

風上差分法を用いたNavier-Stokes方程式の反復解法

大 林 茂* 藤 井 孝 蔵** 桑 原 邦 郎***

Relaxation Method for the Compressible
Navier-Stokes Equations Using Upwind Schemes

by

Shigeru OBAYASHI

Department of Engineering, University of Tokyo

Kozo FUJII

National Aerospace Laboratory

Kunio KUWAHARA

Institute of Space and Astronautical Science

ABSTRACT

A comparison study of TVD schemes using min-mod and differentiable limiters and ENO schemes has been done for a one-dimensional test problem. The one-dimensional steady-state problem, which consists of Euler equations with a source term, is computed in this paper. The computation is carried out by using classical upwind differencing in the implicit part while maintaining a TVD or ENO formulation in the explicit part.

Numerical results indicate that the third-order ENO scheme is attractive, since the accuracy is essentially superior to TVD schemes.

1. はじめに

圧縮性の Euler/Navier-Stokes 方程式を用いて衝撃波を含む流れ場を効率的にかつ精度よく求めるために TVD 差分法^{1,2)}や ENO 差分法³⁾といった風上差分法に基づいた高精度の計算法が開発され、様々な流れ場に対して応用されるようになってきた。これらの新しい風上差分法は結果として非線形の差分近似を行なうため、従来の中心差分+高次の数値拡散項という形よりも一般に複雑な形をしている。

Navier-Stokes 方程式で境界層まで考慮に入れて計算をするときは、安定性の制限を緩めるために陰解法がよく用いられる。定常解を求めるときは、大きな Δt を用いて時間積分をすればより早く収束解が得られることになる。従来の中心差分+高次の数値拡散項という形は比較的容易に線形化できるので、Beam-Warming 法やその効率化手法^{2,4)}を用いた陰計算が盛んに行なわれて来た。

これに対して新しい風上差分法を用いた陰解法を考えると、その非線形性から陰計算のための線形化が容易ではなく、また計算量も一層増えることになる。そこで、陽的部分では新しい風上差分法を適用しつつ、陰的部分には従来の線形化の容易な風上差

* 東京大学工学部大学院

** 航空宇宙技術研究所

*** 宇宙科学研究所

分法を用いた計算法を考えることができる。

本研究では、陰解法として流束分離法による1次精度風上差分法を常に適用する。一方、陽的部分には、3次精度のTVD及びENO差分法を用い、精度と収束性の比較を行なう。また、こうした計算法では反復の度に解が振動して収束しなくなることがある。陰計算の手続きを変更しないで、ステップ内の反復を行なうことにより収束率を改善する方法についても述べる。

2. 定式化

1) セル平均

簡単のため次元、スカラーの保存型方程式を例にとって定式化を行なう。保存型方程式、

$$u_t + f_x = 0,$$

を領域 $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times (t^n, t^{n+1})$ で積分すると、

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u_t + f_x) dx dt = 0,$$

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) dt = 0,$$

ここで、

$$h = \Delta t / \Delta x,$$

$$v_j^n = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^n dx / \Delta x$$

$$\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f_{j+\frac{1}{2}} dt / \Delta t$$

とおくと、セル平均に基づく計算式、

$$v_j^{n+1} - v_j^n = -h (\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{j-\frac{1}{2}})$$

を得る。従来の差分法と異なり、差分格子点上のデータはセル平均を表わしているものと解釈する。形式は差分法と同じであるが、実質は有限体積法である。

セルの境界における流速近似 $\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ は、左右のセルの状態を基に近似的リーマン解法を適用して求める。本論文では常にエントロピー修正なしのRoeの方法を用いた。Roeの方法による流速近似を f^{ROE} と書く。このとき、

$$f^{ROE} = f^{ROE}(v_L, v_R)$$

$$= [f(v_L) + f(v_R) - |A|(v_R - v_L)] / 2$$

である。AはRoeの線形化による。セル内の従属変数の分布を一定として、

$$v_L = v_j, v_R = v_{j+1},$$

とおくとき、一次精度差分法となる。

2) MUSCLアプローチ

MUSCLアプローチによる2次及び3次精度風上差分法は、セル内の従属変数の分布を1次関数で近似して、セル境界における値を求めることによって得られる⁶⁾ すなわち、

$$v_L = v_j + [(1-k)D_- + (1+k)D_+]_j / 4,$$

$$v_R = v_{j+1} - [(1-k)D_+ + (1+k)D_-]_{j+1} / 4,$$

$$D_{+,j} = v_{j+1} - v_j, D_{-,j} = v_j - v_{j-1},$$

と書ける。k=-1のとき2次精度、k=1/3のとき3次精度風上差分である。

もともと、1次精度のRoeの方法はTVD条件

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n)$$

を満たしている。従って、 v_L, v_R を高精度に求めるときに、上の式の右辺の第2項以降がTVD条件を満たすように制限すれば、高精度TVDスキームを構成することができる。例えば、

$$v_L = v_j + [(1-k)\bar{D}_- + (1+k)\bar{D}_+]_j / 4,$$

$$v_R = v_{j+1} - [(1-k)\bar{D}_+ + (1+k)\bar{D}_-]_{j+1} / 4,$$

ここで、 \bar{D}_\pm はいわゆる min-mod limiter で、

$$\bar{D}_+ = \max[0, \min(D_+ \operatorname{sgn} D_-, b D_- \operatorname{sgn} D_+)] \operatorname{sgn} D_+$$

$$\bar{D}_- = \max[0, \min(D_- \operatorname{sgn} D_+, b D_+ \operatorname{sgn} D_-)] \operatorname{sgn} D_-$$

$$b = (3-k) / (1-k)$$

である。また、滑らかな流束制限関数を用いた例として、van Leerのdifferentiable limiterを用いた定式化は、

$$v_L = v_j + s [(1-ks)D_- + (1+ks)D_+]_j / 4$$

$$v_R = v_{j+1} - s [(1-ks)D_+ + (1+ks)D_-]_{j+1} / 4$$

$$s = (2D_+D_- + \epsilon) / (D_+^2 + D_-^2 + \epsilon)$$

と書ける。ここで、 ϵ は小さな数 ($= 10^{-6}$) である。

3) ENO差分法

ENO差分法のキーポイントは、任意の精度に拡張されたMUSCLアプローチを用いることである。任意に高精度の差分法を構成するには、セル内の従属変数の分布を高精度で近似すればよい。しかし、

前節で述べたような解の一階差分の組み合わせでは、それ以上精度は上がらない。そこでENO差分法では、 N 次精度を得るのに N 次多項式でセル内の分布を近似することになる。³⁾

しかし、この N 次の方法ではTVD条件を満たすことができないので、いわばTVD差分法の拡張として、ENO(Essentially Non-Oscillatory)差分法という新しいクラスを定義する。ENO差分法である条件とは、

$$TV(v^{n+1}) \leq TV(v^n) + O(\Delta x^{N+1})$$

すなわち、打ち切り誤差の程度を見込んでTVDであるような計算法であることである。言い換えると、TVD条件をENO条件に緩めることにより、任意に高精度の計算法を構成することができる。

前節と同様にRoeの方法はTVDであるから、各セルに対する区分的多項式 $R(x, v^n)$ をENO条件

$$TV(R(x, v^n)) \leq TV(v^n) + O(\Delta x^{N+1})$$

を満たすように構成すれば、ENO差分法を得ることができる。この手続きをReconstructionと呼ぶ。次に、この条件を満たす多項式の構成方法を文献7に従って述べる。

各格子点上 x_j で与えられているデータの列 $\{w_j\}$ を用いて、セル $x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}$ 内で $w(x)$ の分布を近似する N 次の多項式を $Q^N(x, w)$ と書こう。ここで、

$$Q^N(x_j, w) = w_j$$

であるとする。 $Q^1(x, w)$ として、

$$Q^1(x, w) = w_j + (x - x_j)w[x_j, x_{j+1}]$$

ここで $w[x_j, x_{j+1}] = (w_{j+1} - w_j) / \Delta x$ 、と置こう。

$$K_{min}^1 = j, K_{max}^1 = j + 1$$

$$w[x_{K_{min}^{N-1}}, \dots, x_{K_{max}^{N-1}+1}]$$

$$= (w[x_{K_{min}^{N-1}+1}, \dots, x_{K_{max}^{N-1}+1}]$$

$$- w[x_{K_{min}^{N-1}}, \dots, x_{K_{max}^{N-1}}]) / \Delta x$$

$$a^N = w[x_{K_{min}^{N-1}}, \dots, x_{K_{max}^{N-1}+1}]$$

$$b^N = w[x_{K_{min}^{N-1}+1}, \dots, x_{K_{max}^{N-1}}]$$

と置くとき、 $Q^N(x, w)$ を次のように決める。

$$(a) \quad |a^N| \geq |b^N| \text{ のとき,}$$

$$Q^N(x, w) = Q^{N-1}(x, w) + b^N \prod_{K=K_{min}^{N-1}}^{K_{max}^{N-1}} (x - x_K)$$

$$K_{min}^N = K_{min}^{N-1} - 1$$

$$(b) \quad |a^N| < |b^N| \text{ のとき,}$$

$$Q^N(x, w) = Q^{N-1}(x, w) + a^N \prod_{K=K_{min}^{N-1}}^{K_{max}^{N-1}} (x - x_K)$$

$$K_{max}^N = K_{max}^{N-1} + 1$$

こうして得られた多項式による近似が、ENO条件を満たすことが示されている。

ENO差分法は、TVD差分法に比べ、差分近似に用いる格子点数が常に変わらないので精度を保つことが分かる。一方、差分をとる格子点の位置を変えることにより、解の振動をなくすところが特徴的である。また、2次精度ではENOとTVDは本質的に同じもので、3次精度以上のENOを定式化したときにTVDより高精度になる。

最後に、3次精度の具体的な形を記しておく。上の多項式 $Q^N(x, w)$ で、 w として原始関数 $\sum_j v_j \cdot \Delta x$ をとる。すなわち、 $R(x, v^n) = \frac{d}{dx} Q^N(x, w^n)$ である。従って、

$$(a) \quad |d_+| \geq |d_-| \text{ のとき,}$$

$$v_L = v_j + [d_- / 2 + m(d_{--}, d_{-+}) / 3]_j$$

$$v_R = v_{j+1} - [d_- / 2 + m(d_{--}, d_{-+}) / 6]_{j+1}$$

$$(b) \quad |d_+| < |d_-| \text{ のとき,}$$

$$v_L = v_j + [d_+ / 2 - m(d_{++}, d_{+-}) / 6]_j$$

$$v_R = v_{j+1} - [d_+ / 2 - m(d_{++}, d_{+-}) / 3]_{j+1}$$

ここで、

$$m(x, y) = \begin{cases} x & \text{for } |x| \leq |y| \\ y & \text{for } |x| > |y| \end{cases}$$

$$d_{+,j} = (d_{+,j+1} - d_{+,j}) / \Delta x, \text{ etc.}$$

4) 反復解法

まず空間方向に差分化すると、次のような方程式を得る。

$$du/dt = -Mu$$

Euler 陰解法を適用すると、最終的に次の連立一次方程式を解くことに帰着する。

$$(I + \Delta t M^{n+1}) \Delta u^n = -\Delta t M^{n+1} u^n$$

従来の陰解法では、 M を n ステップで固定して上の式を解くことになる。さて、上の右辺を変形すると、次式を得る。

$$(I + \Delta t M^{n+1}) \Delta u^n = -\Delta t M^{n+1} u^{n+1} + \Delta t M^{n+1} \Delta u^n$$

ここで、右辺の Δu^n から左辺の Δu^n を反復的に計算すれば、線形化による時間方向の誤差を緩和しつつ反復的に Δu^n を求めることができる。すなわち、 $\Delta u^{n,0} = 0$ として、

$$(I + \Delta t M^m) \Delta \Delta u^m = -\Delta t M^m u^m - \Delta u^{n,m}$$

$$\Delta u^{n,m+1} = \Delta u^{n,m} + \Delta \Delta u^m$$

$$u^m = u^u + \Delta u^{n,m}$$

さて、高精度差分法を用いた場合、解がリミットサイクルに入って収束しないことがある。このような場合、従来の陰解法では、計算された Δu^n をそのまま用いて解を更新するのではなく、緩和法を用いるのがよい。あるいは、上のステップ内の反復を行なうときには、

$$\Delta u^{n,m+1} = \Delta u^{n,m} + \beta \Delta \Delta u^m$$

ここで、 $0 < \beta < 1$ と置けばよい。緩和係数 β を最適化するのは困難なので、通常 $\beta = 0.5$ と置く。また、1回しか反復をしないならば、この方法は本質的に β スキームである⁸⁾。しかし、余分なメモリーを必要とせず、中心となる部分では従来の陰解法と全く同じ計算を繰り返すところに特徴がある。

3. 計算結果

断面積の変化を考慮した1次元 Euler 方程式の定常解を求める。断面積 A は、次式で与える。

$$A = 1.4 + a \cdot \tanh(0.8x - 4), \quad 0 < x < 10$$

定数 a は、 $x = 0$ で $A = 1$ となるように決める。上流境界で密度 0.5、流速 1.3、音速 1.03 とし、下流で密度 0.75 を与える。

定常解へ加速するために、SER法を用いる⁸⁾。すなわち、

$$\Delta t^{n+1} = \Delta t^0 / \sqrt{\max(RES^n, 0.0001)}$$

ここで、 RES は u^n に対する相対残差である。

ENO 差分法を方程式系へ拡張するには、局所的な特性量を用いて Reconstruction を行なう方法が提案されている³⁾。しかし、ここでは内積を用いて簡略化した Reconstruction を用いる。すなわち、格子点をずらしていくときに変数毎に前章の a^N, b^N を求めて比較するのではなく、各変数に対する a^N, b^N からなるベクトル A^N, B^N の内積、 (A^N, A^N) と (B^N, B^N) を用いて比較を行なう。

図1に最大値誤差を示す。ここで、3次精度 ENO 差分法はそのままでは収束が悪いので、前述のステ

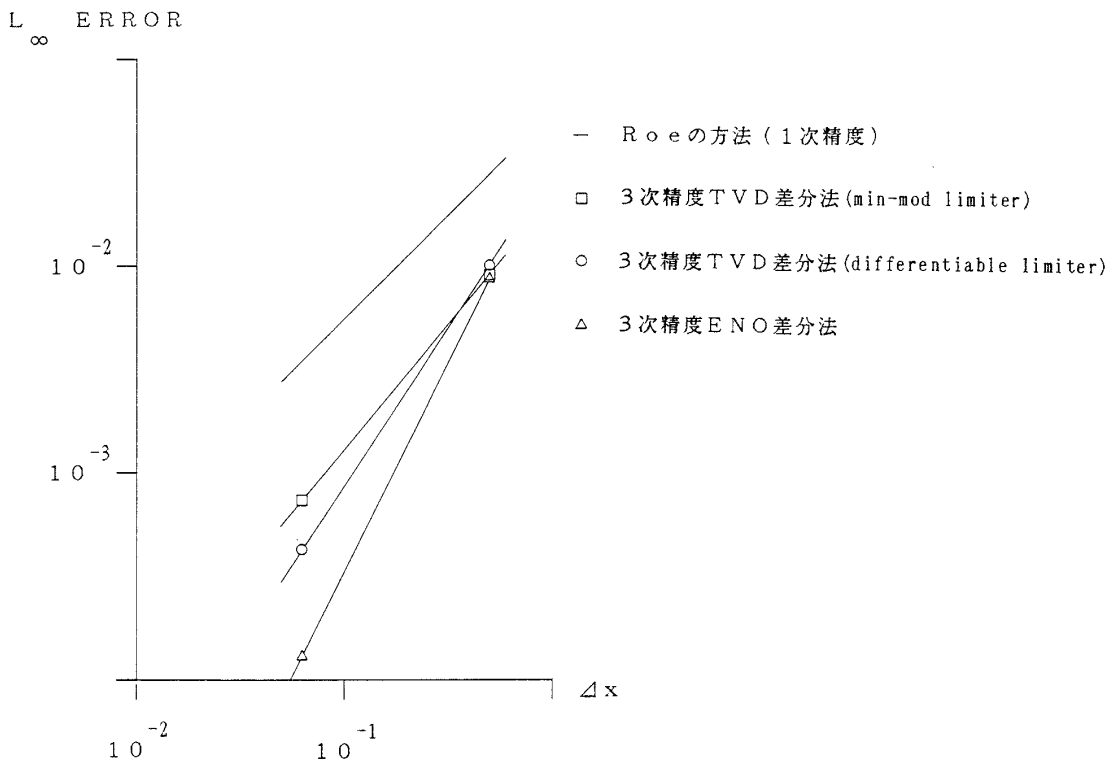


図1 Euler 方程式によるテスト問題の最大値誤差

ップ内反復法を用いている。誤差そのものはいずれの方法でも収束しているが、残差のレベルは3次精度ENO差分法が数倍大きい。

最後に図2に各手法による解の密度分布を示す。▽が数値解，実線が厳密解である。

4. おわりに

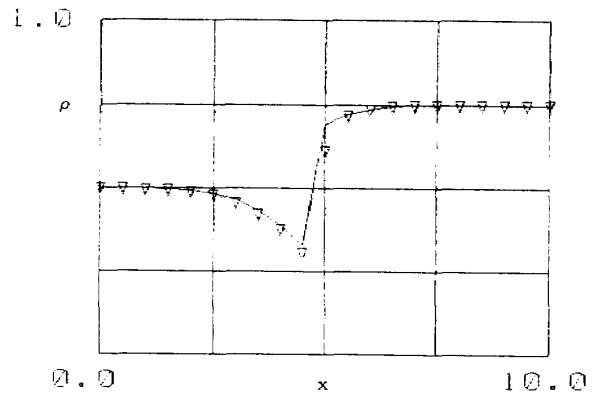
MUSCLアプローチによる3次精度のTVDとENOによるセル平均差分法の定式化と比較を行なった。ENO差分法は2次精度TVD差分法の高精度への本質的な拡張となっている。3次精度では、TVDによる定式化よりも高精度となることがテスト問題による比較で、実際に確かめられた。

スキームの非線形性を考慮しない陰計算によっても、単純なステップ内反復を用いれば高精度の収束解が得られることが分かった。従って、対流項の陽計算のみを定式化しなおすだけで、多次元のNavier-Stokes計算に応用可能であると考えられる。

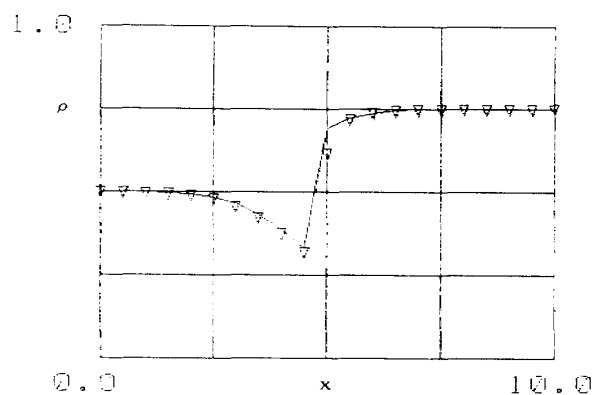
ただし、Euler方程式によるテスト計算では、3次精度ENO差分法の残差のレベルが他の方法より高いので、陰計算部分の改良も一考の必要があろう。

参 考 文 献

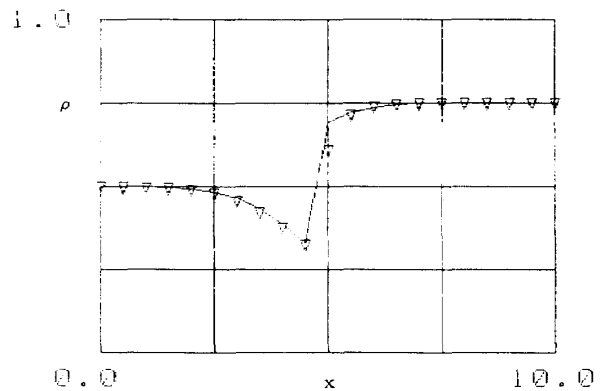
- 1) Chakravarthy, S.R. and Osher, S.: A New Class of High Accuracy Total Diminishing Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, AIAA Paper 85-0363, 1985.
- 2) 大林 茂, 桑原邦郎: 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値計算法 I, II, ながれ, 5, pp. 130-146, 199-209, 1986.
- 3) Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S.R.: Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III, ICASE Report No. 86-22, 1986.
- 4) Obayashi, S., Matsuhima, K., Fujii, K. and Kuwahara, K.: Improvements in Efficiency and Reliability for Navier-Stokes Computations Using the LUADI Factorization Algorithm, AIAA Paper 86-0338, 1986.
- 5) Roe, P.L.: Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations, Ann. Rev. Fluid



(a) 3次精度TVD差分法 (min-mod limiter)



(b) 3次精度TVD差分法 (differentiable limiter)



(c) 3次精度ENO差分法

図2 Euler方程式によるテスト問題の密度分布
▽: 数値解, —: 厳密解

- 6) Anderson, W.K., Thomas, J.L. and van Leer, B.: A Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations, AIAA Paper 85-0122, 1985.
- 7) Harten, A., Osher, S., Engquist, B. and

Mech. 18, pp. 337-365, 1986.

- Chakravarthy, S.R.: Some Results on Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, *Advances in Numerical and Applied Mathematics*, ICASE Report 86-18, pp. 383-436, 1986.
- 8) Mulder, W.A. and van Leer, B.: Implicit Upwind Methods for the Euler Equations, AIAA Paper 83-1930-CP, 1983.
- 9) van Leer, B.: On the Relation between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 5, No. 1, 1984.