

三次元放物型ナビエ・ストークス方程式による ダクト流れの解析

菊 地 一 雄* 田 村 敦 宏*

Numerical Analysis of Duct Flow Using Three-Dimensional Parabolized Navier-Stokes Equation

by

Kazuo KIKUCHI, Atsuhiko TAMURA
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

The validity of a numerical solution procedure developed by Kikuchi and Tamura about three dimensional viscous compressible flow fields based on parabolized Navier-Stokes equations is examined by comparing with the results of two experiments.

The calculations for three dimensional flow fields in curved pipe and S-type duct with circular cross sections were carried out. Qualitatively good numerical results were obtained. The discrepancies between the numerical and experimental results seem to be caused by inaccurate inlet conditions which were not explicitly designated in the experiments.

1. ま え が き

筆者らは三次元放物型ナビエ・ストークス方程式 (PNS 方程式) によるダクト流れの解法の研究を続けて来た。現在, 三次元ナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) により種々の流れが計算されているが, NS 方程式による流れの計算はスーパー・コンピュータを使用しても多大な計算時間を必要としている。一方, PNS 方程式は, 空間マーチングにより解くことができるため, NS 方程式に比べて極めて効率良く解を求めることができ, もちろん粘性圧縮性も考慮されている。PNS 方程式では剝離のある流れを取扱うことはできないが, ダクト流れでは剝離が起きないことが望ましくこれも大きな足かせ

とはならない。

PNS 方程式の解法には Spalding, Anderson 等によるものがあるが, ポテンシャル流れの圧力場を必要としたり連続の式を厳密に満たすことが難しいなどの問題点を持っている。筆者等の解法では圧力場の決定になんらの仮定を必要とせず, さらに連続の式を厳密に満たすことができる。本解法では relax させた連続の式 $\text{div}(\rho q) = C$ を考え, この値と圧力から Newton-Raphson 法により $\text{div}(\rho q) = 0$ を満たす圧力を決定する。

本解法の妥当性を検証するために, 今回実験との比較を行ったので報告をする。

2. 基礎方程式

座標系として一般曲線直交座標系を導入する。 ξ_1 軸をダクトの放射状方向, ξ_2 軸を周回方向, ξ_3 軸

* 航空宇宙技術研究所

を主流方向に取る(図1)。方程式は $U_m = (J/h_m)$ u_m で記述する。ここで h_m , u_m はそれぞれ ξ_m 軸の座標係数, 速度であり, $J = h_1 h_2 h_3$ である。

使用した三次元流れの無次元基礎方程式は一般曲線直交座標系において以下のようになる。

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{h_3}{J} \right]^2 \left\{ U_1 \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1} + U_2 \frac{\partial U_3}{\partial \xi_2} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} + f_3 \right\} \\ + \frac{\partial p}{\partial \xi_3} = \frac{1}{ReJ} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\tau_{31} \frac{h_3 J}{h_1} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\tau_{32} \frac{h_3 J}{h_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\tau_{33} \frac{h_3 J}{h_3} \right] \right. \\ \left. - J(D_{13} \tau_{11} + D_{23} \tau_{22} + D_{33} \tau_{33}) \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (C) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} (C) = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{J}{h_1^2} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{J}{h_2^2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \right] \\ = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{J}{h_1^2} S_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{J}{h_2^2} S_2 \right] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ U_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} (C_p T) + U_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (C_p T) \right. \\ \left. + U_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} (C_p T) \right\} - E \left[U_1 \frac{\partial p}{\partial \xi_1} + U_2 \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \right. \\ \left. + U_3 \frac{\partial p}{\partial \xi_3} \right] = \frac{1}{PrRe} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{JK}{h_1^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{JK}{h_2^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\frac{JK}{h_3^2} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right] \right\} \\ + \frac{E}{Re} J \Phi \quad (5) \end{aligned}$$

$$p = \left[\frac{gRT_0}{U_0^2} \right] \rho T \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\rho U_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\rho U_2) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\rho U_3) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 = -\rho \left[\frac{h_1}{J} \right]^2 \left\{ U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \xi_2} \right. \\ \left. + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial \xi_3} + f_1 \right\} + \frac{1}{ReJ} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\tau_{11} \frac{h_1 J}{h_1} \right] \right. \end{aligned}$$

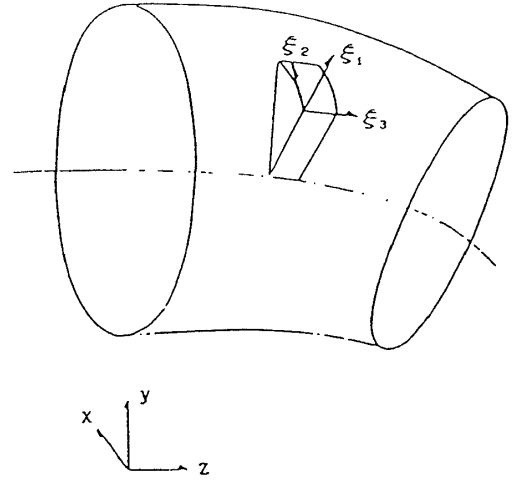


図1 一般曲線直交座標系

$$\begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\tau_{12} \frac{h_1 J}{h_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\tau_{13} \frac{h_1 J}{h_3} \right] \\ - J(D_{11} \tau_{11} + D_{21} \tau_{22} + D_{31} \tau_{33}) \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 = -\rho \left[\frac{h_2}{J} \right]^2 \left\{ U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} \right. \\ \left. + U_3 \frac{\partial U_2}{\partial \xi_3} + f_2 \right\} + \frac{1}{ReJ} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\tau_{21} \frac{h_2 J}{h_1} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\tau_{22} \frac{h_2 J}{h_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\tau_{23} \frac{h_2 J}{h_3} \right] \right. \\ \left. - J(D_{12} \tau_{11} + D_{22} \tau_{22} + D_{32} \tau_{33}) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで(1)式は主流方向の運動量方程式で右辺の f_3 は外力である。(2), (3)式はこの解法の特徴である連続の式の一階微分形である。(2)式を ρU_1 の二階微分方程式として解くことにより U_1 を求めることができる。この U_1 を連続の式第(7)式に代入すれば $\text{div}(\rho q) = C(\xi_2)$ となる。同様に(3)式から U_2 を求め、(7)式に代入すれば $\text{div}(\rho q) = C(\xi_1)$ となる。

(4)式は圧力場のポアソン方程式である。右辺の S_1 , S_2 を(8), (9)式に示した。この式は二次流れ方向の二つの運動量方程式においてそれぞれ $\partial p / \partial \xi_1 = S_1$, $\partial p / \partial \xi_2 = S_2$ と記述した式である。(8), (9)式の f_1 , f_2 は外力である。このポアソン方程式は補正項を付加して収束性を改善して解いている。

(5), (6)式はそれぞれエネルギー及び状態方程式である。エネルギー方程式の Φ は散逸項である。

これらの方程式を放物化すれば上流から下流へと前進的に解くことができる。ここでは主流方向運動

量方程式(1), エネルギー方程式(5)及び(8), (9)において下線を付した項を省略することによって放物化する。

3. 境界条件及び入口条件

内外壁において, 速度場に関しては速度0又は所定の値を, 温度場については温度又は温度勾配を与える。微分値を境界条件として解く圧力のポアソン方程式には, 計算された速度場から求めた圧力勾配 S_1 を与える。

内壁のない場合には境界条件を座標特異点で与えることになる。しかし通常の α, γ, z 座標系で見れば特異点は存在せず, その近傍でも各物理量はスムーズに変化していると考えられる。そこでその点での各物理量の接平面を考え, その値又は勾配を見積もり, それを境界条件として与える。ベクトル量についてはその成分について接平面を考え, 同様の処理をする。

次に入口条件は放物型方程式の解のファミリーに近いものでなければならないが, 本解法では主流速度分布と温度分布及び適切な二次流れを与え, 圧力場はポアソン方程式を解いて定めている。

4. 数値解法

ノイマン問題として解かれるポアソン方程式の解の基準点圧力として断面内の1点を選ぶ。計算断面において, まず基準点の圧力を P^1 として, 圧力場

をポアソン方程式, 主流速度 U_3 を主流方向運動量方程式, 二次流れ速度 U_1, U_2 を(2), (3)式から求める。ただし, 各計算断面の先頭では二次流れ方向運動量方程式を解き, その U_1, U_2 を初期値として使用する。そして圧力場, 速度場が収束するまで繰り返して計算する。求められた速度から連続の式を計算するとその逸脱量 C^1 が求められる。同様に P^2 について逸脱量 C^2 を求める。この P と C から Newton-Raphson法により C が0となる P を求め, その P に対して新たな逸脱量 C を計算する。以下 C が0となるまで P を更新して解を求めていく。

5. 数値計算結果

本解法はもちろん圧縮性のある流れが取り扱えるが, 今回は比較対象として実験例が豊富にある水を使った実験から, 180° 曲り管(文献1, 2)と, 22.5°

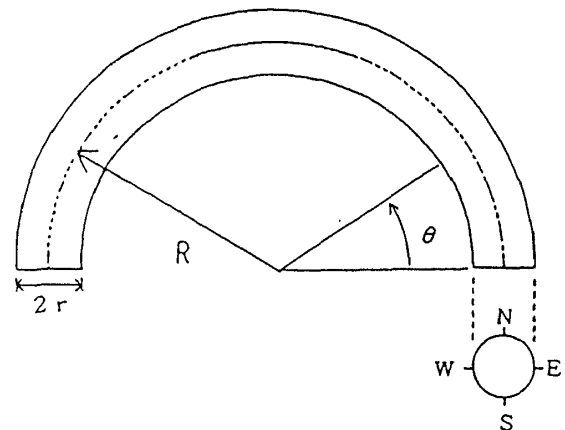
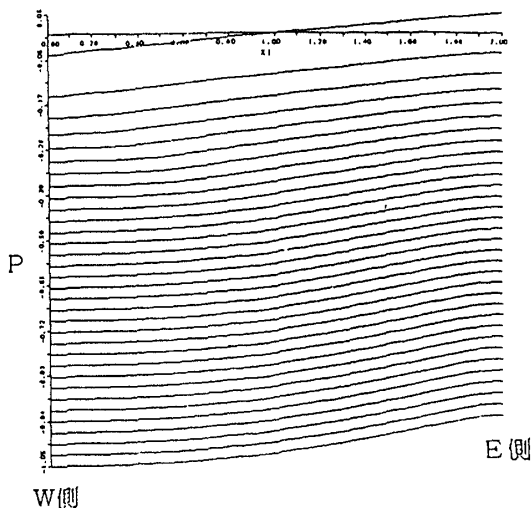
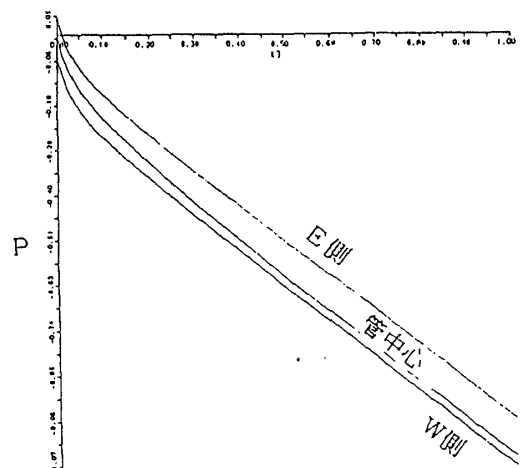


図2 曲り円管



(a) 管対称面



(b) 管壁の2点及び管断面の中心

図3 圧力の下流方向変化(曲り管)

- 22.5° S 字管 (文献 3) を選んだ。

(1) 180° 曲り円管

図 2 に 180° 曲り円管の形状を示した。管半径 r は 1.905 cm, 管の中心線の曲りの半径 R は 38.1 cm であり, 曲り比 R/r は 20 である。Reynolds 数 Re を管半径 r , 入口主流速度 u_z で定義し, Dean 数 De を $2Re(r/R)^{1/2}$ で定義すれば, $Re = 1263$, $De = 565$ である。

図 3 (a), (b) に圧力の下流方向変化を示す。(a) は管対称面 ($E-W$ 面) での圧力, (b) は管の断面内 3 点 (E, W , 中心) での圧力の下流方向変化を示す。図 4 (a), (b) に主流速度の下流方向変化を示す。(a) は管対称面 ($E-W$ 面) での主流速度である。圧力, 主流速度共にスムーズに変化し, 境界層の発達や主流速度のピークが管の曲りの外側へ移動していく様子が捉えられている。図 4 (b) には主流速度の実験結果

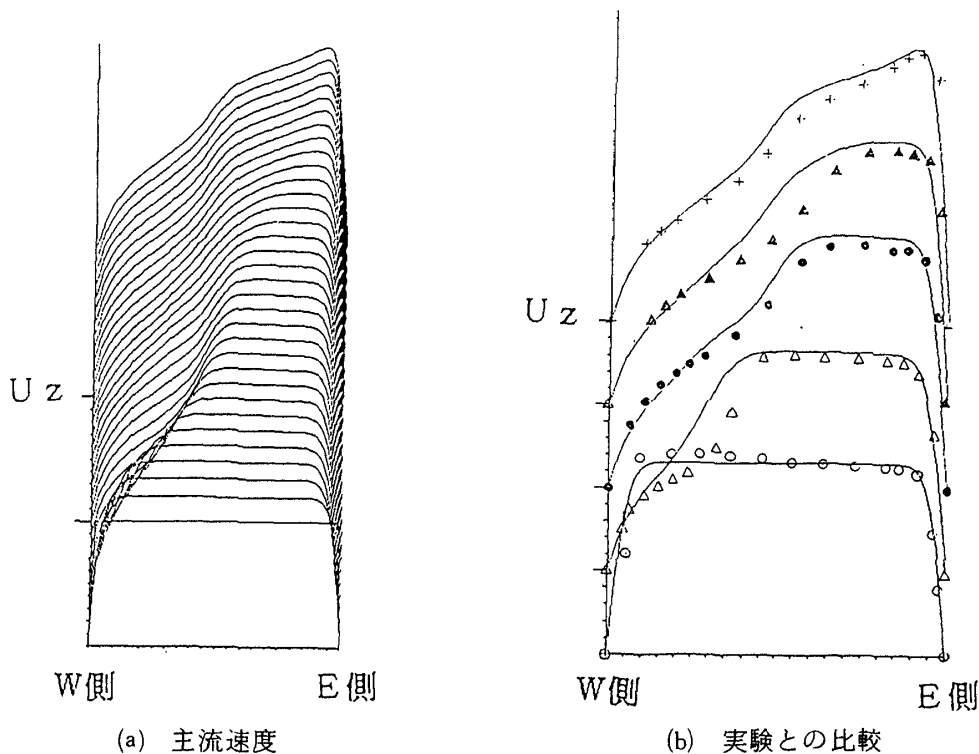


図 4 主流速度の下流方向変化 (曲り管)

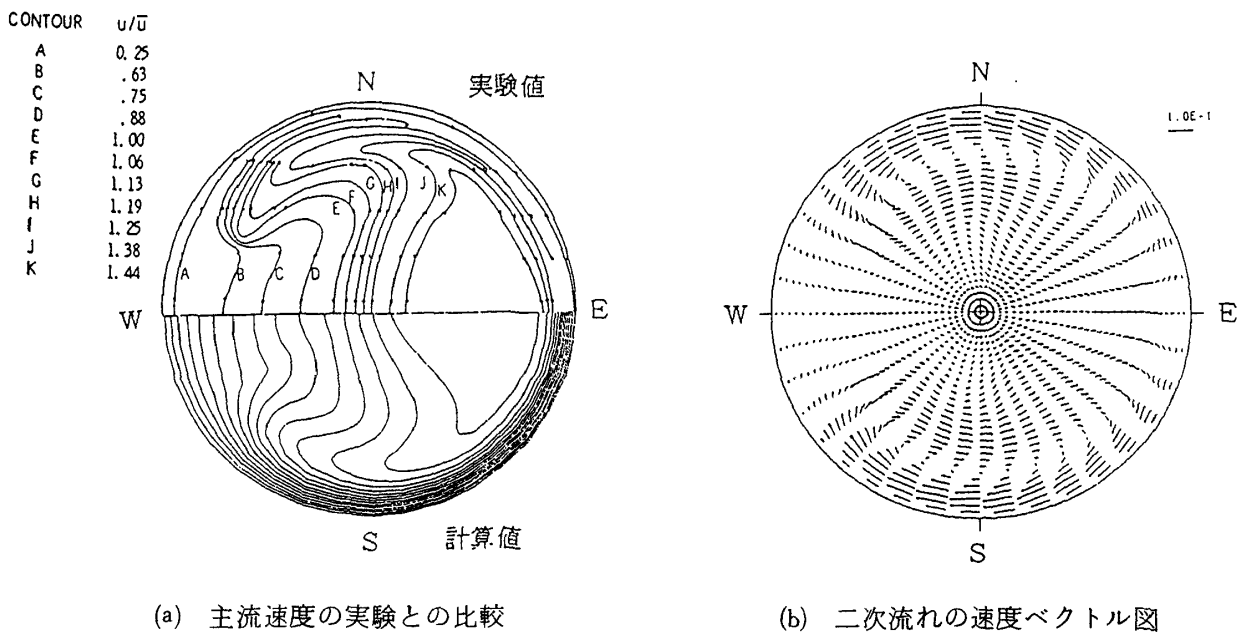


図 5 $\theta = 84^\circ$ の断面の速度 (曲り管)

との比較を示した。実験結果を記号、計算結果を実線で表わしている。曲り管の内側の減速の様子や主流速度のピークの位置など良く一致している。図5(a)は $\theta = 84^\circ$ での主流速度の等速線図による実験結果との比較である。図5(b)は同じ断面での二次流れ速度ベクトル図で曲り管特有のきれいな対の渦が現われている。

(2) $22.5^\circ - 22.5^\circ$ S字管

図6にS字管の形状を示した。入口側に約4D、

出口側に38Dの直管が接続されている。

図7(a), (b), (c)に圧力の下流方向変化を示す。管対称面($E-W$ 面)での圧力の下流方向変化を図7(a)に, (b)にはS次部分での圧力の変化を示した。(c)は断面内3点(E, W , 中心)の圧力の下流方向変化である。図8はS次部分での主流速度の変化を表わしている。

図9(a)~(d)は主流速度の等速線図を表わし, 上が実験, 下が本解法による結果で, 計算結果の等速線

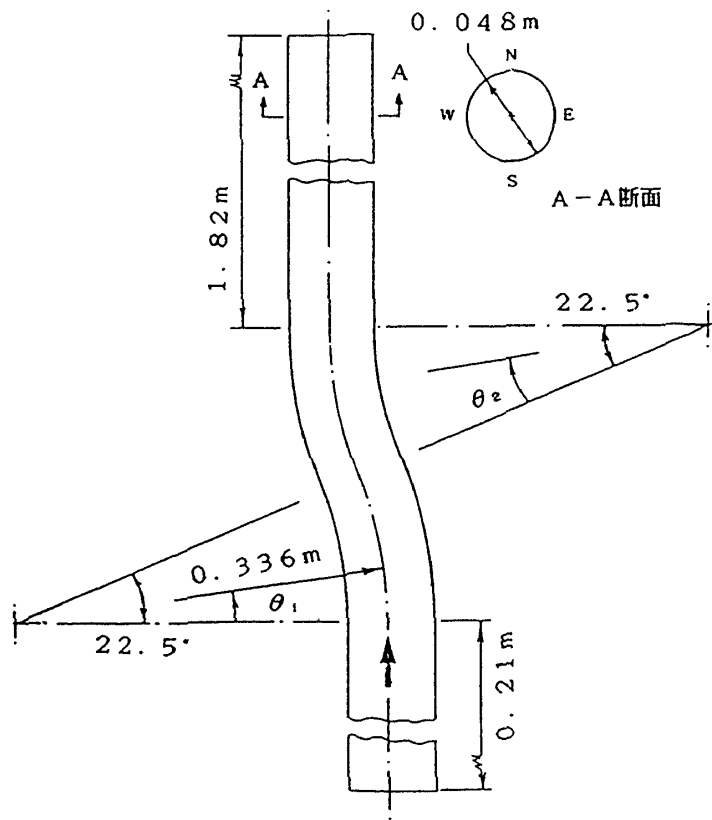


図6 $22.5^\circ - 22.5^\circ$ S字管

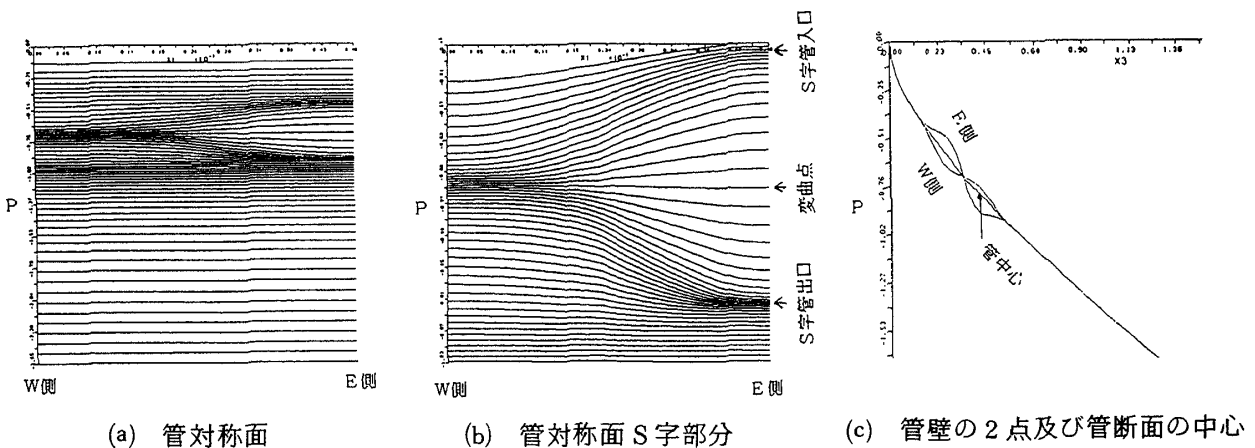


図7 圧力の下流方向変化 (S字管)

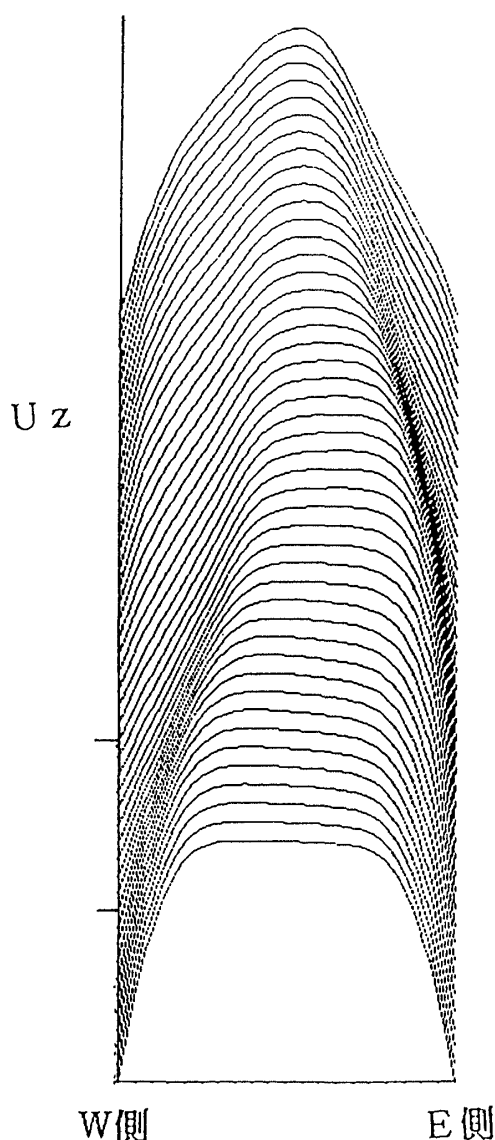


図 8 主流速度の下流方向変化 (S 字管)

の間隔は 0.1 である。計算結果は流れの性格をよく表わしている。

図 10 (a)~(d) は 2 次流れベクトル図で、第 1 屈曲部(a), (b)では曲り管特有の 2 次流れを示し、第 2 屈曲部(c)に入ると、流れに働く遠心力の向きが反対に

なり逆向きの渦を生成しようとしていることがわかる。第 2 屈曲部の終わり(d)ではきれいな逆回転の渦が見られる。

6. ま と め

今回は本解法の妥当性を検証するために、 180° 曲り円管と $22.5^\circ - 22.5^\circ$ S 字管について実験との比較を行ったが、全般的によく一致した結果を得ることが出来た。細部の不一致については、実験条件の不明な部分を推定して計算条件を設定していることに起因するものと考えられる。

筆者らは背圧を条件として取り込むことのできる部分放物型もほぼ完成させており、今後の課題としてはこの部分放物型を含む検証をさらに進めること、乱流モデルを取付けること、非直交格子の採用などをおこなう。

参 考 文 献

- 1) C.E. Towne, Computation of Viscous Flow in Curved Ducts and Comparison with Experimental Data, AIAA-84-0531.
- 2) Y. Agrawal, L. Talbot, and K. Gong, Laser Anemometer Study of Flow Development in Curved Circular Pipes, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 85, Pt. 3, Apr. 13, 1978.
- 3) A.M.K.P. Taylor, J.H. Whitelaw, and M. Yianneskis, Developing Flow in S-Shaped Ducts II-Circular Cross-Section Duct, NASA CR-3759.
- 4) 田村, 菊地: ダクト内三次元流れの数値解法, NAL SP-1
- 5) 菊地, 田村: 放物型ナビエ・ストークス方程式による 3 次元ダクト流れの計算, 第 2 回ガスタービン秋季講演会

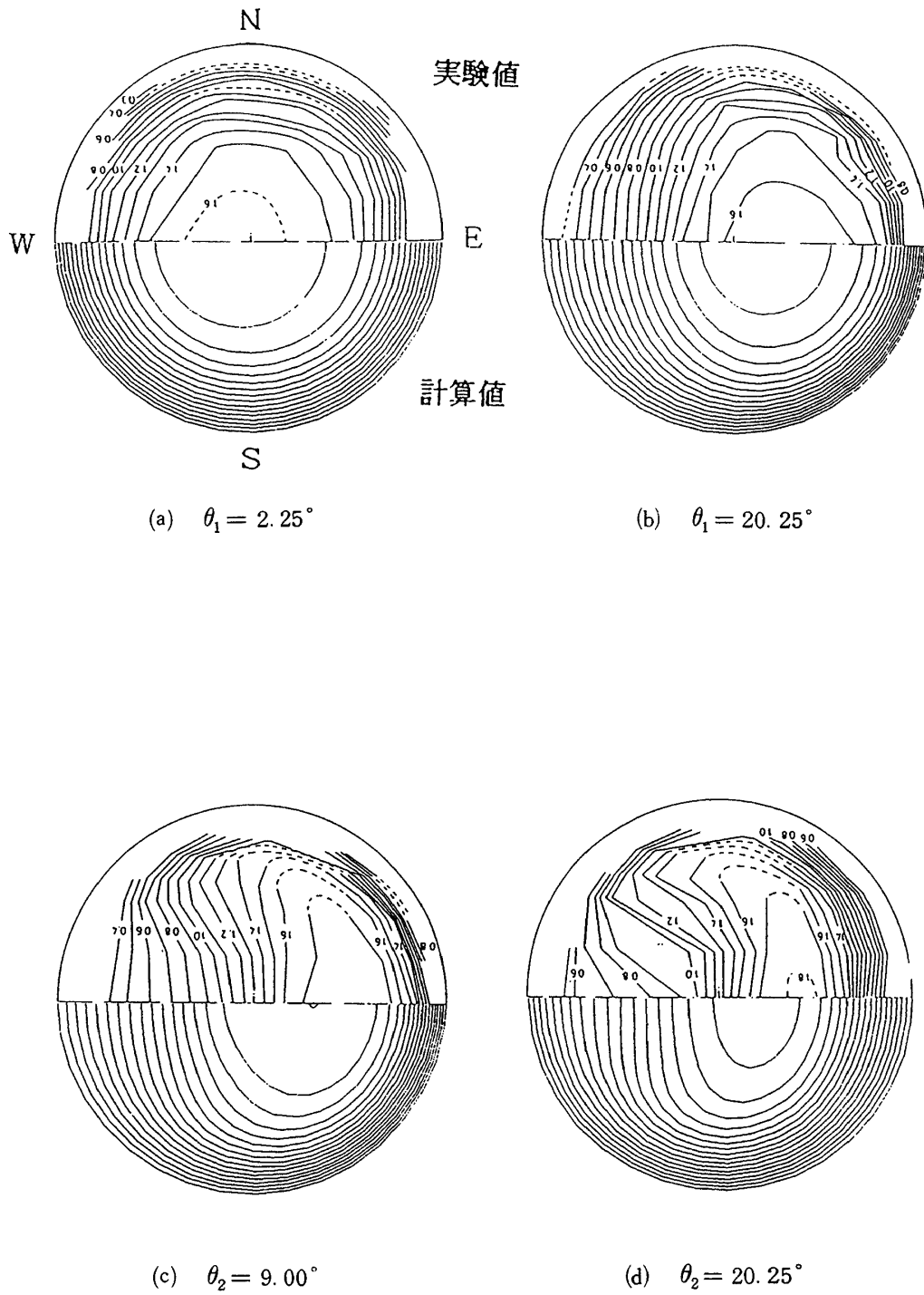


図9 主流速度の実験との比較 (S字管)

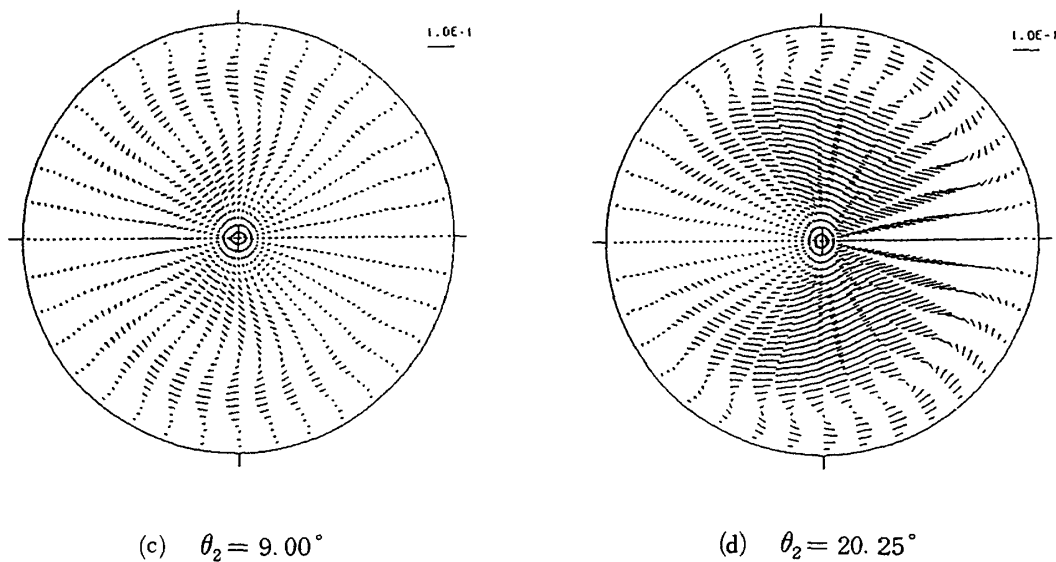
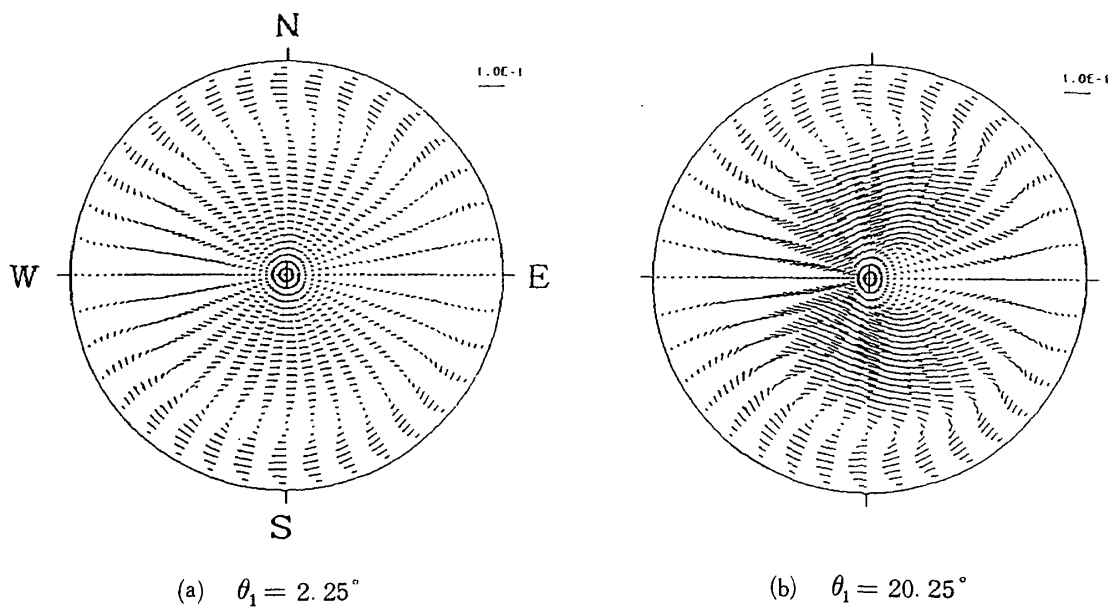


図 10 二次流れの速度ベクトル図 (S字管)