

非定常圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対する高精度陰解法

松野謙一*

An Implicit Scheme for Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations

by

Kenichi MATSUNO
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

In this paper a time accurate scheme for unsteady Navier-Stokes equations is presented. This scheme employs, as unknowns, quantities of order of square of time spacing, thus making a " δ^2 -form", of which the right hand side is a numerical approximation of unsteady governing equations. This algorithm makes a scheme especially suitable for time accurate simulations.

A shock tube flow is calculated as an example. The flow is assumed laminar, and shock wave-boundary layer interaction is simulated.

1. はじめに

現在、ナビエ・ストークス方程式に対する陰的解法はいわゆる「 δ -形式」に基づいてスキームを構成することが多い。この「 δ -形式」は、時間依存解としての定常流を対象とした場合、スキームの右辺側に定常方程式の離散近似形が現れることおよび収束解の時間ステップ幅への依存性を排除する上から好都合な形式といわれている。これに対し非定常現象を対象とした場合必ずしも「 δ -形式」の利点が生きて来るとも思えない。いいかえれば、「 δ -形式」のもつ利点を生かそうとするならば、右辺側に非定常方程式の離散近似形が現れるような形式が非定常解を対象とする場合には適しているであろう。このような観点のもとに、文献¹⁾において、本質的

に非定常な現象を対象とする場合に適したスキームの形式として、時間二次精度の前提のもとに、右辺側に非定常方程式の離散近似形が現れる「 δ^2 -形式」を提案し、それに基づく新しいスキーム（ δ^2 -コレクションスキーム）を非定常オイラー方程式を対象に構成した。そして一次元衝撃波管およびノズル流れを例に、非定常流に対してのみならず時間依存解としての定常流に対しても有効であることを示した。また文献^{2,3)}において二次元オイラー流に拡張した。

本論文においては、二次元非定常ナビエ・ストークス方程式への拡張を試み、その「 δ^2 -形式」および「 δ^2 -コレクションスキーム」を構成する。ここでは、特にナビエ・ストークス方程式に対しては、「 δ^2 -形式」の特徴をいかして左辺側陰的部分の粘性による流束をその近似で置き換えても時間二次精度は保たれることを示し、効率的なスキームを構成する。

* 航空研数理解析部

2. 数値解法

簡単のため一次元方程式を対象に説明する。一次元非定常ナビエ・ストークス方程式は、ベクトル形式で、次の様に書かれる。

$$\partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v = 0 \quad (1)$$

$$q = [\rho, \rho u, e]^T,$$

$$F = [\rho u, \rho u^2 + p, u(e+p)]^T,$$

$$F_v = (1/R_e)[0, \tau, f]^T \quad (2)$$

ここに、 ρ , u 及び e は、それぞれ密度、速度及び全エネルギーであり、 R_e はレイノルズ数、 τ はせん断応力、 f は粘性による仕事をそれぞれ表す。圧力 p は、 $p = (r-1)(e - \rho u^2/2)$ 。ただし、 r は比熱比で空気の場合 1.4 である。

「 δ -形式」のスキーム：比較のために「 δ -形式」で表されたスキームをまずあげよう。(1)式に対し、3-レベルの時間差分近似を行い通常の「 δ -形式」で記述すると ϕ 及び θ を時間差分近似に関する定数パラメータとして次のように表される⁴⁾。

$$\begin{aligned} & [(1+\phi)/\Delta t + \theta \{ D_x A - D_x M \}^n] \delta q^n \\ & = - [D_x F - D_x F_v]^n + (\phi + \Delta t) \delta q^{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $A = \partial F / \partial q$, $M = \partial F_v / \partial q$, $\delta q^n = q^{n+1} - q^n$, $q^{n+1} = q(t^{n+1})$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ である。 D_x は、空間微分に対する差分近似オペレータである。「 δ -形式」のスキームにおいては未知数は δq であり、新しい時間 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ における量は

$$q^{n+1} = q^n + \delta q^n \quad (4)$$

によって計算される。「 δ -形式」のスキーム(3)式は、右辺[...]に支配方程式(1)の定常部分：

$[\partial_x F - \partial_x F_v]$ の差分近似形を持っていることに注意されたい。収束して δq が零になると右辺の定常部分： $[D_x F - D_x F_v]^n$ が零となり確かに定常流ソルバーとしては合理的な形式である。時間2次精度で非定常問題を扱う場合、「 δ -形式」のスキーム(3)式において、その左辺側陰的部分は、何等の近似も許されないことに注意されたい。例えば、対角化⁴⁾等の効率化アルゴリズムを導入すると時間精度は、1次精度に劣化する。

「 δ^2 -形式」のスキーム：さて、非定常現象を精度良く計算しようとする場合、少なくとも時間二次

精度が必要であろう。ここでは、時間二次精度を前提において議論するので、 ϕ 及び θ の組合せは、($\phi = 0$, $\theta = 1/2$) または ($\phi = 1/2$, $\theta = 1$) をとるものとする。この前提のもとにナビエ・ストークス方程式に対する「 δ^2 -形式」のスキーム (δ^2 -コレクションスキーム)を提示しよう。

いま、未知量として $O(\Delta t^2)$ の量： $\delta^2 q$ を次式により定義する。

$$q^{n+1\langle \nu+1 \rangle} = q^{n+1\langle \nu \rangle} + \delta^2 q^{\langle \nu \rangle} \quad (5)$$

但し、

$$q^{n+1\langle 0 \rangle} = q^n + (q^n - q^{n-1}) \quad (6)$$

ここに ν は反復回数を示すインデックスとする。このとき、 $\delta^2 q$ を新しい未知量とし、オイラー方程式に対して示したと同様の方法¹⁾によって「 δ^2 -形式」で差分近似式を示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & [(1+\phi)/\Delta t + \sigma \theta \{ D_x A - D_x M \}^{n+1\langle \nu \rangle}] \delta^2 q^{\langle \nu \rangle} \\ & = - [(1/\Delta t) \{ (1+\phi) q^{n+1\langle \nu \rangle} (1+2\phi) q^n \\ & \quad - \phi q^{n-1} \} + \{ \theta (D_x F - D_x F_v)^{n+1\langle \nu \rangle} \\ & \quad + (1-\theta) (D_x F - D_x F_v)^n \}] \end{aligned} \quad (7)$$

ここに σ は $O(1)$ のパラメータである。(7)式の右辺は支配(非定常)方程式： $[\partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v]$ の $t = t^{n+\theta}$ における差分近似式に相当するので形式的に

$$\begin{aligned} & [(1+\phi)/\Delta t + \sigma \theta \{ D_x A - D_x M \}^{n+1\langle \nu \rangle}] \delta^2 q^{\langle \nu \rangle} \\ & = - [\partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v]^{n+\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

と表わすことにしよう。なお(7)式の導出方法について詳細は文献[1,2,3]を参照されたい。

(7)式は、 $o(\Delta t^2)$ の量： $\delta^2 q$ を未知量として記述されているので「 δ^2 -形式」と呼び、そのスキームを δ^2 -コレクションスキームと呼ぶ。本スキームは反復法の形式をもっているが、数式上は反復無しでも時間二次精度をもっている。すなわち、 $q^{n+1\langle 1 \rangle}$ 自体が、時間二次精度を持つ。ただしクーラン数が大きい場合あるいは流れの特性時間が場所によって極端に異なるいわゆる stiff な系の場合、反復無しでは十分に現象に追従できない場合がある。このような場合、スキームを反復的にもちい解の実質精度を高め且つ安定性をも高めることが可能であり有効である。(7)式の左辺は、ブロック三項対角行列を形成するのでその解法は、多少の演算量を必要とする。

ここで、(7)式で示される本スキームは、有名な

Beam-Warming 法をサブセットに含むことに注意されたい。すなわちその特殊な場合として、各ステップの初期推定値 $q^{n+1<0>}$ として零次オーダーのもの ($q^{n+1<0>} = q^n$) を使用し、 $\delta^2 q$ を δq と解釈し、反復無しアルゴリズム (および $\sigma = 1$) のとき(7)式は Beam-Warming 法と完全に一致する。

左辺側陰の部分の効率化：さて、(7)または(8)式により表された「 δ^2 -形式」のスキームの各項の Δt についてのオーダーは、次のように評価される。

$$\begin{aligned} & [(1+\phi) + \Delta t \sigma \theta \{DxA - DxM\}^{n+1<\nu>}] \delta^2 q^{<\nu>} \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & \quad O(\Delta t) \qquad \qquad \qquad O(\Delta t^2) \\ & = - \frac{\Delta t [\partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v]^{n+<\nu>}}{\qquad \qquad \qquad \downarrow} \\ & \quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad O(\Delta t) \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式が時間2次精度を持つためには $O(\Delta t^2)$ まで正しく評価する必要がある。言い替えれば、(9)式は $O(\Delta t^2)$ まで正しく評価されていれば十分である。したがって、左辺の $\Delta t DxA \delta^2 q$ および $\Delta t DxM \delta^2 q$ の項は、誤差項になる。これは、左辺のヤコビアン行列は、その近似形で代用しても時間2次精度は変わらないことを意味する。安定性を考慮して決めればよい。

アルゴリズムの効率化のひとつとしてここでは、演算量の節約のため M について、その最大固有値を対角項に並べた近似行列を用いる。

$$M \sim \lambda_M I,$$

(λ_M : M の最大固有値, I : 単位行列)

このとき、スキーム(8)は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} & [(1+\phi) / \Delta t + \sigma \theta \{DxA - Dx\lambda_M I\}^{n+1<\nu>}] \delta^2 q^{<\nu>} \\ & = - [\partial_t q + \partial_x F - \partial_x F_v]^{n+\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

3. 二次元ナビエ・ストークス方程式に対するスキーム

(10)式により表されるスキームの多次元への拡張は直接的である。二次元、圧縮性、非定常ナビエ・ストークス方程式は、カーシアン系で表示すると次のようになる。

$$\partial_t q + \partial_x E + \partial_y F - \{\partial_x E_v + \partial_y F_v\} = 0 \quad (11)$$

ここに、

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e+p) \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \quad E_v = \frac{1}{R_e} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$F_v = \frac{1}{R_e} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ g_4 \end{bmatrix}$$

$$p = (\gamma - 1) \{e - \rho(u^2 + v^2)/2\},$$

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda v_y,$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_y + v_x),$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) v_y + \lambda u_x$$

$$f_4 = u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + \frac{\mu}{P_r(\gamma - 1)} \partial_x c^2,$$

$$g_4 = u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + \frac{\mu}{P_r(\gamma - 1)} \partial_y c^2$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (12)$$

いま、流束 E, F, E_v 、および F_v のヤコビアンを A, B, M および N とする。

$$A = \partial E / \partial q, \quad B = \partial F / \partial q,$$

$$M = \partial E_v / \partial q, \quad N = \partial F_v / \partial q \quad (13)$$

このとき、「 δ^2 -形式」によるスキームは、(10)式と同様の記号にて、次のように表される。

$$\begin{aligned} & [1 + \beta \Delta t \sigma \theta \{DxA - Dx\lambda_M\}^{n+1<\nu>}] \\ & [1 + \beta \Delta t \sigma \theta \{DyB - Dy\lambda_N\}^{n+1<\nu>}] \delta^2 q^{<\nu>} \\ & = - \beta \Delta t [\partial_t q + \partial_x E + \partial_y F \\ & \quad - \{\partial_x E_v + \partial_y F_v\}]^{n+\theta} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\beta = 1/(1+\phi)$ 、右辺側括弧内は、適当に離散近似されるものとする。

一般曲線座標系に対する定式化は、有限体積法による。(15)式右辺側括弧内非定常方程式部分に対する項については、本論文においては、簡単のためセル境界に於ける流束の評価を両側の状態の算術平均を使って行い、それに Jameson 型の2階及び4階の非線形人工散逸項⁴⁾を付加する。左辺側には2階の線形の人工散逸のみを加える。

4. 数値計算

二次元層流についての計算例を示す。完全ナビエ・ストークス方程式による短い衝撃波管流れの計算で、管中央に位置する膜が $t = 0$ において破膜、形成された衝撃波が右管端で反射後、形成された境界層と衝撃波の干渉流れ場のシミュレーションである。図1に形状及び初期静止状態を示す。図2は、用いた格子で、格子点数 75×25 、 x -方向格子幅は、 $\Delta x = 4./74$ (一定)、 y -方向は、管底で最小格子幅 $\Delta y = 0.1 \times \Delta x \sim 0.005$ で、等比数列的に格子幅が拡大するように全格子 25 点が配置されている。

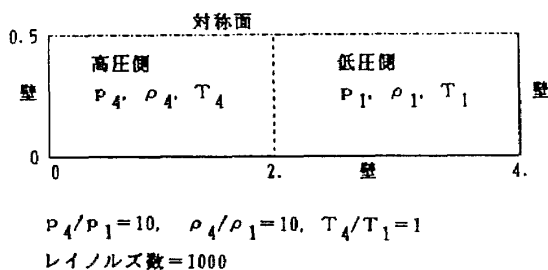


図1 短い衝撃波管問題

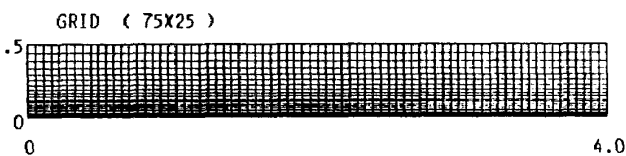


図2 計算格子

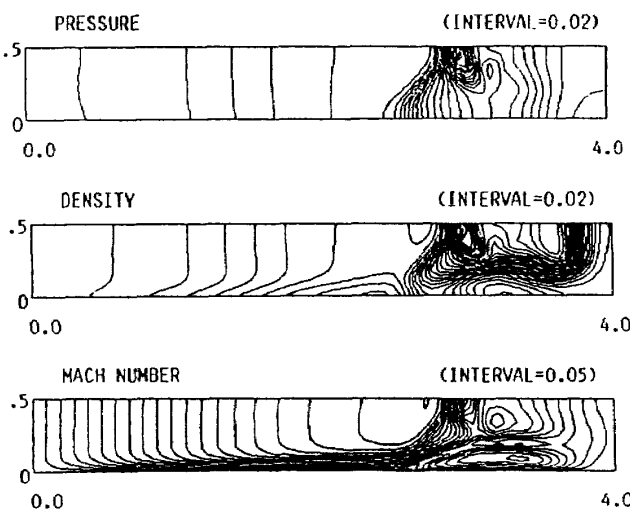


図3 管右端で反射した衝撃波と層流境界層の干渉流れ場

スキーム右辺側に付加したJameson の非線形散逸項は、できるだけ小さい方が好ましいので、係数パラメータは標準値⁴⁾の0.2倍を用い、更にそれに局所マッハ数を掛けて境界層内では特に小さくなるようにした。計算時のクーラン数は、最大値約6で計算を実行した。スキーム右辺側の非定常方程式の残差が規定値以下になるまで反復処理を行った。本計算例では1~2の反復数であった。図3に、ある時刻の流れ場の計算結果を示す。物理的に妥当な流れ場が計算されている。

5. おわりに

非定常ナビエ・ストークス方程式に対する「 δ^2 -形式」および「 δ^2 -コレクションスキーム」を提示した。スキーム左辺側の粘性項の近似式を含む各項の詳細、二次元流に対する有限体積法の定式化等、紙面の関係で省略した。文献5)を参照されたい。

参考文献

- 1) 松野謙一：非定常オイラー方程式に対する δ^2 -コレクションスキーム，日本航空宇宙学会誌，Vol.36, No.409, (1988)p.44.
- 2) 松野謙一：非定常圧縮性流れに対する新しい数値解法，第19回流体力学講演会前刷り集(1987.11), p.212.
- 3) Matsuno, K.: An Implicit, High Order Accurate, Upwind Scheme for Unsteady Euler Equations, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 37 (to be published).
- 4) Pullium, T.: Artificial Dissipation Models for the Euler Equations, AIAA-85-0438 (1985).
- 5) 松野謙一：非定常ナビエ・ストークス方程式に対する δ^2 -コレクションスキーム，航空宇宙技術研究所報告，NAL-TR-1006, (1988)

Boltzmann-Godunov型の差分スキームについて

岩宮敏幸* 高橋匡康* 相曾秀昭*

Difference Scheme of Boltzmann-Godunov Type

by

Toshiyuki IWAMIYA, Tadayasu TAKAHASHI
and Hideaki AISO*National Aerospace Laboratory*

ABSTRACT

In this paper we combine the Boltzmann approach with the Godunov procedure to give rise to a new way of constructing a variety of difference schemes for hyperbolic conservation laws (Boltzmann-Godunov type difference schemes). Upwindness is naturally introduced in this formulation. It is shown that most of the upwind schemes proposed so far can be formally interpreted as Boltzmann-Godunov type difference schemes.

1. はじめに

近年, Euler 方程式を含む非線形双曲型保存則に対する数値計算が大きな成果をあげて物理的にも工学的にも有用なデータを提供しつつある。これは基本的な差分スキームの研究の成果に負うところが大きい。現在までに, 双曲型保存則に対して多くの差分スキームが提案されてきているが, 基本的には1次元スカラー保存則の理論に基づいて解析がなされ, それをそれぞれの特性方向に適用することによってシステムに拡張して使われている。その中でも, 特に, 特性曲線に沿って情報が伝わっていくという双曲型特有の性質を差分スキームに取入れた上流型の差分スキームが大きな成果をあげている。これらの差分スキームは線形方程式に適用しても非線形になるという意味で本質的に非線形である。しかしながら, システムに対しては十分な解析がなされておら

ず, 何をもって上流型と呼ぶべきかさえ非常にあいまいである。

本報告では, いままでに提案されている上流型差分スキームが Boltzmann Approach の観点から統一的に理解されることを示す。

簡単のために, 1次元双曲型保存則

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

を考察する。ここで, u は保存量であり, $f(u)$ は流束 (Flux) と呼ばれる。流束 $f(u)$ のヤコビアン行列が実数の固有値を持つとき, 方程式(1)は双曲型であるという。方程式(1)が線形の場合は簡単に解析できるが, 非線形の場合は大変複雑な現象が起り, 数学的な解析は未だに不十分な段階に留っている。この方程式の解の特徴は十分滑らかな初期値から出発しても有限時間内に不連続性に発展していく可能性があるという点である。この不連続性は流体力学との類推から衝撃波と接触不連続面に分類されるが, 不連続性が発生した途端, 方程式(1)は明確な意味を失ってしまう。しかしながら, 物理的には不連続性

* 航空宇宙技術研究所