面に突入するとし、液深さが3mmの結果を以下に示す。容器半径は41mmすなわち半径方向メッシュについてIB=40, ΔR=1mmで解を得た。

式(10)~(16)の重み係数αが0.55の場合が実験¹⁵⁾と良く合致することが確認された¹⁶⁾のでこのαを用いた結果を示す。

Fig.3~6にサーフェス・モデルでグラフィック表示されるのが水没液滴のまわりの液面状態である(原画カラー)。Fig.3では水没液滴がかなり沈んでからも土部は球形を保つことが観察できる。Fig.4はクレーターが形成されていることを示す。最大高さでの状態であるが外向きにひさしを伸ばした状態が現状では予測できない。Fig.5は水柱(レイリージェット)が最大高さの状態ではこれは実験による高さ¹⁵⁾と良く一致する。Fig.6はFig.5の水柱の水没した後の状態である。

Fig.7~14に主な時間のマーカー粒子の位置図を示す。ここではFig.3~6の指摘に加え波の状態がよく示されている。Fig.9, 10はクレーター周辺の沈下, Fig.11, 12は中心部への液の還流と液柱の成長を示している。またFig.13, 14は水柱の沈下を示している。

今後は完全三次元スキームの開発が望まれる。

なお、Fig.3~6を含むサーフェス・モデルの画像約150枚よりビデオ動画が作成され、当シンポジウムも含め、観賞¹⁷⁾に付された。

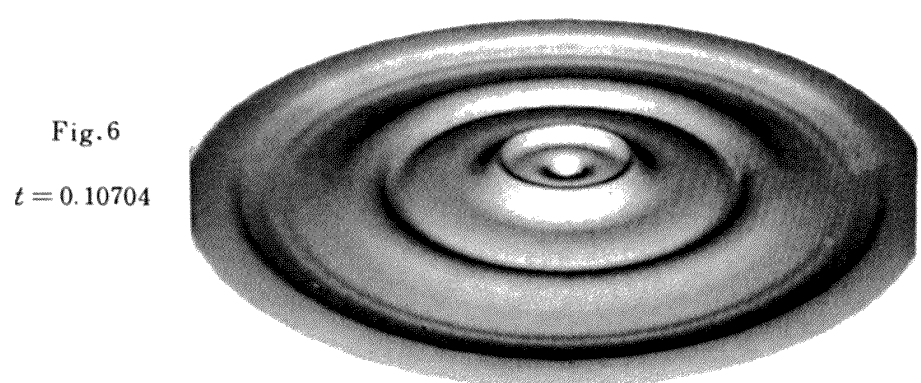
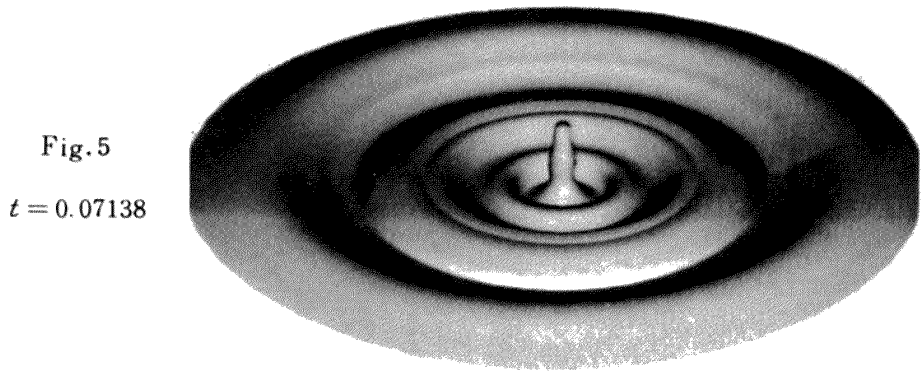
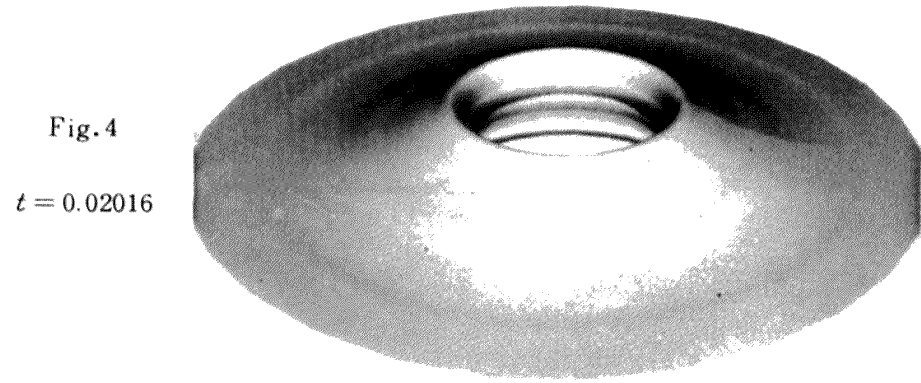
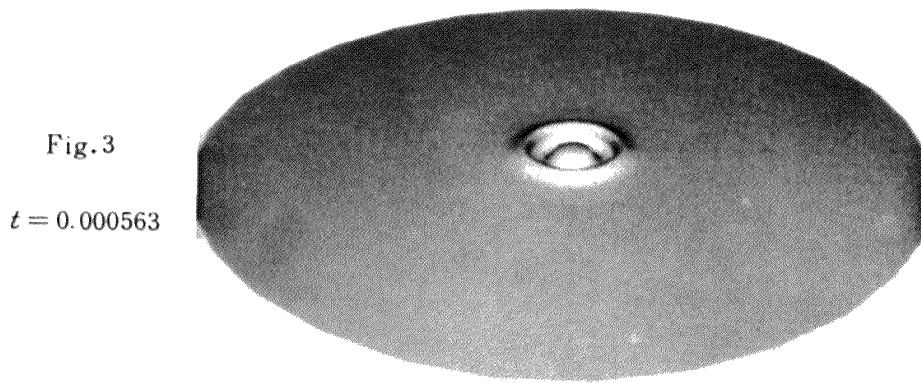
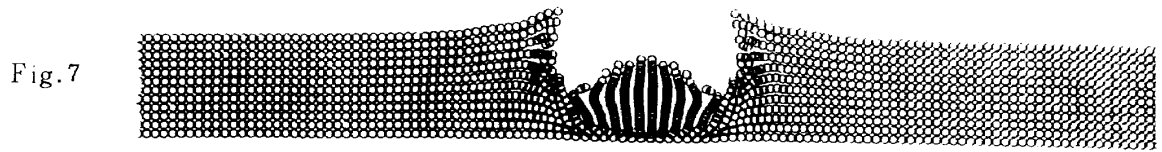


Fig.3~6 液面のコンピュータ・グラフィック画像



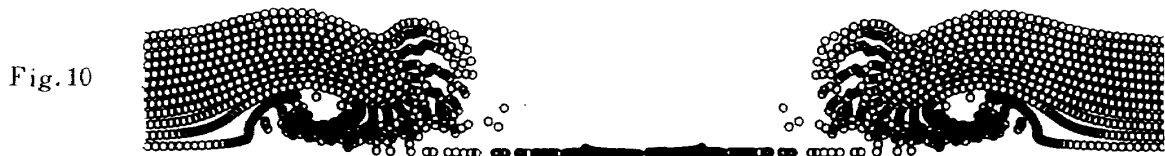
TIME = 0.00111 SEC



0.00484 SEC



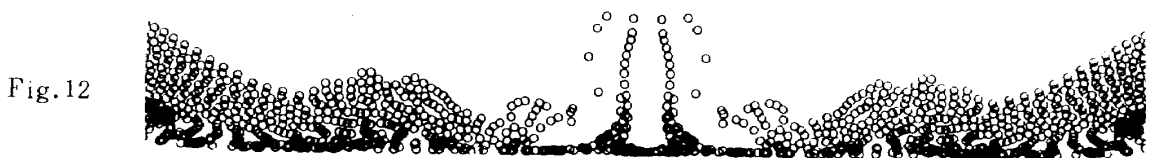
0.01271 SEC



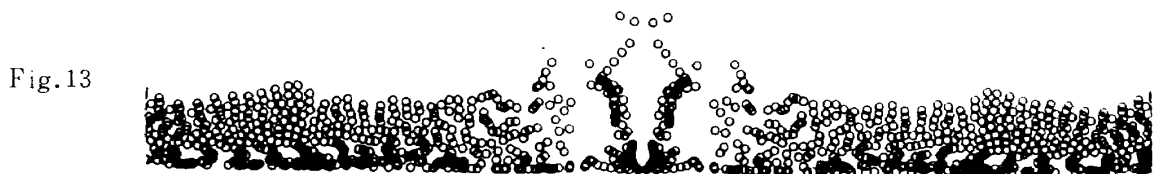
0.02642 SEC



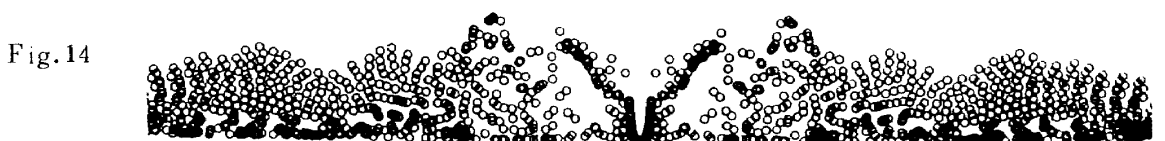
0.04786 SEC



0.069318 SEC



0.094628 SEC



0.11947 SEC

Fig.7~14 マーカー粒子による液断面表示

参 考 文 献

- 1) Lord Rayleigh: Proc. Roy. Soc. London Ser. A 29, 71, 1879.
- 2) Worthington, A.M.: A Study of Splashes, The Macmillan Company, New York, 1973.
- 3) Fujii, Ko. & Ohbayashi, S.: AIAA Paper 86-0513 or Himeno, R. et al. AIAA Paper 85-1617.
- 4) Murakami, S. et al.: Proc. Intn. Sympo. on Computational Fluid Dynamics Tokyo, pp. 728-739, 1985.
- 5) Harlow, F.H. and Welch, J.E.: Physics of Fluid, Vol. 80, No. 12, 1965.
- 6) Amsden, A.A. and Harlow, F.H.: Los Alamos Sci. Labo. Report LA-4370, 1970.
- 7) Hirt, C.W., Nichols, B.D. and Romero, N.: Los Alamos, SLR La-5852, 1975.
- 8) Chorin, A.J.: Math. Comp. Vol. 22, p. 745, 1968.
- 9) Steger, J.L. and Kutler, P.: AIAA J. Vol. 15, pp. 581-590, 1977.
- 10) Kwak, D., Chang, J.L.C. and Shanks, S.P.: Proc. Ninth ICNMF, p. 346, 1985.
- 11) 加茂圭介, 姫野龍太郎, 桑原邦郎, 久保田弘敏: 空力数値シミュレーション・シンポ, p. 25 (1986. 2. 3)。
- 12) Nichols, B.D., Hirt, C.W. and Hotchkiss, R.S.: Proc. 7th ICNMF, pp. 304-309, 1981.
- 13) Fromm, J.: Proc. 7th ICNMF, pp. 188-193, 1981, Springer Ver.
- 14) 河村哲也, 高見穎郎, 海老 豊: ながれ, Vol. 1, pp. 285-298 (1982)
- 15) Macklin, W.C. and Hobbs, P.V.: Science Vol. 66, pp. 107-108, 1969.
- 16) Nishikawa, N., Suzuki, T. and Suzuki, A.: Preprint of 10th ICNMF, pp. 134-135 (1986, June, Beijing), or Proc. 10th ICNMF (1987, to be published, Springer Ver.)
- 17) 西川進栄, 秋山 聡, 鈴木敬史, NICOGRAPH '86 (日本コンピュータ・グラフィックス協会 総会) 講演会 (1986年11月)

