

# 非定常オイラー方程式に対する高精度風上陰差分法

松野 謙一\*

## An Implicit, High Order Accurate, Upwind Scheme for Unsteady Euler Equations

by

Kenichi MATSUNO  
National Aerospace Laboratory

### ABSTRACT

A new implicit finite-difference scheme for unsteady Euler equations is proposed. The quantities of the order of the square of the time-step are employed as unknowns of the scheme, which produces a “ $\delta^2$  (delta-square)-form” of the algorithm. The present scheme has second-order time accuracy without iteration. The iteration process in the algorithm, which the scheme has as an option, improves the numerical accuracy and robustness. Numerical experiments show that the present scheme is very good not only for unsteady problems but also steady problems.

### 1. はじめに

オイラー方程式に対する陰的解法はいわゆる「 $\delta$ -形式」に基づいてスキームを構成することが多い。この $\delta$ -形式は時間依存解としての定常流を対象とした場合、スキームの右辺側に定常方程式の離散近似形が現れること、また収束解の時間ステップ幅への依存性を排除する上からも好都合な形式といわれている。いま、MacCormack<sup>1)</sup>に従って差分法における各時間ステップの修正量を $C$ で表し、スキームを

$$[\text{Numerics}]C = [\text{Physics}]$$

と解釈するとき、 $\delta$ -形式により記述された数値解法は、 $[\text{Physics}]$ が、定常項(一次元オイラー方程式なら $F_x$ )であることから、それは定常流-orientedなスキームといえるであろう。少なくとも、時

間依存解として定常流を求める場合には修正量 $C$ ( $=\delta q$ ) $\rightarrow 0$ として、定常方程式 $F_x=0$ を求めるのであるから、都合のいい形式である。これに対し非定常現象を対象とした場合必ずしも $\delta$ -形式の利点が生きて来るとも思えない。本質的に非定常現象を対象とする時には、 $[\text{Physics}]$ の項は、非定常方程式そのものの離散近似形が対応するような形式が適しているであろう。この様な考えのもと、ここでは、本質的に非定常な現象を対象とする場合に適したスキームの形式として、時間二次精度の前提のもとに、右辺側に非定常方程式の離散近似形が現れる「 $\delta^2$ -形式」を提案し、それに基づく新しいスキーム( $\delta^2$ -コレクションスキーム)を構成する。

### 2. 数値解法

一次元方程式を対象とする。一次元非定常オイラー方程式は、ベクトル形式で、次の様に書かれる。

$$q_t + F_x = 0 \quad (1)$$

\* 航空宇宙技術研究所・空気力学第二部

ただし

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに,  $\rho$ ,  $u$  及び  $e$  は, それぞれ密度, 速度及び全エネルギーである。圧力  $p$  は,

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho u^2 / 2)$$

ただし,  $\gamma$  は比熱比で空気の場合 1.4 である。

(1)式に対し, 時間 3-レベルの差分近似を行い通常の「 $\delta$ -形式」で記述すると  $\tau$  及び  $\theta$  を定数パラメータとして次のように表される:

$$\begin{aligned} & [(1+\tau)/\Delta t + \theta D_x A^n] \delta q^n \\ & = -[D_x F^n] + (\tau/\Delta t) \delta q^{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに,

$$A = \partial F / \partial q,$$

および

$$\begin{aligned} \delta q^n &= q^{n+1} - q^n, \quad q^{n+1} = q(t^{n+1}), \\ t^{n+1} &= t^n + \Delta t \end{aligned}$$

であり,  $D_x$  は, 空間微分に対する差分近似オペレータである。「 $\delta$ -形式」(3)式のスキームにおいては新しい時間  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  における量は

$$q^{n+1} = q^n + \delta q^n \quad (4)$$

によって計算される。「 $\delta$ -形式」(3)式のスキームは, 右辺 [...] に  $[F_x]$  の差分近似形を持っていることに注意されたい。

さて, 非定常現象を精度良く計算しようとする場合, 時間二次以上の精度が必要であろう。ここでは, 時間二次精度を前提において議論するので,  $\tau$  及び  $\theta$  の組合せは, ( $\tau=0, \theta=1/2$ ) または ( $\tau=1/2, \theta=1$ ) をとるものとする。

#### $\delta^2$ -コレクションスキーム

いま, 未知量として  $o(\Delta t^2)$  の量:  $\delta^2 q$  を次式により定義する:

$$q^{n+1<\nu+1>} = q^{n+1<\nu>} + \delta^2 q \quad (5)$$

但し,

$$q^{n+1<0>} = q^n + (q^n - q^{n-1}) \quad (6)$$

ここに  $\nu$  は反復回数を示すインデックスとする。このとき, (3)式により  $\delta^2 q$  を新しい未知量とし, 時間二次精度のもと若干のオーダー評価および変形操作を施すと

$$\begin{aligned} & [(1+\tau)/\Delta t + \sigma \theta D_x A^{n+1<\nu>}] \delta^2 q \\ & = -[(1/\Delta t)\{(1+\tau)q^{n+1<\nu>} \\ & \quad - (1+2\tau)q^n - \tau q^{n-1}\} + \{\theta D_x F^{n+1<\nu>} \\ & \quad + (1-\theta)D_x F^n\}] \end{aligned} \quad (7)$$

をえる。ここに  $\sigma$  は  $o(1)$  のパラメータである。(7)式の右辺は  $[q_t + F_x]$  の  $t = t^{n+\theta}$  における差分近似式に相当するので形式的に

$$\begin{aligned} & [(1+\tau)/\Delta t + \sigma \theta D_x A] \delta^2 q \\ & = -[q_t + F_x]^{n+\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

とも表わせる。なお(7)式の導出について詳細は文献 2) を参照されたい。

(7)式は,  $o(\Delta t^2)$  の量:  $\delta^2 q$  を未知量として記述されているのでここでは(3)式に倣って「 $\delta^2$ -形式」と呼び, そのスキームを  $\delta^2$ -コレクションスキームと呼ぶことにする。本スキームは反復法の形式をもっているが, 数式上は反復無しでも時間二次精度をもっている。すなわち, (6)式によって予測される  $q^{n+1<0>}$  のもとに(7)式により  $\delta^2 q$  を計算し

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= q^{n+1<1>} = q^{n+1<0>} + \delta^2 q \\ &= (q^n + (q^n - q^{n-1}) + \delta^2 q) \end{aligned} \quad (9)$$

としても, 時間二次精度である。ただしクーラン数が大きい場合あるいは流れの特性時間が場所によって極端に異なるいわゆる stiff な系の場合, 反復無しでは十分に現象に追従できない場合がある。このような場合,  $\delta^2$ -コレクションスキームを反復的にもちい解の実質精度を高め且つ安定性をも高めることが可能であり, 有効である。

#### 風上差分

波動型の方程式に対しては, 波動の伝播方向に対しそれぞれが風上差分となるように差分近似するので安定性の上でまた衝撃波に於ける無用な振動を押さえる意味でも好ましい。いま流束  $F$  及びそのヤコビアン  $A$  をその波動の伝播方向に対し次のように分離する:

$$F = F^+ + F^- \quad (10)$$

$$A = A^+ + A^- \quad (11)$$

このとき, 分離された流束のそれぞれの波動伝播方向に対し風上差分を適用する。

次章の数値計算例では, 陰(左辺)側風上差分オペレータ  $D_x$  として一次精度風上差分オペレータ  $V_x$ ,

$\Delta_x$ を使った:

$$D_x A^{n+1<\nu>} \delta^2 q = (\nabla_x A^{n+1<\nu>} + \Delta_x A^{-n+1<\nu>}) \delta^2 q \quad (12)$$

陽(右辺)側風上差分オペレータは、次の Van Leer の滑らかな流束分離に高次精度風上差分を適用し、微分可能制限子(Differentiable limiter)を導入した。<sup>3)</sup>

$$D_x F = D_x^- F^+ + D_x^+ F^- = \{ (F_{i+1/2}^+ - F_{i-1/2}^+) + (F_{i+1/2}^- - F_{i-1/2}^-) \} / \Delta_x \quad (13)$$

ここに、 $f$ を流束ベクトル  $F$ の要素とすると

$$f_{i+1/2}^+ = f_i^+ + [ (s/4) \{ (1 - ks) \nabla^+ + (1 + ks) \Delta^+ \} ]_i \quad (14a)$$

$$f_{i+1/2}^- = f_{i+1}^- - [ (s/4) \{ (1 - ks) \Delta^- + (1 + ks) \nabla^- \} ]_{i+1} \quad (14b)$$

$$\Delta^+ = f_{i+1}^+ - f_i^+, \quad \nabla^+ = f_i^+ - f_{i-1}^+ \\ s = (2\Delta \nabla + \epsilon) / (\Delta^2 + \nabla^2 + \epsilon) \quad (14c)$$

$\epsilon$ は、小さな正数である( $\epsilon=10^{-6}$ )。また、(13)式は  $k$ が、0及び-1のとき二次精度の、1/3のとき三次精度のそれぞれ風上差分となる。

なお、 $A^{n+1<0>}$ の評価は、次式(15)、(16)何れでも精度に影響はない。

$$A^{n+1<0>} = A(q^n) \quad (15)$$

$$A^{n+1<0>} = A(q^{n+1<0>}) \quad (16)$$

### 3. 数値計算

$\delta^2$ -コレクションスキームの特性を調べるため、衝撃波管問題を例に、その計算結果を厳密解と比較する。また、本スキームが、定常問題にも有効である事を示すために拡大管流れ問題を例にその計算結果を示す。スキームの時間差分は、二次精度であり、非定常問題については、局所最大クーラン数が、1以下であるのでクランク・ニコルソン型( $\tau=0, \theta=1/2$ )を、また定常問題については、局所最大クーラン数を大きくとるので3点後退型( $\tau=1/2, \theta=1$ )とした。

**衝撃波管問題:** スキームに関する論文でしばしば使われる Sod の標準問題<sup>4)</sup>を選んだ。隔膜は1/3管長に位置し高圧側/低圧側の圧力及び密度比は、それぞれ、 $P_{41}=10, \rho_{41}=8$ である。計算格子数は、101点とし、 $\Delta_t/\Delta_x=0.5$ 局所最大クーラン数は、約0.93である。50タイムステップに於ける計算値

を厳密解と比較する。 $\delta^2$ -コレクションスキームは、反復無しでも数式上、時間二次精度を持っている。第1図は、反復無し(単段型スキーム)として計算した場合の結果を示す。三次精度の空間差分近似を使っているのにも拘らず衝撃波及び接触面に於ける結果は、良好とはいえない。これに対し、第2図は、2回反復を行った場合の結果を示す。第2図、中央

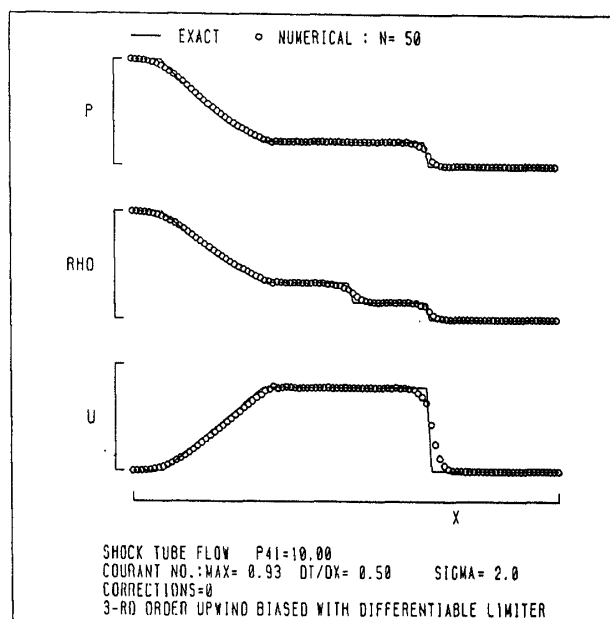


図 1 衝撃波管問題に対する計算値と厳密解との比較(反復無し)

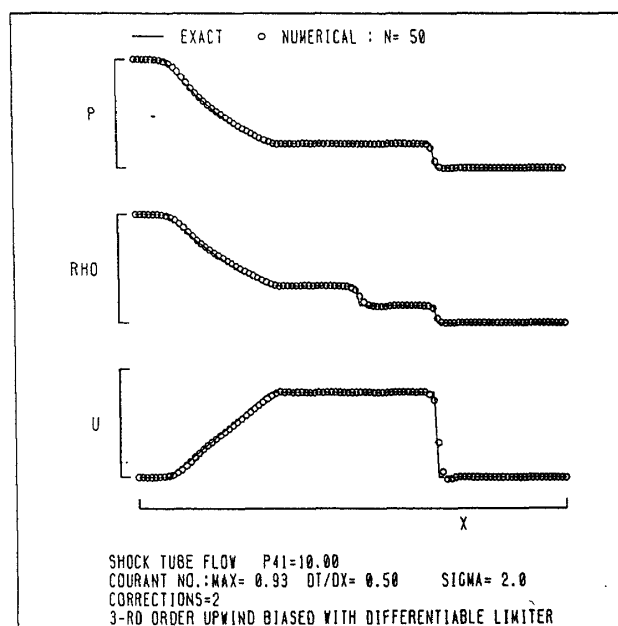


図 2 衝撃波管問題に対する計算値と厳密解との比較(2回反復)

の密度分布図から見られるごとく、衝撃波面は2格子、接触面は3格子で捉えられており、極めて良い解の改善が為されている。

拡大管流れ問題：時間依存解として定常流を求める所謂時間依存法に対するテスト問題として Yee<sup>5)</sup> 他によってしばしば用いられた次の断面形状分布を持つ拡大管に対し超音速流入亜音速流出の場合を計算した。

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4),$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (10)$$

計算は、超音速流入側圧力  $p_1/\rho_1 c_1^2 = 1/\gamma$ 、マッハ数  $M_1 = 1.26$ 、亜音速流出側圧力  $p_2/p_1 = 1.9$  とし格子点数 51,  $\Delta t/\Delta x = 4.42$  (流入口クーラン数 10) を与えて行った。なお、計算境界条件<sup>5)</sup>は、陽的に取扱ひ、超音速流入側に於いて  $p, \rho, u$  を与え、亜音速流出側に於いて  $p$  を与えその他は線形外挿とした。初期条件<sup>5)</sup>は、流入と流出両端の線形内挿値とした。第3図に計算結果を厳密解と比較する。図は30タイムステップにおける結果である。通常陰的差分法が第3図の状態に達するのに100タイムステップ以上要することを考慮するとき、本スキームが定常流計算に対しても有効かつ能率的な計算法であることが示されている。

### 参 考 文 献

- 1) MacCormack, R.W.: A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, AIAA-81-0110 (1981).
- 2) 松野謙一：非定常オイラー方程式に対する $\delta^2$ -コレクションスキーム, 日本航空宇宙学会誌, Vol.36 (1988年2月)

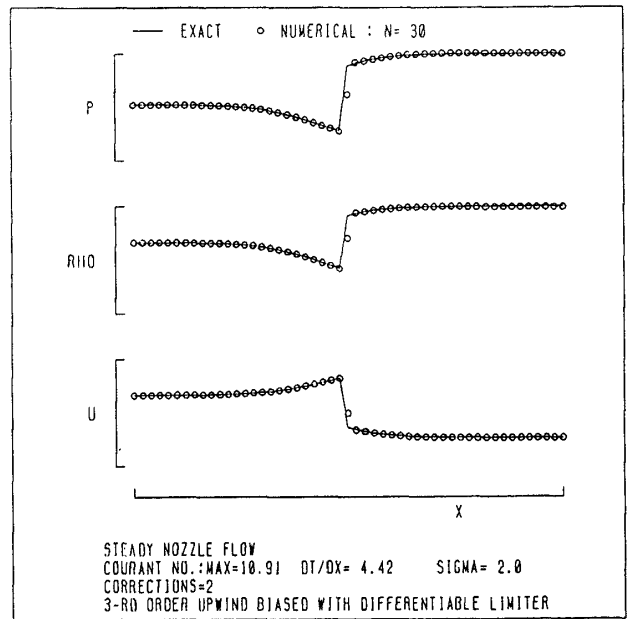


図3 定常拡大管流れに対する計算値と厳密解との比較

- 3) Anderson, W.K., Thomas, J.L. and van Leer, B.: A Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations, AIAA-85-0122 (1985).
- 4) Sod, G.A.: A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, J. Comp. Phys., Vol. 27, pp. 1-31 (1978).
- 5) Yee, H.C., Beam, R.M. and Warming, R.F.: Stable Boundary Approximations for a Class of Implicit Schemes for the One-Dimensional Inviscid Equations of Gas Dynamics, AIAA-81-1009 (1981).