

圧縮性流れのための緩和法

西川 進 栄* 鈴木 章*

Relaxation Scheme for Compressible Flows

by

Nobuhide NISHIKAWA, Akira SUZUKI
Faculty of Engineering, Chiba University

ABSTRACT

The flow structure of compressible flows over a circular hump or spherical blunt body are numerically analyzed by Line Gauss Seidel relaxation algorithm including verification of the available studies. For compressible flow the Euler equation on transformed coordinate is expressed as a delta form and time linearization to the system of conservation reduced to the unfactored expression together with flux splitting. The lines for which Gauss Seidel system is applied are chosen parallel to oncoming flow direction. The CFL number can be chosen dramatically large and the number of iterations until convergence in time marching problem is about 10 especially for supersonic flows.

1. はじめに

圧縮性流れの分野で数多くの例に適用された計算スキームとしては陽的MacCormack法(1969年)を基本とする演算子分割¹⁾や、Beam-Warming法²⁾などの近似的因子分解法(以下AF解法と略記)による陰解法があげられる。AF解法が一般的に使われつつあるとしても、この方法にも近似誤差項が必然的に含まれ、それほど大きなCFLは得られない。すなわち、Time-Marchingで 10^2 オーダー、PNS的用法³⁾で 10^4 程度であろう。このため、AF化しないことにより精度・安定性の両面での向上を期待できる緩和型陰解法が最近注目されている。一方、局所的な流れ方向(情報伝達方向)を考慮に入れ、安定性の面では中心差分より優れたものとして風上差

分の考え方が従来からあったが、それを発展させた形で、Flux 諸成分の伝達方向に応じて風上差分を選ぶFlux Splittingの手法が、Van Leer⁴⁾、Moretti⁵⁾、Steger & Warming⁶⁾により応用され始めた。現在では各種のFlux Splittingが現われているが、緩和法と組み合わせた形での成功例がいくつか⁷⁾知られている。またこのようなUn-Factored緩和法は、演算子表記から即、ニュートン反復を適用することを連想させ、そのような適用例がWalters⁸⁾やMacCormack⁹⁾によって示され、驚くべき少ない回数でのTime-Marchingで定常解へ収束した結果を示している。

ここでは主として、Chakravarthyの手法⁷⁾に従ってLine Gauss Seidel法を、Circular Hump付の遷音速内部流や超音速外部流、球のまわりの超音速流に適用し、追試的に適用の詳細をたしかめ、さらに非定常流への拡張も試みた。

* 千葉大学工学部

2. 基礎方程式

2.1 仮定

基礎方程式を導くにあたり、以下のような仮定を設ける。

気体は連続な等質媒体とし、各物理量は時間および位置座標において微分可能である。気体は理想気体とし、粘性や熱伝導性は無視する。気体は熱量的にも完全気体とする。比熱は温度に無関係で内部エネルギーは $e = c_v T$ で、状態方程式 $P = \rho RT$ が常に成立する。状態変化は断熱変化とする。気体の体積力は無視する。

2.2 変換平面上の基礎方程式

二次元座標系または軸対称系 $[x, y]$ における保存形表示をした Euler 方程式を楕円型方程式を介して ξ, η 平面に写像し以下の基礎式を得る。以下で諸変量は無次元表示され、圧力、空気、温度は各一様流値、速度は手流温度 T_∞ として $\sqrt{RT_\infty}$ 、時間は $t = \text{一様流音速} \times \text{有次元時間} / \sqrt{\gamma} L$ 、座標は代表長 L で無次元化される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{H}{y} = 0 \quad (1)$$

ここでの諸変量は下式

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix} \quad H = G - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

の $\xi-\eta$ 平面上の値 F, G への変換を次式で行い得られる。

$$F = - \left(\xi_y \frac{y_t}{J} - \frac{x_t}{J} \xi_x \right) U + \xi_x \tilde{F} + \xi_y \tilde{G}$$

$$\tilde{G} = - \left(\frac{x_t}{J} \eta_x + \eta_y \frac{y_t}{J} \right) U + \eta_x \tilde{F} + \eta_y \tilde{G} \quad (3)$$

また平面二次元流では $H = 0$ である。さらにトータルエネルギー e と圧力を関係づけるため、理想気体の仮定と熱量的完全気体仮定から以下の二つの表

式が得られる。

$$e = \rho \left[C_v T + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \quad (4)$$

$$P = \rho RT = \rho (\gamma - 1) e \quad (5)$$

3. 数値スキーム

3.1 デルタフォーム形差分表示の導入

本報告では主として Time Marching 法で式(1)の収束解を定常解とすることを行う。前述したように差分演算項と因子分解しない Unfactored な表示を用い Line Gauss Seidel 法を用いるがそれを以下に導く。

ここでは $\xi-\eta$ 平面上でのオイラー方程式(1)をデルタ形式で差分近似しフラックス分割し LGS 反復へ至る過程をできるだけ簡略に述べる。

式(1)を差分演算子で表わすと以下となる。

$$U^{n+1} - U^n = - \Delta t \left(\frac{\Delta F^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\Delta G^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{H^{n+1}}{y} \right) \quad (6)$$

ここで $\delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n$ と陰的分増分を定義しさらに δU^{n+1} で $F^{n+1}, G^{n+1}, H^{n+1}$ を展開線形化する。

$$G^{n+1} = G^n + B^n \delta U^{n+1}, \quad F^{n+1} = F^n + A^n \delta U^{n+1},$$

$$H^{n+1} = H^n + H^{*n} \delta U^{n+1} \quad (7)$$

ここで $A = \{a_{ij}\} = \{\partial f_{ij} / \partial u_i\}$ なるヤコビアンを意味し B, H^* も同様である。以上から式(6)は以下のようになる。

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{\Delta A^n}{\Delta \xi} + \frac{\Delta B^n}{\Delta \eta} + \frac{H^{*n}}{y} \right) \delta U^{n+1}$$

$$= - \left(\frac{\Delta F^n}{\Delta \xi} + \frac{\Delta G^n}{\Delta \eta} + \frac{H^n}{y} \right) \quad (8)$$

3.2 Flux Splitting

上式のようなデルタ形式では左辺()内は対角化したほうが δU との積は計算量も少く解も安定であるからそれを行う。A については対角化行列 T_ξ, T_ξ^{-1} (文献2)参照)。

$$A = T_\xi A_\xi T_\xi^{-1} \quad (9)$$

となり、ここで $D[\dots]$ を対角行列として

$$A_\xi = D[\lambda_{\xi 1}, \lambda_{\xi 2}, \lambda_{\xi 3}, \lambda_{\xi 4}] \text{ であり}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\xi 1} &= \lambda_{\xi 2} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v \equiv U \\ \lambda_{\xi 3} &= U + C(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2} \\ \lambda_{\xi 4} &= U - C(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。ただし C は音速であり U は ξ 方向速度成分である。

A はその固有値の符号により、符号正について A^+ 負について A^- とすると以下のように分割できる。

$$A = A^+ + A^- \quad (11)$$

となり A^+ , A^- も式(9)と同様それぞれ固有値

$$\lambda^+ = (\lambda + |\lambda|)/2, \lambda^- = (\lambda - |\lambda|)/2 \quad (12)$$

に対応する。

ヤコビアン の正負に対応し、フラックスも分割でき

$$F = F^+ + F^-, G = G^+ + G^- \quad (13)$$

などとなる。

さて、各フラックスの値をデルタフォーム的に表示する時、以下の技術的選択枝が現われ得る。

すなわち式(8)での右辺第一項は以下の正符号フラックスの径進差分 (Δ_- 記号) を含みそれは以下の二通り代表的表示とできる。

$$\frac{\Delta_- F^+}{\Delta \xi} = \begin{cases} \frac{(A_{i,j} + A_{i-1,j})}{2} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta \xi} & \text{平均型} \\ A_{i,j} (U_{i,j} - U_{i-1,j}) \frac{1}{\Delta \xi} & \text{一端型} \end{cases} \quad (14)$$

これ以外のバリエーションも試みられたが上二者が問題が少なかったためこれらのみによる結果が示される。

▼二次精度差分

以下の型の二次精度風上差分の使用も試みられた。

$$\left(\frac{\Delta - U}{\Delta \xi} \right)_{i,j} = \frac{1}{2} (3U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j})$$

$$\left(\frac{\Delta + U}{\Delta \xi} \right)_{i,j} = \frac{1}{2} (-3U_{i,j} + 4U_{i+1,j} - U_{i+2,j}) \quad (15)$$

この二次精度差分は右辺のみに用いた、すなわち左辺に用いるとブロック五重対角行列を扱う必要が生じるため右辺のみにとどめた。

以上により式(8), (11)~(13)から対象とする式はスプリット表示を用い以下のようにになる。

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{\Delta_- A^+}{\Delta \xi} + \frac{\Delta_+ A^-}{\Delta \xi} + \frac{\Delta_- B^+}{\Delta \eta} + \frac{\Delta_+ B^-}{\Delta \eta} + \frac{H^*}{y} \right) \delta U = RHS \quad (16)$$

$$RHS = - \left(\frac{\Delta_- F^+}{\Delta \xi} + \frac{\Delta_+ F^-}{\Delta \xi} + \frac{\Delta_- G^+}{\Delta \eta} + \frac{\Delta_+ G^-}{\Delta \eta} + \frac{H}{y} \right)$$

この式を Unfactored のまま扱っていくわけである。

式(16)の左辺において差分演算子を () にかかる δU に及ぼし展開すると五個の格子点の陰的増分 ($n+1$ までの) について下式を得る。

$$\hat{A} \delta U_{i,j} + \hat{B} \delta U_{i,j+1} + \hat{C} \delta U_{i,j-1} + \hat{D} \delta U_{i+1,j} + \hat{E} \delta U_{i-1,j} = RHS \quad (17)$$

ここで係数行列 $\hat{A} \sim \hat{E}$ は次のようにする。

$$\hat{A} = \frac{I}{\Delta t} + \left(-\frac{A_{i+1/2,j}^-}{\Delta \xi} + \frac{A_{i-1/2,j}^+}{\Delta \xi} - \frac{B_{i,j+1/2}^-}{\Delta \eta} + \frac{B_{i,j-1/2}^+}{\Delta \eta} + \frac{H_{i,j}^*}{y} \right)$$

$$\hat{B} = \frac{B_{i,j+1/2}^-}{\Delta \eta}, \hat{D} = \frac{A_{i+1/2,j}^-}{\Delta \xi},$$

$$\hat{C} = -\frac{B_{i,j-1/2}^+}{\Delta \eta}, \hat{E} = -\frac{A_{i-1/2,j}^+}{\Delta \xi}. \quad (18)$$

ここで上に代えて式(14)での扱いと似通った以下を用いる。

$$\frac{\Delta_- (A^- \delta U)_{i,j}}{(\Delta \xi)_{i,j}} = (A_{i+1,j}^- \delta U_{i+1,j} - A_{i,j}^+ \delta U_{i,j}) \quad (19)$$

本報告では \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , \hat{E} についても上式と同様の表示式を用いた結果を示す。限られた例での比較では中点型即ち $A_{i+1/2,j}^-$ を用いるのと結果は大差ないようである。

本報告のような Line Gauss Seidel 法では左辺と右辺の差分の表示式は一致していたほうが良いことが言われている (Walters との私信)¹⁰⁾。しかし、左辺も二次精度とした例はここでは扱わない。

3.3 Line Gauss Seidel 緩和法

式(18)をそのまま解く直接解法も大容量計算機では可能であるが、一般のユーザーに向くと言えず、本報告の主題とする Line 緩和法が広範に使えよう。

ここではこの手法でよく適用される (LGS 法) ように「主流方向」にスイープすることを考え壁に直交する j 方向に ($I = \text{const}$) 未知変量を配列して連立方程式を解けるようにする。配列されているライ

ンの両側はあるスイープでの最新更新値か前時間レベル [$n = n$] の値を用いるべきであるが、両側の効果を全く無視しても収束解に大差ないという場合も多かった。

“ライン”の両側の項を右辺に移項して下式を得る。

$$\widehat{B}\delta U_{i,j+1} + \widehat{A}\delta U_{i,j} + \widehat{C}\delta U_{i,j-1} = RHS - (\widehat{D}\delta U_{i+1,j} + \widehat{E}\delta U_{i-1,j}) \quad (20)$$

これは、 i の増加方向に前進スイープする場合の式であるが後進スイープでは $\widehat{D}\delta U_{i+1,j}$ すなわち $(i+1, j)$ 格子点での値も最新更新値を用いれば良い。

式(20)のブロック三項行列を解けば $\delta U_{i,j}$ ($j=1, jE$) が得られるが、本報告では Gauss の消去法で解を得ている (HITAC-MSL ライブラリパッケージ)。

3.4 Non-Line-GS法とベクトル化

式(20)において当該ラインの両側の δU をゼロとした結果は例示される問題では収束解に大差を有しないことが判った。したがってそのライン以外の変量を参照しないためベクトル化は問題ない。この $\delta U = 0$ の扱いは右辺の値は時間レベルが一ステップ前の例を Non-Gauss-Seidel (ゼブラ・スキーム) と呼んだ Chakravarthy⁷⁾ にならえば、Non-Line-Gauss-Seidel スキームと呼べる。ただし、右辺の δU の前時間レベルの値を用いると良好な解は現状では得られていない。

3.5 境界条件

壁面条件；反射法を用いる。

壁面 $j = 1$ の内側に $j = 1$ と同じ形状係数を持つ $j = 0$ の点を仮想し ($j = 0$ と $j = 1$ の中点に壁があるとすると) 反射法を用いると $\xi_t = \eta_t = 0$ が壁で成立し、 $j = 0$ での速度成分はそれぞれ以下となる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,0} &= \frac{(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{i,1} + 2 \xi_y \eta_y v_{i,1}}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} \\ \bar{v}_{i,0} &= \frac{2 \xi_x \eta_x u_{i,1} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) v_{i,1}}{\xi_y \eta_x - \xi_x \eta_y} \end{aligned} \quad (21)$$

これらにより式(20)での \widehat{BU} 等が算出される。また $j=1$ での RHS 項を領域内部の点と同様に扱って計

算する。

さて左辺第 3 項は反射条件から以下となる。

$$\widehat{C}_{i,1} \delta U_{i,0} = \widehat{C}_{i,1} E \delta U_{i,1} \quad (22)$$

ただし、同様に式(21)により、次の行列が定義でき

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} & \frac{2 \xi_y \eta_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} & 0 \\ 0 & \frac{2 \xi_x \eta_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} & \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

であり、

$$B_{i,1} \delta U_{i,2} + (A_{i,1} + C_{i,1} E) \delta U_{i,1} = RHS \dots$$

を三項式群と連立させれば壁面条件を満たす解が得られる。ただし反射条件が曲率大の場合弱点がある影響が、ここでも現われるおそれは有り得る。

▼壁(下方)以外の境界条件

流入境界；一様流

流出境界；外挿(ある変量 f について)

$$f_{ie} = 2f_{ie-1} - f_{ie-2}$$

上方境界；一様流 (Capturing) ただし土側が壁の場合は反射法を用いる。

軸対称流では適切な位置で対称条件を用いた。また Shock fitting の解法も用いるが、その場合は衝撃波面が外側境界であり衝撃波背後圧力を陽的マコーマック法で求め、Rankine-Hugoniot の関係式を用いて諸量を算出する。波面の移動に対応して格子生成を施す。

3.6 Time Marching と初期条件など

初期条件；Shock Capturing では初期分布は一様流で Impulsive Start とする。Shock Fitting では過去に計算された適当な値を用いた。

時間ステップは固定の場合と可変の場合を試行した。

4. 結 果

ここでは I 超音速流 (下壁に円弧ハンプ) の内部流 [$M = 1.65$], II 遷音速流；I で上壁を除き $M = 0.85$ としたもの、III 軸対称超音速流の $M = 1.5 \sim$

3.0の例, IV円柱液滴が平面に衝突する非定常流などを扱う。

数値例の順序と異なるが我々が文献のみに依拠し組んだプログラムの検証(本報告全体はまた追試的なものであるが)のためIIの数値例での圧力分布をまず示す。前述の式(14)の平均型, 一端型ヤコビアンでの結果がChakravarthyの結果と比較される, 衝撃波域を除いて三者はよく一致しているが我々の一端型の解では衝撃波厚さは完全に1メッシュに収まり, シャープであるが位置はやや下流寄りである。我々の両手法ともCFL=30であった。

I 超音速流: 図1の流路で横断方向25メッシュ×主流方向50メッシュ(円弧部30メッシュ集中)の格子配置を用いた。CFL_ξ = [U + C√(ξ_x² + ξ_y²)] Δt / Δξ をクラン数としCFL_ξ = 65の一定値で10回程のMarchingで収束解(各変量とも前ステップとの差 ≤ 10⁻³の条件成立)が得られた。ただし第1スイープは上流→下流へを行い第2スイープは逆行するか, 第2スイープなしのどちらかでもほぼ同一の解に収束する。双曲性が第2スイープを必要

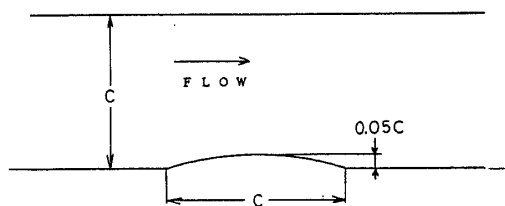


図1 Flow with Hump

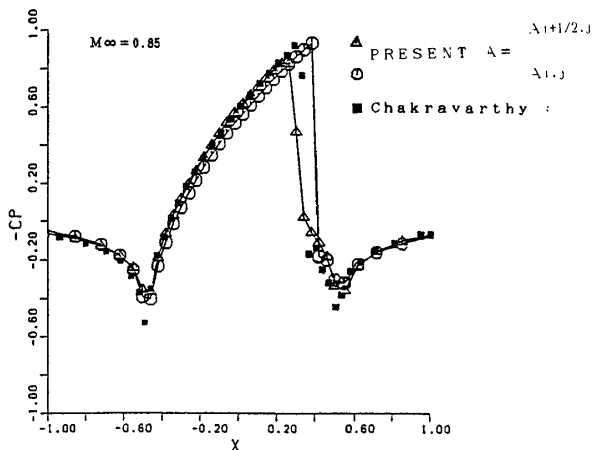


図2 Cp Distribution

なくするわけである。式(14)の平均型ヤコビアン法と一端型(風上点)解法の収束過程の比較を一様流対応CFL ≈ 65として図3に示す。L₂ = √(Σ RHS² / 全格子点)である。一端型ヤコビアンの方がやや収束が速い。図4に等マッハ線図を一次精度差分と式(15)の二次精度差分それぞれに対し示し比較を行う。二次精度のほうがショックとその反射などが明確である。

II 遷音速外部流: Iと下壁は同じで上壁がなくM = 0.85とした場合, 等マッハ線図はヤコビアン位置に対応して図5のように対比できる。一端型ヤ

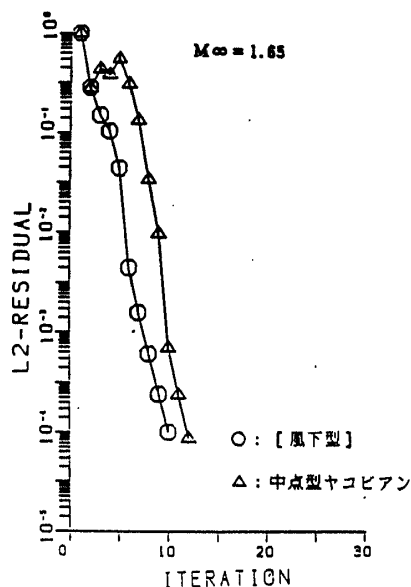


図3 Convergence History M=0.85

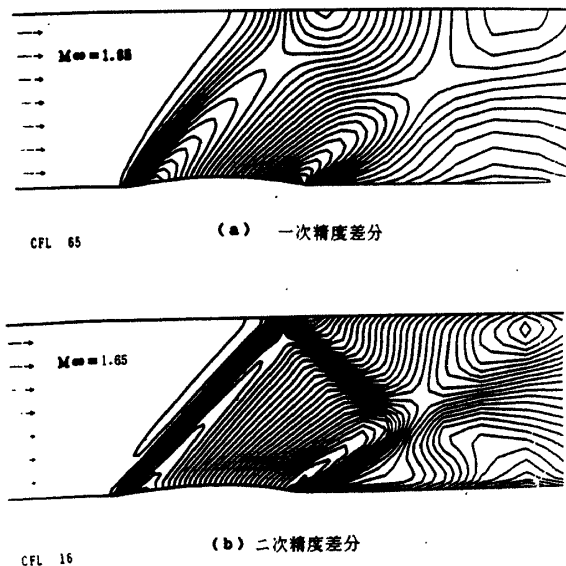


図4 Comparison of Isomachs

コピアン解がよりシャープな衝撃波を示すのは超音速流と同様である。益速点が現われる流れの場合、その位置での固有値の扱いが問題であるがここでは Steger による方法、すなわち $\lambda^+ = [\lambda + (\lambda^2 + \epsilon^2)^{1/2}] / 2$ などと式(12)で $|\lambda|$ の項を $\epsilon = 0 \sim 2$ を用い滑らか

な λ^+ , λ^- の変化を試みた。その結果は $\epsilon \cong z$ で、収束が早いなど成果はあるが衝撃波がなまる、衝撃波の背丈(高さ)が短いなどの問題も見られ図は省略する。

Ⅲ 超音速軸対称流：Shock Capturing での圧力分布の対称軸、上流よどみ流線での変化を図 6 に示す。これらは一次精度での結果であるが明確に衝撃波がとらえられている。 $M = 1.8$ での等圧線を図 7 に示す。

Shock Fitting を用いた等圧線を図 8 に示す。波面での条件が陽的に算出されているため CFL = 3.0 程度となった。

表 1 に I, II, III の例での CFL の変化等を示す。

Ⅳ 非定常流への緩和法の適用：本報告の LGS 緩和法は連立式を解くラインと直交方向で生ずる誤差を留意すれば非定常流に応用も成算がある。著者の一人は円柱状液滴が剛体壁に衝突する際¹¹⁾の液滴内部の水撃的流れに本手法を適用して見た。¹²⁾ヤコビアン値などを新時間レベルに即時更新して、ある時間ステップで繰り返しを行うと 10^{-6} を増分収束判定値として 4 回以下の繰り返しで各時間ステップごとに解が得られた。1987 年 9 月時点で水撃圧ともい

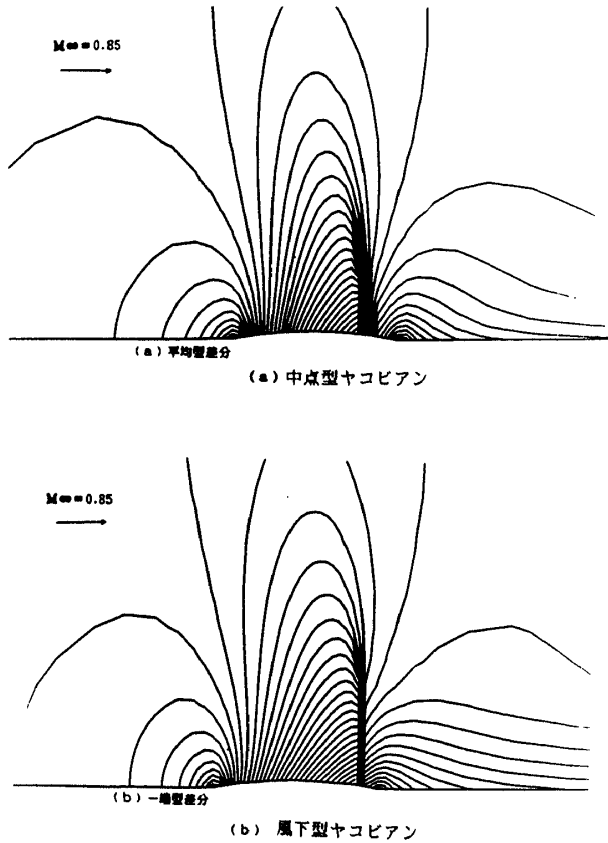


図 5 Isomachs of Transonic case

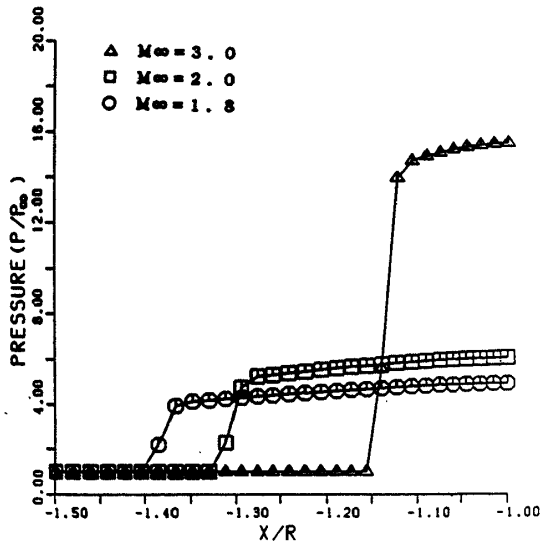


図 6 Pressure Distribution

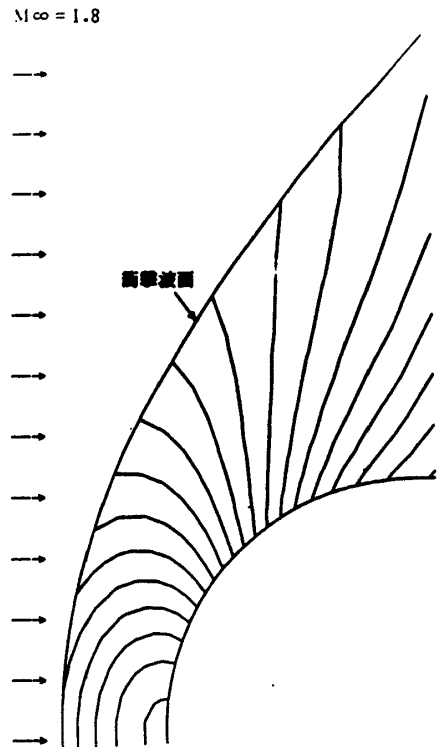


図 7 Pressure Contours

表1 CFL values

	マノハ数	精度	算出手法	緩和法	Δt	CFL 初期→収束時
内部流 「下面ハンフ付」	1.65	1次	平均・一端型	LGS	0.8	65 10^8
	1.65	1次	平均・一端型	NLGS	0.8	10^2 無制限
	1.65	2次	平均・一端型	LGS・NLGS	0.8	16 16
	1.65	1次	平均・一端型	LGS・NLGS	浮動 Δt	24 3×10^1
円風ハンフ	0.85	1次	平均・一端型	LGS	0.5	30 30
球	1.8	1次	平均・一端型	LGS・NLGS		3.0 3.0

うべき圧力値は解析解の2倍と問題はあるが、図8のような等圧線を得ている。また最大水撃圧へは、 $Ct/\text{円柱直径} = 0.1333$ で到達しShock形成時間の見積り値とかなり一致している。定式化で状態方程式が空気と異なり、 A 、 B ヤコビアンも変わるので詳細は発行予定の文献(12)を参照されたい。

5. まとめ

Line-Gauss-Seidel緩和法を遷音速流などについてTime-Marching法で収束解を求め、従来より少くとも1ケタ少い繰り返し回数で収束した。超音速流では場合により $CFL > 10^{20}$ 以上での計算が初期を除き可能である。

ヤコビアンを算出する位置を差分算出二点の midpointの場合と風下で算出する場合を比較すると風上格子点の場合がシャープな衝撃波が得られ収束回数もやや少いことが確認された。

なお本報告は第二著者、鈴木章による千葉大学工学部修士論文を西川が抄出、書き直し、非定常例などをつけ加えたものである。

参考文献

- 1) MacCormack, R.W. and Baldwin, R.S., AIAA Paper 75-1.
- 2) Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., J. Comp. Phys., 39, p. 347 (1981).
- 3) Lawrence, S.L., Tannehill, J.C., and Chaussee, D.S., AIAA J. 22, p. 1755 (1984).
- 4) van Leer, B., J. Comp. Phys. 23 (1977), p. 263.

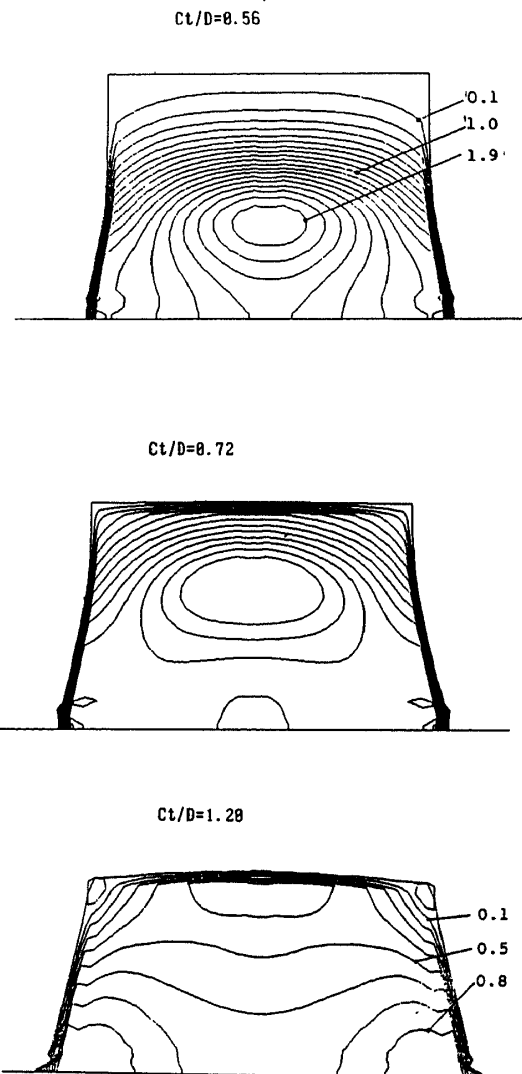


図8 Pressure Contours for Impinged Cylindrical Droplet $M=0.2$, Unsteady

- 5) Moretti, G., Computer & Fluids, 7, p. 191 (1979).
- 6) Steger, J.L. and Warming, R.F., J. Comp. Phys. 40, p. 263 (1981).
- 7) Chakravarthy, S.R. AIAA Paper 84-0165.
- 8) Walters, R.W. and Dwoyer, D.L., AIAA Paper 85-1529-CP.
- 9) MacCormack, R.W., AIAA Paper 85-132.
- 10) Walters, R., Private Communication (1986).
- 11) Huang, Y.C., Hammit, F.G., and Yang, W.J., ASME J.F.E., 95, p. 276 (1973).
- 12) Nishikawa, N. Amatatu, S. and Suzuki, T. Proc. ISCFD-Sydney (1987 to appear).

