

設計における数値解析の活用について(その5)
 — 陰的TVD法の改良と応用計算 —

嶋 英 志* 吉 田 憲 司* 天 野 完 一**

The Role of Computational
 Fluid Dynamics in Aeronautical Engineering (5)
 — Improvements and Applications of Implicit TVD
 Finite Volume Code —

by

Eiji SHIMA, Kenji YOSHIDA
Kawasaki Heavy Industries Ltd., Kagamihara
 Kanichi AMANO
Japan Aircraft Development Corporation

ABSTRACT

An automatic grid generator for multiple element airfoils was developed and the existing implicit TVD (Total Variation Diminishing) finite volume code was improved in both accuracy and efficiency, in order to make the Navier-Stokes solver a practical design tool for high lift devices. Utilizing these codes, Navier-Stokes analysis of the single slotted flap was carried out.

The automatic grid generator utilizes the elliptic equation solver using the finite difference method combined with the panel method. The flow field is divided into subregions by the dividing stream lines which is calculated by the panel method and the computational grid in each subregion is generated by solving the elliptic equations (Thompson's method). Since the panel method can solve the potential flow around any number of arbitrary shaped bodies, this grid generator can generate a H-type computational grid around such bodies automatically.

To obtain a high accuracy on a rapidly stretching grid, the flow solver uses the TVD formulation containing a explicit treatment of non-uniform grid spacing. Converging rate and numerical stability of the flow solver is augmented by the relaxation approach using Symmetric Point Gauss Seidel method in matrix inversion process which is necessary for an implicit scheme.

* 川崎重工業株式会社

** 日本航空機開発協会

1. はじめに

航空機は離着陸時に高揚力性能を確保するために高揚力装置を用いるが輸送機ではマルチエレメントの高揚力装置を用いる事が多い。高揚力装置のレイノルズ数による特性変化は風洞試験でも予測が難しいためCFDによる解析が期待されている。最近のスーパーコンピュータの普及と解析アルゴリズムの発展によりNS(Navier-Stokes)解析を設計に使用することが可能になりつつあるが、高揚力装置の設計に用いるには未だ解決すべき問題が残されている。

まず第一にマルチエレメント翼周りの格子生成はまだ非常に手間と時間のかかる仕事であり、設計に用いるにはターンアラウンドタイムの点で問題がある。H型格子もしくはマルチブロック型格子上で有限体積法を適用することにより原理的には任意形状多物体まわりの流れの解析を行うことができるが、どのような場合でも容易に格子が生成できる訳ではない。

第二に高揚力装置は、特に着陸時に大舵角で用いられるために大きい剝離を伴った流れとなる。このような流れに対するNS解析の定量的予測能力はまだ不十分である。

今回、マルチエレメント翼周りの自動格子生成コードを開発し、当社の二次元NS解析コード¹⁾を適用し高揚力装置の解析を試みた。用いたコードは陰的TVD有限体積法であり、この計算格子上で精度、効率よく解析するために幾つかの改良を加えた。

今回は第一報として主に格子生成法と解析方法について報告する。

2. 格子生成

マルチエレメント高揚力装置のNS解析を行うためには、多物体周りの格子を生成することが必要であるが、ただ作れるだけでは設計ツールとして用いるのに十分ではない。

マルチエレメント高揚力装置の空力設計では、ギャップ、オーバーラップ、フラップ角、等のパラメータで表わされるフラップの位置に対してパラメトリックスタディを行って最適形態を決定する。この段階で多くの形態の解析が必要であり、NS解析で

はそれぞれの形態に対して計算格子が必要になる。解析のターンアラウンドタイムの短縮には格子生成の効率化がキーポイントであり、できれば全自動が望ましい。

マルチエレメント翼周りの格子を自動的に生成する手法として次のような事実に注目する。物体まわりのポテンシャル流を考えると流線と等ポテンシャル線は直交し物体表面は分割流線で表わされる。このことからポテンシャル流から物体適合格子が得られることがわかる。パネル法を用いれば任意形状まわりのポテンシャル流の解が得られるから、これにより任意形状多物体まわりの格子を生成できる。このような手法による格子生成が林、桜井、長畑²⁾、重見³⁾により示されている。原理的には流線と等ポテンシャル線を追跡することにより直交曲線座標が構成されるが、各点の流れ関数等を計算し交点を求めてゆくのは面倒であるしパネル法の限界として物体表面近くでは精度が劣化する。そこで流線、等ポテンシャル線を直接追跡する代わりに次のような間接的な方法を用いる。

分割流線と前後の等ポテンシャル線で囲まれた領域を考える。流れ関数を ψ 、ポテンシャルを ϕ とすると、

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= 0 \\ \Delta\phi &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

であり、流線上では

$$\begin{aligned}\psi &= \text{CONST}, \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= 0\end{aligned}\quad (2.2)$$

等ポテンシャル線上では

$$\begin{aligned}\phi &= \text{CONST}, \\ \nabla\psi \cdot \mathbf{n} &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

である。但し \mathbf{n} は流線もしくは等ポテンシャル線の法線ベクトルである。

(2.1)は次のように変換できる(Thompson et al. 1973)⁴⁾。

$$\begin{aligned}\alpha x_{\phi\phi} + \beta x_{\phi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} &= 0 \\ \alpha y_{\phi\phi} + \beta y_{\phi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} &= 0 \\ \alpha &= x_{\phi}^2 + x_{\psi}^2, \quad \gamma = y_{\phi}^2 + y_{\psi}^2 \\ \beta &= x_{\phi}x_{\psi} + y_{\phi}y_{\psi}\end{aligned}\quad (2.4)$$

これはよく用いられる楕円型方程式による格子生成である。これを上記の境界条件の元で適当な差分法

を用いて解けば直交曲線座標が再現できるが、それほど厳密に流線の形状や、流れ関数、ポテンシャルの値を計算しなくともThompsonの方法の特徴としかなり質の良い格子が得られる。また(2.1)の右辺にソース項を加えることにより格子の密度をコントロールできる。ここでは境界での格子の密度よりソース項を決定する方法を用いている⁵⁾。また境界条件としては全境界でディリクレ型の境界条件を用いた。

実際の格子生成は次のような手順で行っている。

- (1) 翼まわりのポテンシャル流をパネル法で解く。
- (2) 分割流線を求め流線ならびに物体上でのポテンシャルの値を計算する。パネル法では淀み点は厳密には定められないが流線と滑らかにつながっていれば大体の位置でよい。

(3) 必要な格子密度に応じて物体表面を含む流線を再分割する。初期の入力データが必ずしもNS解析に適した分割にはなっていないから前後縁付近や曲率の大きい部分では細かく物体から離れたところでは格子点節約のため粗く分割する必要がある。この分割の際に格子線が等ポテンシャル線と一致するように注意すると直交性が保たれる。

- (4) POISSON方程式を解いて分割流線間の格子を生成する。

今回の解析で用いた格子の例を図1に示す。

3. 数値解析法

3.1 有限体積法

高揚力装置の用いられるマッハ数は0.2程度であるが、高迎角時の前縁付近ではマッハ数が1近くになるため圧縮性の方程式を用いる。2次元のNS方程式を積分形で表わすと

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dx dy + \oint_{\partial \Omega} E ds = \oint_{\partial \Omega} S ds \quad (3.1.1)$$

但し

$$\begin{aligned} Q &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T \\ E &= (\rho V_n, \rho u V_n + n_x p, \rho v V_n + n_y p, \\ &\quad V_n(e + p))^T \\ S &= (0, n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy}, n_x \tau_{xy} + n_y \tau_{yy}, \\ &\quad n_x(u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + k T_x) \\ &\quad + n_y(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + k T_y))^T \\ V_n &= n_x u + n_y v \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

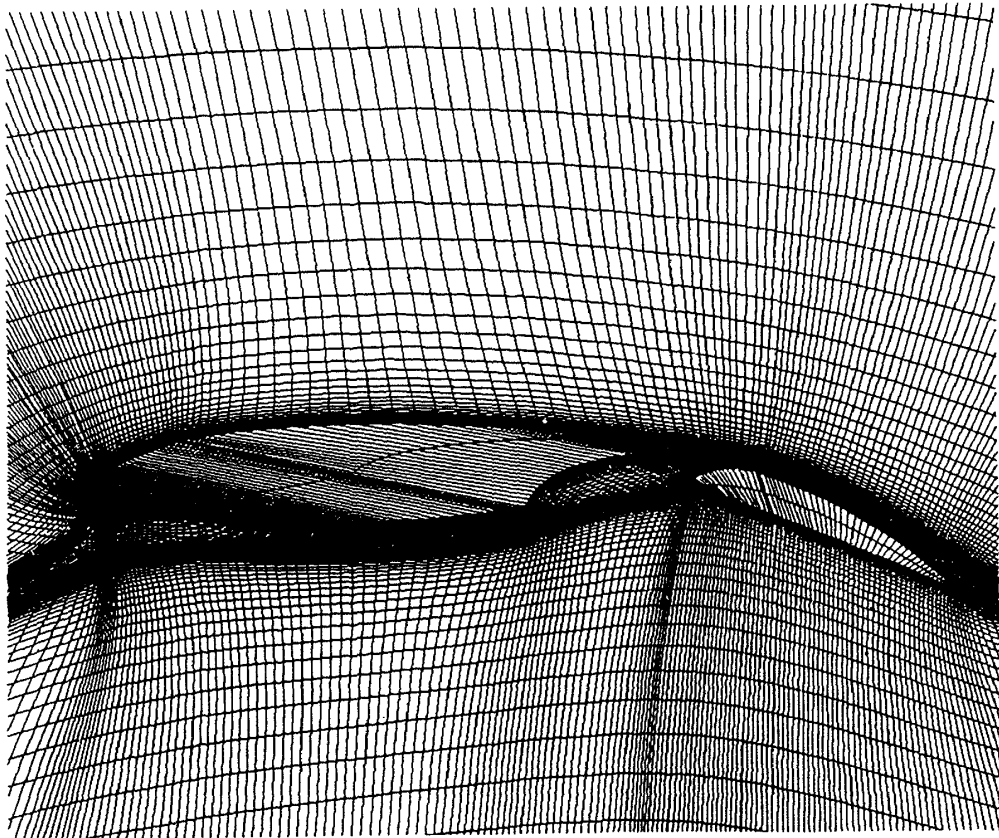


図1 自動格子生成コードを用いて作成した計算格子

変数は通常用いられるものを用い, (n_x, n_y) は境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである。これを一般曲線座標の格子で構成されたセルに適用すると有限体積法の基礎式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{ij}^{n+1} - Q_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{D_{ij}} [(\mathcal{L}E)_{i,j+\frac{1}{2}} + (\mathcal{L}E)_{i,j-\frac{1}{2}} \\ & + (\mathcal{L}E)_{i+\frac{1}{2},j} + (\mathcal{L}E)_{i-\frac{1}{2},j} - (\mathcal{L}S)_{i,j+\frac{1}{2}} \\ & - (\mathcal{L}S)_{i,j-\frac{1}{2}} - (\mathcal{L}S)_{i+\frac{1}{2},j} - (\mathcal{L}S)_{i-\frac{1}{2},j}] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

ここで D_{ij} はセルの面積, $E_{i,j+\frac{1}{2}}$ 等はセルの辺の長さである。

粘性項による流束 $S_{i,j+\frac{1}{2}}$ 等はそのまわりの 6 点を用いて中心差分的に計算する。また乱流モデルとしては Baldwin と Lomax による代数モデルを使用する。

非粘性項による流束 $E_{i,j+\frac{1}{2}}$ 等は有限体積型の TVD 法を用いて計算する。

3.2 不等間隔格子上での TVD 法

今回の解析に用いたような H 型格子では前後縁部分の格子を十分細かくとり, かつ格子総点数を抑えるには格子の急激なストレッチングが避けられない。沢田, 高梨⁶⁾は, このような場合に格子間隔の変化を陽に取り入れた手法により精度の向上が得られることを報告している。

ここでは Chakravarthy⁷⁾ の有限体積型の TVD 法に, この不等間隔性を陽に盛り込み, 加えて計算の高速化を図った手法を示す。

ヤコビアンマトリックスの対角化行列 \hat{T} , \hat{T}^{-1} を用いて局所固有ベクトル系に展開することにより TVD 法を EULER 方程式に適用する。ある座標方向の連続する二つのセル, $i-1, i, i+1$ について格子幅を δ で表わし, 非保存変数 $U = (\rho, u, v, p)^T$ とすると,

$$\Delta U_i = U_{i+1} - U_i, \quad \nabla U_i = U_i - U_{i-1} \quad (3.2.1)$$

$$\Delta V_i = \hat{T}_i \Delta U_i, \quad \nabla V_i = \hat{T}_i \nabla U_i \quad (3.2.2)$$

$$V_i = (v_1, v_2, v_3, v_4) \quad (3.2.3)$$

$$\Delta v_k = r^+ \text{MINMOD}(\Delta v_k / r^+, b^+ \nabla v_k / r^-)$$

$$\nabla v_k = r^- \text{MINMOD}(\nabla v_k / r^-, b^- \Delta v_k / r^+) \quad (3.2.4)$$

$$\Delta \bar{U}_i = \hat{T}_i^{-1} \Delta V_i, \quad \nabla \bar{U}_i = \hat{T}_i^{-1} \nabla V_i \quad (3.2.5)$$

$$U_i' = \frac{\frac{r^-}{r^+} \Delta \bar{U}_i + \frac{r^+}{r^-} \nabla \bar{U}_i}{r^+ + r^-} \quad (3.2.6)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}^L = U_i + \frac{1}{2} U_i'$$

$$U_{i-\frac{1}{2}}^R = U_i - \frac{1}{2} U_i' \quad (3.2.7)$$

ただし

$$\text{MINMOD}(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2}$$

$$\times \min(|x|, |y|) \quad (3.2.8)$$

$$b^+ = 2(r^+ + r^-) - \frac{r^+}{r^-}, \quad b^- = 2(r^+ + r^-) - \frac{r^-}{r^+} \quad (3.2.9)$$

$$r^+ = \frac{S_i + S_{i+1}}{2S_i}, \quad r^- = \frac{S_{i-1} + S_i}{2S_i} \quad (3.2.10)$$

である。

$\hat{T}^{-1} \hat{D} \hat{T} = \hat{A}$ で, \hat{A} は 2 次元の EULER 方程式を非保存変数 U で表わした時のヤコビアンマトリックスから計算される。

$$\hat{A} = n_x A + n_y B \quad (3.2.11)$$

$$U_t + A U_x + B U_y = 0 \quad (3.2.12)$$

ここで (n_x, n_y) はセル中心で平均したセル境界の単位法線ベクトルである。非保存形式の方程式を用いるのは保存形式より行列が簡単な形式で表わされるからであり, これはセル境界での物理量の計算に用いられるだけで保存則には影響しない。

こうして求められたセル境界の物理量を使って OSHER 法⁹⁾や ROE 法¹⁰⁾などの近似リーマン解法により流束を

$$E_{i+\frac{1}{2}} = F_{\text{RIEMANN}}(U_{i+\frac{1}{2}}^L, U_{i+\frac{1}{2}}^R, n_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.2.13)$$

として計算する。

3.3 対称ガウスザイデル法

2 次元の陰的 TVD 法はデルタフォームで次のような形式に表わせる。

$$[I + \Delta A^- + \nabla A^+ + \Delta B^- + \nabla B^+] dQ = dQ^* \quad (3.3.1)$$

陽的部分(右辺)は前章までに述べたTVD法で計算されるが、陰的部分(左辺)はそのままでは非常に複雑なので一次精度の風上差分を用いる。

このようなINCONSISTENTな陰解法は無条件TVDではないが、実用上かなり大きなCFL数で安定に計算できる。しかしLU-ADI法¹¹⁾などのAF法では、CFL数が大きいほど収束が早い訳ではない。局所時間法を用いて全場のCFL数を一定にした場合、収束の加速にはCFL数の最適値が存在し、それ以上では収束性が劣化する。この最適値は問題ごとに異なり、最適化するの容易ではない。

一方、TVD法の優対角性を用いAF法に替えて、古典的な緩和法を適用することにより、これが改善されることが分かり、多くの研究者によって試みられている(文献13~16)。緩和法を用いて厳密に行列を反転するには多くの繰り返しが必要であるが、安定に計算を進めるには1, 2回の繰り返しだけで十分である。

様々な緩和法が適用可能であるが次のような判定基準

- (1) ベクトル化が容易である,
- (2) 記憶容量が少なく済む,
- (3) 二次精度の場合の収束性(一次精度法ではどんな方法でも収束する),
- (4) 計算時間,

からSGS(対称ガウスザイデル)法を選択した。亜音速の場合音波の伝播方向の対称性から対称なスロープが必要になる。

SGS法は次のようにあらわせる。陰解法をマトリックスフォームで書くと,

$$[-B^+, -A^+; D; A^-, B^-]dQ = dQ^* \\ D = I + A^+ - A^- + B^+ - B^- \quad (3.3.1)$$

これを近似LDU分解^{12),13)}するとSGS法を得る。

$$[-B^+, -A^+; D]D^{-1}[D; A^-, B^-]dQ = dQ^* \quad (3.3.2)$$

C型格子に対しては、SGS法は1ステップ当たりの計算時間がLU-ADI法より余分にかかる分だけ効率的ではない。一方、今回の解析で用いたようなH型格子に対してはAF法よりも安定で収束も早いという特徴を持つ。よって今回は、このSGS法を用いた。

4. 計算結果

川崎重工業が日本航空機開発協会より受注した昭和61年度低速空力設計作業の一環として、これらのコードを用いた高揚力装置の解析を行った。解析対象は文献17に記されているRAEで風洞試験の行われたフラップ角30度のシングルスロットドフラップである。計算は計算流体力学研究所の富士通VP-200で行った。図2, 3にギャップ量の異なる場合の等マッハ線図を示す。フラップ収納部の剝離域の大きさが変わり等価的な流路の形状が変化している。また、この場合ギャップ量の大きい形状の揚力係数が大きいという結果を得ているが、これは最適なギャップ量が存在するという風試結果と定性的に一致する。このようなデータはポテンシャル流では決して得られない。

5. 結論

パネル法と楕円型方程式による格子生成を組み合わせた計算格子自動生成コードを開発し、不等間隔格子での精度向上と対称ガウスザイデル法による計算効率の改善を図った改良型の陰的TVD法を用いて高揚力装置のNS解析を試みた。フラップギャップ量変化による揚力係数の変化について風試結果と定性的に一致する結果が得られた。こんご定量評価のため乱流モデルの改善などを行ってゆく予定である。

参考文献

- 1) 嶋 英志, 城之内忠正: 設計における数値解析の活用について(その4), 第4回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 1986.
- 2) 林 正徳, 桜井 晃, 長畑正史: 任意形状物体まわりの粘性流計算に対する試み, 日本航空宇宙学会誌, 第31巻, 359号, 1983.
- 3) 重見 仁: パネル法を応用した格子生成法, 航空宇宙技術研究所報告, TR-860, 1985.
- 4) Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W.: TOMCAT-A Code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing

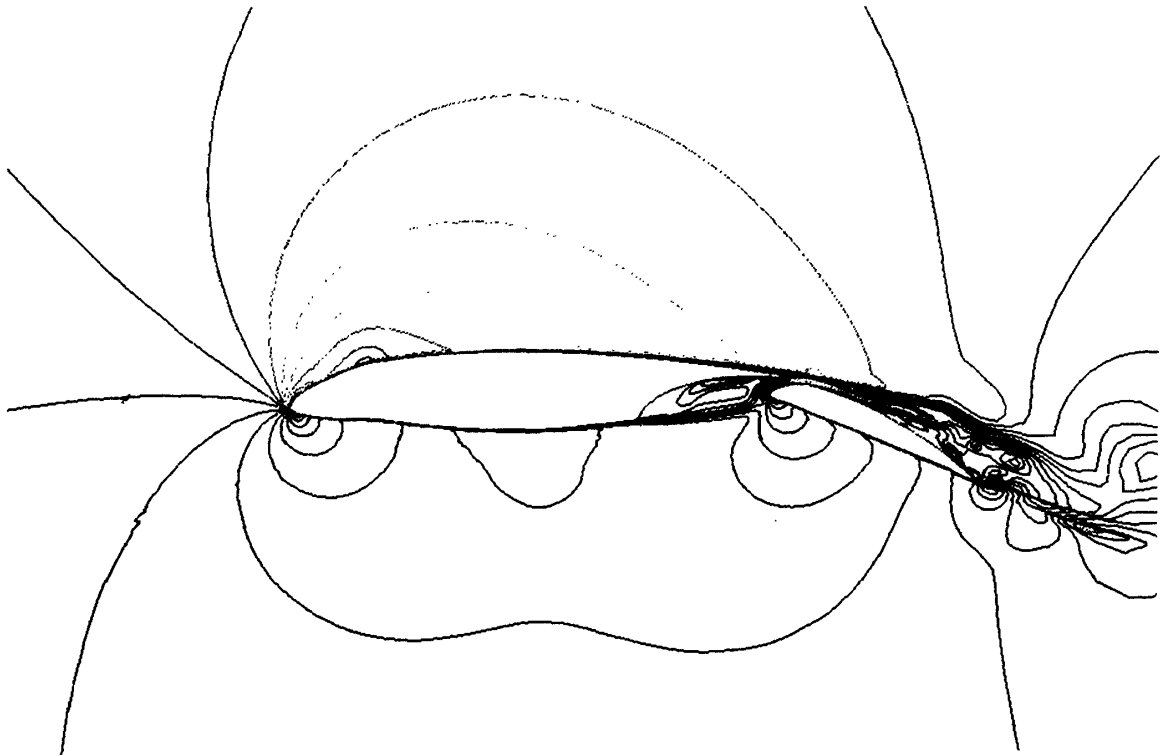


図 2 シングルスロッドフラップの解析例。流れの条件は $M=0.2$, $Re=3.7 \times 10^6$, 迎角 0 度。フラップギャップの大きさはクリーン翼弦長の 1 %

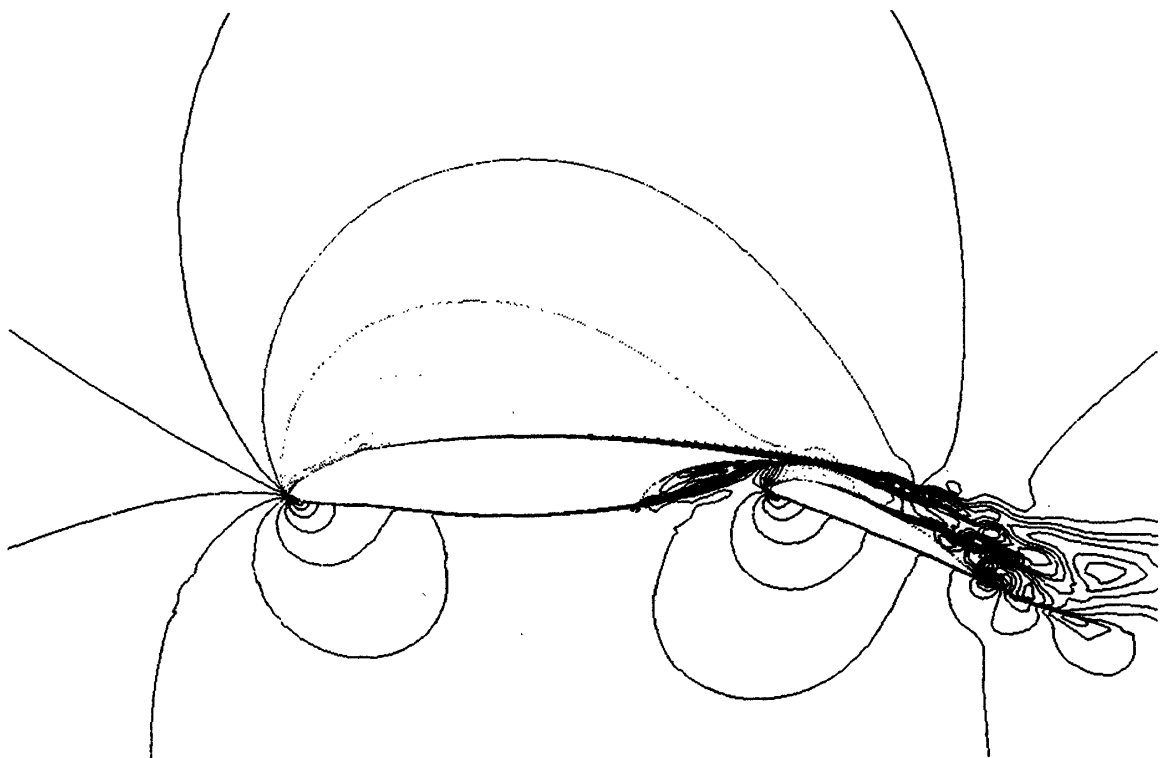


図 3 シングルスロッドフラップの解析例。流れの条件は図 2 と同じ。フラップギャップの大きさはクリーン翼弦長の 3 %

- Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, *J. Comp. Phys.*, Vol. 24, 1977, pp. 245-273.
- 5) Thomas, P.D. and Middlecoff, J.F.: Direct Control of Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations, *AIAA*, Vol. 18, 1980, pp. 652-656.
 - 6) 沢田恵介, 高梨 進: オイラー方程式による翼ナセル干渉解析, 第4回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 1986.
 - 7) Chakravarthy, S.R.: The Versatility and Reliability of Euler Solvers Based on High Accuracy TVD Formulations, *AIAA Paper* 86-0243.
 - 8) Harten, A.: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *J. Comp. Phys.*, Vol. 49, 1983, pp. 357-393.
 - 9) Osher, S. and Chakravarthy, S.R.: Upwind Schemes and Boundary Conditions with Application to the Euler Equations in General Geometries, *J. Comp. Phys.*, Vol. 150, 1983, pp. 447-481.
 - 10) Roe, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes *J. Comp. Phys.*, Vol. 143, 1981, pp. 358-372.
 - 11) Obayashi, S. and Kuwahara, K.: LU Factorization of an Implicit Schemes for the Compressible Navier-Stokes Equations, *AIAA Paper* 84-1670.
 - 12) 大林 茂, 藤井孝蔵, 桑原邦郎: ナビエ・ストークス方程式に対する LU-ADI 法と境界条件, 第17回流体力学講演会講演集, 1985.
 - 13) Lombard, C.K.: Universal Single Level Implicit Algorithm for Gasdynamics, *AIAA Paper* 84-1533.
 - 14) Chakravarthy, S.R.: Relaxation Method for Unfactored Implicit Upwind Schemes, *AIAA Paper* 84-0165.
 - 15) Rai, M.M.: A Relaxation Approach to Patched-Grid Calculations with the Euler Equations, *AIAA Paper* 85-0295.
 - 16) MacCormack, R.W.: Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations, *AIAA Paper* 85-0032.
 - 17) Foster, D.N., Irwin, H.P.A.H. and Williams, B.R.: The Two-Dimensional Flow Around a Slotted Flap, Report and Memorandum, No. 3681, 1970.

