

# 指数表現を用いたk-ε方程式による乱流場の 数値シミュレーション

日 夏 宗 彦\* 児 玉 良 明\*

## Numerical Simulation of Turbulent Flow Using the Exponential Expression of k-ε Equation

by

Munehiko HINATSU, Yoshiaki KODAMA  
*Ship Research Institute, Ministry of Transport*

### ABSTRACT

This paper presents a numerical simulation of a turbulent flow around a wing section by use of k-ε turbulence model. In order to assure the positiveness of k and ε, the exponential expression of k-ε is used. IAF method is adopted as a computational scheme. A new treatment for the boundary condition on the wing surface is devised. A turbulent flow around NACA0012 wing section with 5-deg. angle of attack at Re = 10<sup>6</sup> is simulated.

### 1. 緒 言

翼型周りの乱流場の数値シミュレーションを、2方程式乱流モデルで良く用いられるk-εモデルを用いて行った。計算スキームはIAF法を用いた。使用した翼型はNACA0012で迎角は5度、レイノルズ数は10<sup>6</sup>とした。

### 2. 支配方程式と近似因数分解法 による定式化

支配方程式は通常のk-ε方程式で、低レイノルズ数乱流モデルは採用しない。支配方程式をつぎに示す。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_T \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_T \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left[ \frac{1}{Re} + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right] \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \epsilon \quad (1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left[ \frac{1}{Re} + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right] \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$+ C_1 \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \nu_T \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = 0$$

ただし、本論では、レイノルズ応力は0方程式モデル的に与えることとして、(1)式の波線部分は省略した。各係数値は文献1)の標準値とした。連続の式は疑似圧縮性をいれた。kに関する式の右辺第1項は生成項で2次元では

$$\begin{aligned}
 G &= \nu_T \{ 2[(\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial y)^2] \\
 &\quad + [(\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x)]^2 \} \\
 &= \nu_T \{ -4(\partial u / \partial x) \cdot (\partial v / \partial y) \\
 &\quad + [(\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x)]^2 \} \quad (2)
 \end{aligned}$$

のように書ける。本論では連続の式に疑似圧縮性を入れているので、生成項は(2)式の第2式を用いて  $G$  が過大に評価されないようにした。

(1)式には  $k$  と  $\varepsilon$  に対するソース項があって、この式のまま直接解くと、 $k$  や  $\varepsilon$  が計算途中で負になることがあり、計算は発散してしまう。この困難を解消するため、児玉<sup>2)</sup>は次のような指数表示式

$$k = \exp(m), \quad \varepsilon = \exp(n) \quad (3)$$

を与えて  $k$  と  $\varepsilon$  の正值性を保証し、 $k$  と  $\varepsilon$  を解く代わりに  $m$  と  $n$  を解く方法を提案した。本論でもこの方法を用いる。(3)式を(1)式に代入して整理し、物体適合座標に座標変換した結果をベクトル表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q_i + \mathbf{A}q_\xi + \mathbf{B}q_\eta &= \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi} + \hat{b}q_{\xi\eta} + \hat{c}q_{\eta\eta} \\
 &\quad + \hat{d}q_\xi + \hat{e}q_\eta) - \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi} - \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta} + \mathbf{T} \quad (4)
 \end{aligned}$$

未知数  $q$  は  $q = [u, v, p, m, n]^T$  である。また、数値安定性を得るために4階の人工粘性項を陰的に加えている。

この式に対して、時間微分に関してオイラーの陰解法を用い、非線型項を局所的に線型化したのちに近似因数分解すると

$$\begin{aligned}
 &\{ 1 + \Delta t(-\mathbf{T}_1 + \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} - \mathbf{T}_2 - \mathbf{H}\hat{d}) \frac{\partial}{\partial \xi} \\
 &\quad - \mathbf{H}\hat{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \omega_\xi \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}) \} \\
 &\{ 1 + \Delta t(\hat{\mathbf{B}} + (\mathbf{B} - \mathbf{T}_3 - \mathbf{H}\hat{e}) \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &\quad - \mathbf{H}\hat{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \omega_\eta \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}) \} \cdot \Delta q^n \\
 &= -\Delta t \{ \mathbf{A}q_\xi^n + \mathbf{B}q_\eta^n - \mathbf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}^n + \hat{b}q_{\xi\eta}^n \\
 &\quad + \hat{c}q_{\eta\eta}^n + \hat{d}q_\xi^n + \hat{e}q_\eta^n) - \mathbf{T} + \omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}^n \\
 &\quad + \omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}^n \} + \Delta t \mathbf{H}\hat{b}(\Delta q)_{\xi\eta}^{n-1} \quad (5)
 \end{aligned}$$

のようになる。このとき  $\nu_T$  に関しては全て陽的に扱った。(5)式を空間5点中央差分で離散化して解く。

Fig.1 (a)に今回用いた格子分割を示す。C-Grid系で、 $\xi$  方向(周方向)に121分割、 $\eta$  方向に35分割、翼表面の最小格子間隔は0.0002である。Fig.1 (b)に計算領域を示す。上流側の境界条件は一様流と勾配零の条件を、下流側は線型外挿の条件を課した。

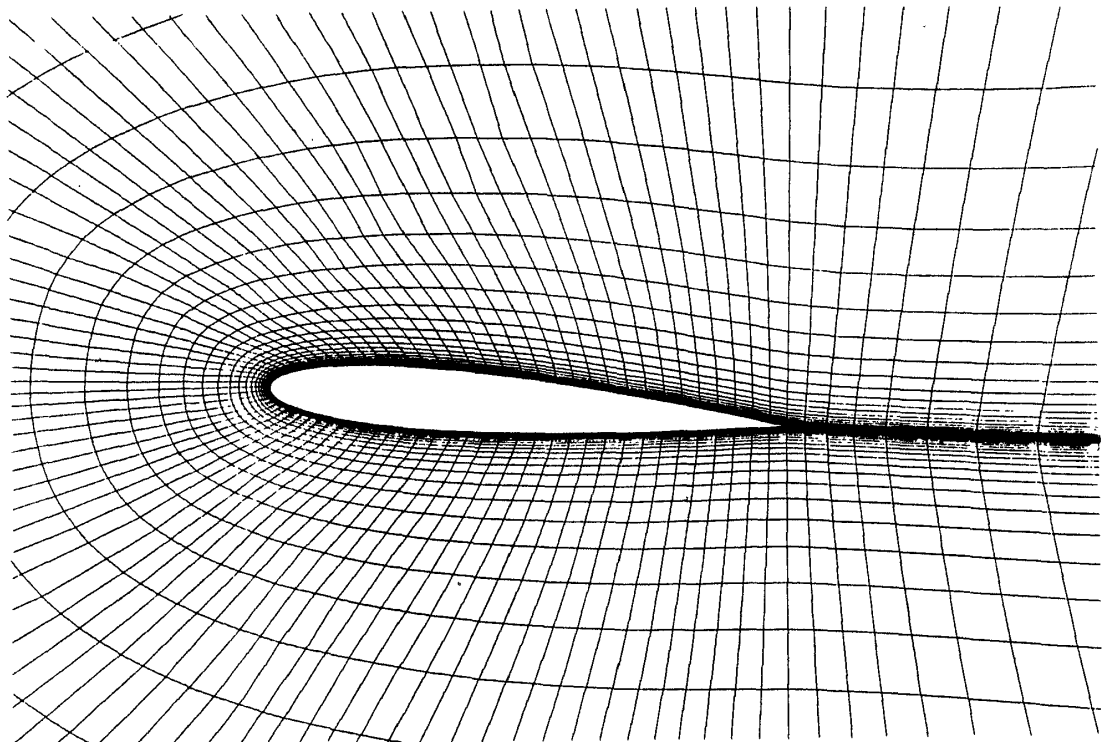


Fig. 1 (a) Mesh division around a wing section (NACA0012)

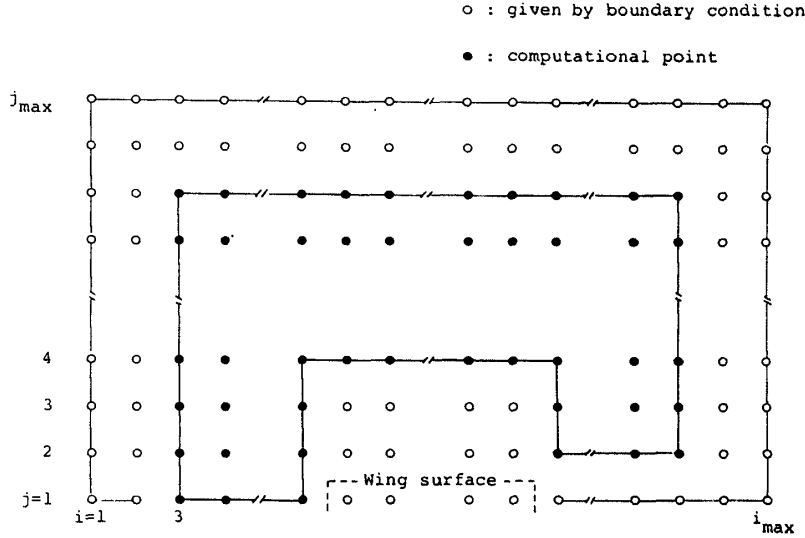


Fig. 1 (b) Computational domain

翼表面近傍の2点は境界条件により与える。

### 3. 翼表面での境界条件

高レイノルズ数流れの解析では、物体表面の境界条件に速度には対数則が、 $k$ と $\epsilon$ には局所平衡の条件がよく用いられる<sup>3)</sup>。これによると流速と $k$ 及び $\epsilon$ の境界条件として

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Re \cdot y \cdot u_\tau) + B,$$

$$\kappa = 0.41, B = 5.5$$

$$\Delta u = \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln(Re \cdot y \cdot u_\tau) + B + \frac{1}{\kappa} \right\} \Delta u_\tau$$

$$k = U_\tau^2 / \sqrt{C_\mu} \text{ and } \epsilon = U_\tau^3 / (\kappa y)$$

$$\Delta m = \frac{2}{u_\tau} \Delta u_\tau, \quad \Delta n = \frac{3}{u_\tau} \Delta u_\tau \quad (6)$$

のように与えられる。

しかし、一般の二次元流れでは、流れの剥離や壁面への付着等がある。その近傍では表面付近の流速と摩擦応力は小さくなるので、対数則を用いることは不適切となる。さらに剥離点や付着点を挟む所では、その点の両側で速度の方向が逆転するために、 $\Delta m$ と $\Delta n$ は近接した2点でそれぞれ異符号でかつ非常に大きな値を与えられることになる。このため解かれた $k$ と $\epsilon$ は不連続的な変化を示す可能性が生じ、解を発散させる要因となる。これを防ぐために、ここで新しい境界条件の取扱を考えることにする。

剥離点や付着点付近では、摩擦速度 $u_\tau$ は小さくなるので、壁からの無次元距離 $y^+ = Re \cdot u_\tau \cdot y$ は、幾何学的に同じ距離であっても小さくなる。つまり剥離点近傍の流場の振舞いは、通常境界層の内層付近と同じものと見なせるであろう。従って壁面に沿った境界層内の速度分布の変化は、 $y^+$ の全域にわたって滑らかに接続された表現式を用いれば表現できる。また $k$ と $\epsilon$ は $y^+$ が大きいときは局所平衡の仮定を、 $y^+$ が小さいときは内層領域で成り立つ条件式を使い分け、かつ両者が遷移層で滑らかに変化するような表現式を用いれば良い。

流速に対する境界条件は、Spaldingが示した $u^+$ と $y^+$ の関係式

$$F(u, u_\tau) = y^+ - u^+ - e^{-\kappa B} \left\{ e^{-\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right\} = 0 \quad (7)$$

を用いる。ここで $u$ は物体表面の接線方向速度である。(7)式によると遷移領域から内層領域までの速度分布が滑らかに接続される。しかし、(7)式は $y^+$ が十分大きい時、対数則に漸近する表示式であるので、ここでは次のような場合分けを行った。

まず、 $y^+$ が30以下のときは(7)式による表示式を用いる。(7)式によれば、 $u$ と $y$ が与えられるとニュートン法を用いて $u_\tau$ が計算され、逆に $u_\tau$ と $y$ が与えられると $u$ が計算される。このとき、 $\Delta u$ は、(7)式

を陰関数微分した式を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta u_j &= (A_j/A_4) \Delta u_4, \quad j=2, 3 \\ A_j(u_j, y_j, u_\tau) &= -\frac{\partial F/\partial u_\tau}{\partial F/\partial u}, \quad j=2, 3, 4 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで  $j$  は壁面からの計算点の位置を表し,  $j=2, 3$  は壁面近傍の 2 点で境界条件によって決定される点,  $j=4$  は壁面より 3 点目でこれより計算領域となる (Fig. 1 (b) 参照)。

一方,  $y^+$  が 60 以上のときは, (6) 式で示した対数則を用いる。  $y^+$  が 30 から 60 の間は, (6) 式による値と (8) 式による値を余弦関数を用いて

$$u = u_s(y^+) + \{u_L(y^+) - u_s(y^+)\} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{y^+ - 30}{30} \pi \right) \right\} / 2 \quad (9)$$

のように滑らかに接続した。

ここに示した条件は物体表面での滑り無しの条件は厳密に満たされていない。そこで便宜的に壁面近傍の流速が一様流の 1.5 倍以上になったときは

$$\Delta u_3 = \frac{2}{3} \Delta u_4, \quad \Delta u_2 = \frac{1}{3} \Delta u_4 \quad (10)$$

のように, 滑り無しの条件を与えた。この条件も, 壁面流速が 1.2 倍以上から 1.5 倍以下までの間で, 余弦関数を用いて対数則による条件と滑り無しの条件が滑らかに接続するようにした。これは, 翼前縁付近のように非常に大きい負の圧力勾配が存在するような所で, 流速が発散しないように対処したものである。

場合分けに用いる  $y^+$  の値は, 連立方程式を解くときは, 壁面より 2 点目の格子点での値で代表させた。また, 流速を計算するときは各格子点における  $y^+$  を用いた。これは  $k$  と  $\varepsilon$  の計算についても同様である。

以上の議論は壁面接線方向速度成分に対して述べたものであるが, 接線速度を  $x, y$  方向に射影したものが  $u, v$  となるので,  $u, v$  に対しても今まで述べてきた形がそのまま利用できる。ただし壁面法線方向速度成分は 0 としている。

$k$  と  $\varepsilon$  に対する境界条件は, まず対数速度分布と粘性底層速度分布とのクロスオーバー点, すなわち  $y^+ = 10.8$  より  $y^+$  が小さいときは, 内層での条件式<sup>1)</sup>

$$k = \alpha y^2 \quad \alpha = \text{const.}, \quad \partial \varepsilon / \partial y = 0 \quad (11)$$

を用いた。ただし連立方程式を閉じさせるための境界条件は,

$$\Delta m = \Delta n = 0 \quad (12)$$

のように簡単に扱い, (11) 式は方程式を解いた後の各点での値を決定するとき用いた。  $y^+$  が 30 より大きいときは (6) 式で示した局所平衡の仮定を用いた。  $y^+$  が上記の間にあるときは余弦関数を用いて滑らかに接続した。

(6) 式では  $\Delta m, \Delta n$  は  $\Delta u_\tau$  で関係づけられ, さらに  $\Delta u_\tau$  は接線方向速度の増分と関係づけられている。一般の二次元流に対しては次のように変形して,  $\Delta m$  と  $\Delta n$  を

$$\begin{aligned} \Delta m_x(j) &= B x_t \Delta u_4, \quad \Delta m_y(j) = B y_t \Delta v_4, \\ j &= 2, 3 \\ B &= (2/u_\tau) / \left\{ \frac{1}{\kappa} \ln(Re \cdot y_4 \cdot u_\tau) + B + \frac{1}{\kappa} \right\} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (13)$$

などとして  $\Delta u$  と  $\Delta v$  に関連づけた。ここに  $x_t, y_t$  は表面接線ベクトル成分である。

ここで述べた方法では, 翼表面近傍の 2 点は境界条件によって与えているため,  $\eta$  方向のスweep において  $\Delta q$  は計算されない。このため  $\Delta q$  の微分は翼表面近傍では片側差分をとった。  $\xi$  方向のスweep では, 翼近傍の 2 点も計算領域に含めた。これは, 翼後縁部で適切な境界条件が与えられないからである。

#### 4. $k-\varepsilon$ 法による翼型周り計算結果と考察

計算結果を以下に示す。  $\Delta t$  は 0.002 とし, 4 階数値拡散係数は 20 とした。計算には, sun 3/110 (FPA 装備) を用いた。収束条件は  $\Delta u_{\max}/u_{\max}$  ( $u$  は流速) を  $1.0 \times 10^{-4}$  とした。一回のイタレーションに 2 分を要し, ほぼ 1300 回のイタレーションで収束した。 Fig. 2 に流速分布を示す。剝離は生じていない。 Fig. 3 に本計算で得られた圧力分布を示す。 Fig. 4 には, 本計算による翼表面圧力分布を 0 方程式による結果と比較した図を示す。 0 方程式モデルの計算は, Baldwin-Lomax の渦粘性モデルを用いて児玉が計算したものである<sup>4)</sup>。両者は定性的にはよ

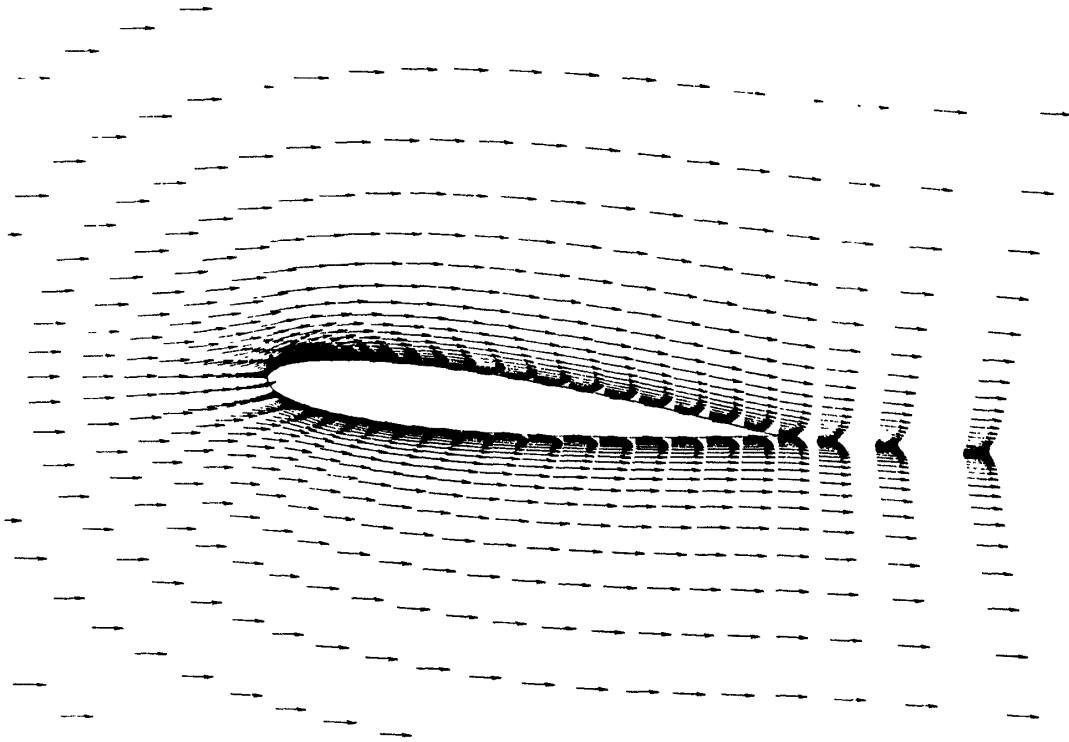


Fig. 2 Velocity distribution (NACA0012,  $\alpha=5^\circ$ ,  $Re=10^6$ )

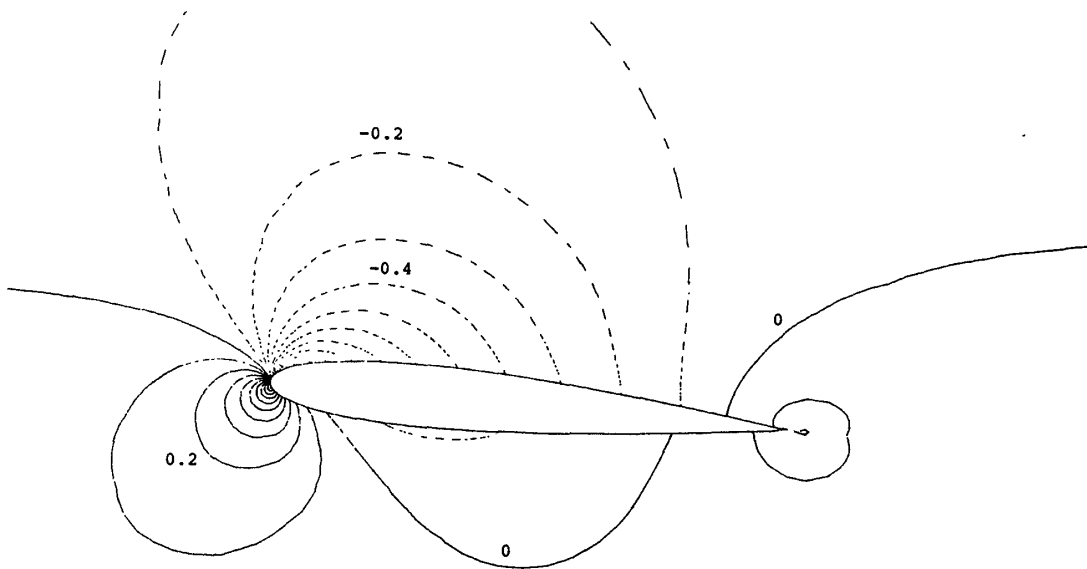


Fig. 3 Pressure contour (NACA0012,  $\alpha=5^\circ$ ,  $Re=10^6$ )

く合っている。しかし、 $\theta$  方程式モデルは層流と乱流の遷移判定がなされており、翼前縁付近は層流状態で計算されている。一方、 $k-\epsilon$  モデルでは全域で乱流状態として計算されている。このために、翼前縁では  $k-\epsilon$  法の方が解が拡散的になっていると考えられる。前縁での負圧のピークが、本計算結果

の方が鈍くなっているのもこれが原因の一つと思われる。翼正面では負圧域が大きくなっている。

計算で得られた流速分布から、Cebeci-Smith の渦粘性モデル (C-S モデルと呼ぶ) を用いて渦粘性係数を求め、 $k-\epsilon$  法による結果と比較した。これを Fig.5 に示す。C-S モデルは薄い境界層では

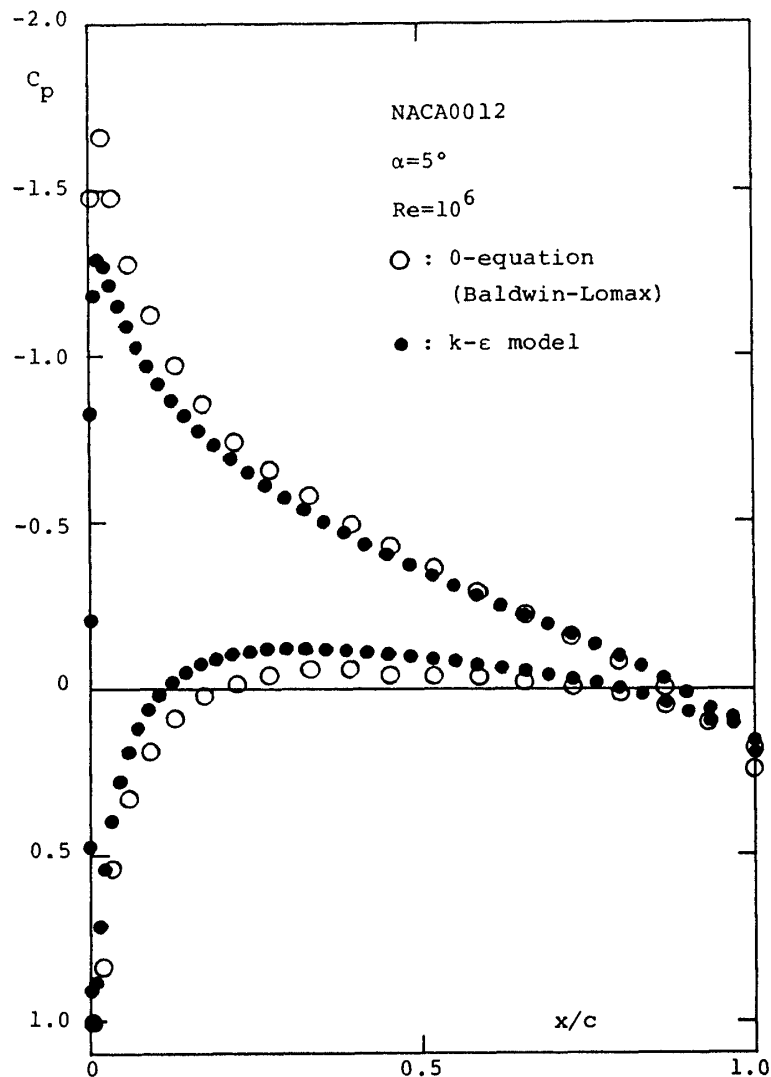


Fig. 4 Pressure distribution along wing surface

実験値をよく表現しているモデルとして知られている。C-Sモデルでは境界層厚さが必要で、ここでは簡単のため、翼表面から $\eta$ 軸に沿ったときの最初の流速極大値点を境界層外端とした。図には翼両面について翼後縁から31.1%及び78.3%翼弦長前方の位置について示した。渦粘性のピークは両者で非常によくあっている。渦粘性の分布域は $k-\epsilon$ 法で計算した方が翼表面に集中している。

計算された圧力と摩擦力を積分して揚力係数と抗力係数を計算した。 $k-\epsilon$ 法による揚力係数は0.416であった。0方程式モデルの結果は0.500、更にAbbottらの実験値<sup>5)</sup>では0.57であるから、今回の方法は実験値の73%程度しか推定されていない。

抗力係数は、本方法による結果は0.039、0方程式モデルでは0.015、実験値では0.008となっている。本計算と0方程式モデルによる揚力の差は、前縁付近の負圧のピークが十分鋭く捉えられていないことや、翼正面の負圧域が大きく計算されていることから生じていると考えられる。翼抗力の差については、本計算では翼全域で乱流としているため、0方程式の結果に比べ摩擦力が大きく評価されていることと、圧力分布の差から生じている。精度の良い流体力の推定のためには、さらに計算手法の改良が必要と思われる。

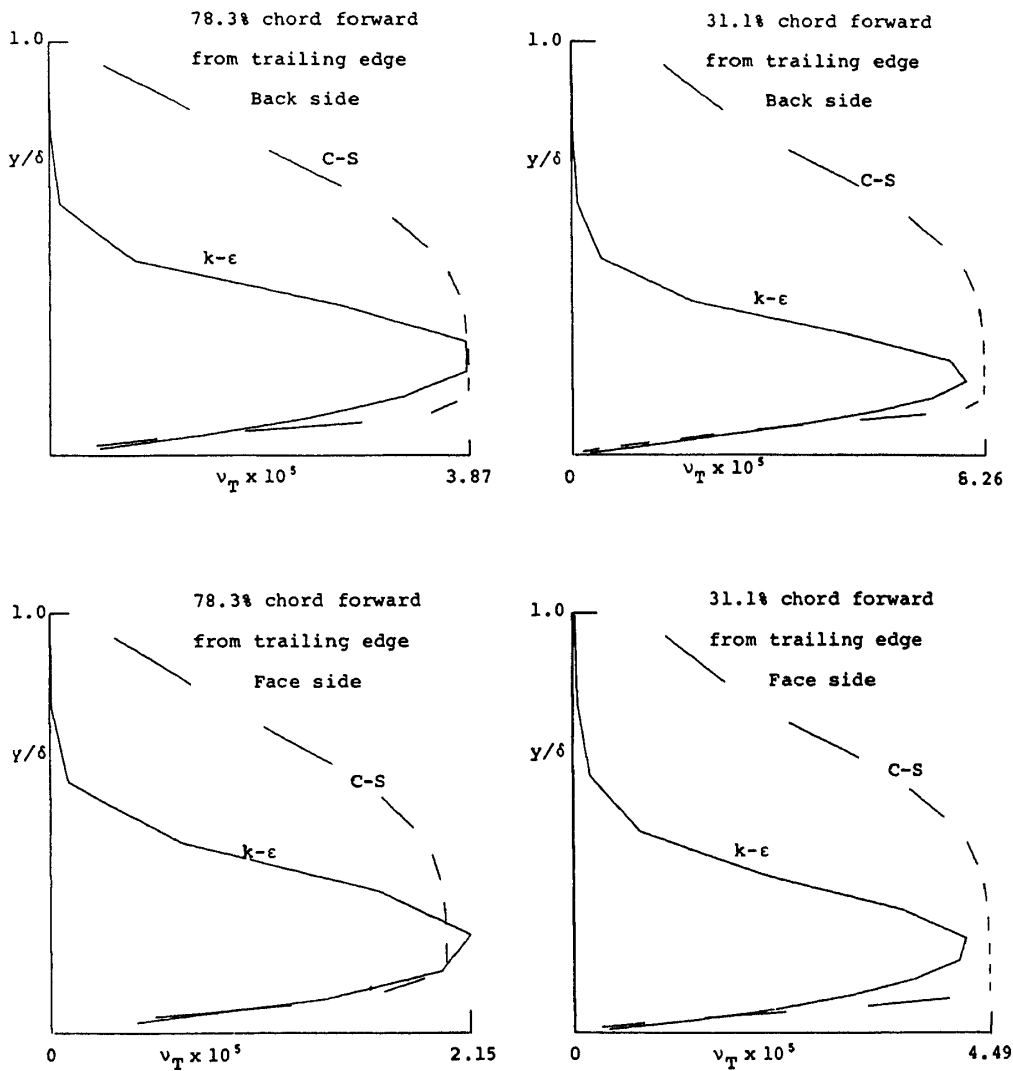


Fig. 5 Comparison of eddy viscosity

(  $k-\epsilon$  : present cal.  
 ( C-S : Cebeci-Smith model )

5. あとがき

$k-\epsilon$ 法に、どの様にして層流から乱流への遷移をモデル化するか、今後の重要な課題である。また本論で示した速度の境界条件には、圧力勾配の影響が考慮されていない対数則が基本となっている。翼前縁付近の強い圧力勾配がある流れを解析するとき、さらに境界条件の改良が必要と考えられる。

参 考 文 献

- 1) Patel, V.C., Rodi, W., Scheuerer, G.: Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review, AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, September, (1985).
- 2) Kodama Y.: A Model to Assure Positiveness of  $k$  and  $\epsilon$  in the Computation of the  $k-\epsilon$  Turbulence Model, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 160, December, (1987).

- 3) Rodi, W.: Turbulence Models and Their Application in Hydraulics –A State of the Art Review, June, (1980).
- 4) 児玉良明：“渦粘性モデルを用いた二次元翼型まわり高レイノルズ数流れに関するナビエ  
ストークス方程式の数値解法”第46回船舶  
技術研究所研究発表会講演集，(1985).
- 5) Abbott, I.H., and Doenhoff, A.E.: Theory of Wing Sections, Dover, (1959).