16

TV安定スキームの比較

安 喜 隆 幸*

A Comparative Study on TV-Stable Schemes

by

Takayuki AKI
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

Three representative schemes among the TV-stable family were tested for comparing smoothness of solution, resolution power of fluid dynamic discontinuities, and implementation cost. A TVD of Harten-Yee type, its TVB modification by Shu's method, and ENO proposed by Harten-Osher were chosen and use was made with discretization at the second order. Problem tested for space one-dimension was Sod's one and that for two-dimension shock propagation around 90 degree bend in a channel. The tests had been conducted under the same computational conditions. Although all the schemes tested showed almost equal resolution for shocks, ENO scheme provided the most smooth solution across shocks. The TVD scheme captured an instability in slip surface associated with Mach reflection. Implementation cost increased in order of TVD, TVB, and ENO. The cost increment of ENO to TVD was less than 10%.

1. 序　　論

1970年代の末，それ以前の長い模索の後，計算流体力学における数値法（スキーム）開発は急激な発展を示し始める。超と言う冠が付いた大型計算機が出現し始めた幸運な背景に支えられて，字義通りの日進月歩が続いている。圧縮性流れを対象とする分野では，厳密なEuler方程式に基づく解析が3次元複雑形状物体まわりの流れにも日常的に適用出来るようになった。この間には，計算機の発達に伴なって規模の拡大化が可能になって来ている（いわば当り前の）事情の外に高精度安定なスキームの開発による支援がある事を見逃せない。

圧縮性流れの解析に向けたEuler方程式の数値解法の近代化はHarterによる全変動（Total Variation：TV）減少（Diminishing：TVD）スキームの提唱[1,2]に始まると言ってよい。Harten自身は空間1次元への適用例を示すに止まったが，一般曲線系迄を含め空間2次元への展開がYee[3,4]を中心として進められ，非粘性卓越粘性（換言すれば高Reynolds数）流れの解析へと発展[5]した。この間の貢献により，このスキームはHarten-Yee型と呼ばれ

Harten自身が提唱したスキームは修正流束型(modified flux type）と呼ばれるもので，TVDスキームの一族に過ぎない。Hartenの論文[1]でより重要な事はTVDスキームの十分条件を示した事にある。(Hartenの）TVD十分条件は極めて一般的なものであるから，色々な（既存又は新開発の）スキームがTVD族のものであるか否かの判定に役立つ。こうして，Harten以前のスキームの中でTVD族に分

＊航空宇宙技術研究所

This document is provided by JAXA.

類され得るものが確認されたばかりでなく新らしい族を構築する時の指導原理の役割を演ずるに至っている。

その一つの展型的例がDavis-Roe-Yeeの流れで構築された中心差分基底形のTVDスキーム[6~8]である。もう一つの代表例としてOsherとChakravarthyによる高次(3次以上)TVDスキームの提案[9]がある。このスキームは15次迄到達可能な理論精度を持つが最高次精度での実践計算例はまだ報告されていない。

Harten以降に提案されたTVDスキームはほとんど一般曲線座標系表示での空間多次元Euler方程式,薄層近似Reynolds平均Navies-Stokes方程式の2次精度数値解に成功しており,この意味でTVDは現在実用段階に至ったと言ってよい。

一時期窮極の計算法と思われたTVDスキームも各種問題での検証計算が進むにつれ,その性質の弱点が指摘されるようになった。後でもう一回見直すが,数値解が極値をもつような流れ場の所で精度が落ちる事が問題視され始めた。多くのTVDスキームは基底スキーム(Eスキーム[10]と呼ばれ,1次精度)に高次精度補正項を加える方法で構築されている。この補正項に流束制限関数(flux limiter)が含まれる。この関数は場状態量の勾配に依存して流束制限を行うが,勾配の符号が異なると制限作用を失う特性を持っている。従って解が滑らかで単調なところでは流束制限作用が働き高(多くは2次)精度補正項が有効になる。然し,滑らかではあっても解が単調で無いと流束制限作用を失い補正項が無効となる結果,元の基底スキームに戻ってしまう。この性質は衝撃波遷移のような急峻な場の状態変化が起こるところでは解の振動抑圧効果として有利なものだが,本来滑らかであるべき場のところでは都合悪い事になる。

そこで,このTVDスキームの欠点を取り除く方向に研究の目が向けられ始めた。そして提案されたのが本報告で取扱うUNO/ENO,TVBと呼ばれるスキームである。TVDも含めてこれらのスキーム全体をTV安定スキーム(TV stable schemes)と呼ぶ事にする。TV安定スキームに共通な事はスキームの数学的議論に必要な基準がl_1ノルムに取られる事である。従って,TV安定スキームの呼称はTVD,TVB及びUNO/ENOの部分族集合の総称として不自然で無いと思える。注意深い読者は,Hartenの論文[1]の表題中この言葉を発見すると共に,Harten自身がより大きなスキーム集合の一族(実際には,更にその中の一族)として彼自身のスキームを把えていたらしい事に気付くであろう。従って,UNO/ENOスキーム開発に有力なメンバーとして参加している事は推移の自然さを感じさせる。

それはさておき,本報告ではHarten-Yee型のTVD,ShuのTVB(TV Bounded),HartenとOsherのUNO/ENO(Uniformly Non Oscillatory/Essentiall Non Oscillatory)の3種のスキームを用い,空間1次元及び2次元のEuler方程式を同一計算条件で解き,その結果を幾つかの項目に亘って検討する。その検討結果は勿論であるが,実践中に気付いた事も附加してこれら新スキームを利用する為の指針を得る事を目的としている。

2. 計算手順

比較の基準を各スキームの2次精度にとる。現在多くの実用計算が2次精度スキームに依って行われている事,実用計算で遭遇する数値計算的境界条件を考慮すれば,2次を超えるスキームに問題が残るので,妥当な基準と考えられる。

更なる統一条件として,差分計算である事,(空間)1次元では等分割Cartesian座標上で固定格子上での計算を行う事,多次元(実際には2次元)に対しては一般曲線座標上の固定格子計算をStrang型の分割歩進法で実行するなどを課す。

こうした条件の下で,保存形式で書かれたEuler方程式の差分近似表示は代表的に

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(\widetilde{F}_{j+1/2} + \widetilde{F}_{j-1/2}) \qquad (1)$$

と書ける。

ここで,Uは列ベクトルで各要素は保存変数である。Uの上下添字は$U(\xi = j\Delta\xi,\ \tau = n\Delta t)$の数値解である事,$\xi$は現在考えている座標方向(1次元のとき,$\xi = x$;2次元のとき$\xi = \xi$又は$\eta|\xi = \xi(x, y)$,$\eta = \eta(x, y)$)であり,$\Delta\xi$は格子幅である。さらに,$t$,$\Delta t$は時間座標とその刻みを表わす。$\lambda = \Delta t / \Delta\xi$である事など通常の記号法に従って書い

This document is provided by JAXA.

である。$\widetilde{F}_{j+1/2}$は数値流束（numerical flux）を表わし

$$\widetilde{F}_{j+1/2}=\frac{1}{2}(F_j+F_{j+1}+R_{j+1/2}\Phi_{j+1/2}/J_{j+1/2}) \tag{2}$$

と展開される。$\widetilde{F}_{j-1/2}$についても同様である。ここで，$F_j=F(U_j^n)$は物理（Physical）流束であり，元のEuler方程式（偏微分方程式）に書かれていたものと同一でUの対応する要素の流束である。更に，$R_{j+1/2}=R(U_{j+1/2}^n)$はJacobian $\partial F/\partial U$から求まる固有値a^m（1次元，$m=1,2,3$；2次元，$m=1,\cdots,4$）に対応する右固有ベクトルR^mを列要素とする行列，$R=(R^1,\cdots,R^m)$である。最後のJは座標変換に伴なうJacobianであり，1次元等分割座標では$J=1$とする。また，2次元に対し(2)のF_j等は$F_j\equiv F_{j,k}^{\xi\,or\,\eta}=F^{\xi\,or\,\eta}(U_{j,k}^n)$と解釈する。以下の種々の表式についてもこの約束があるとする。(2)で残された$\Phi_{j+1/2}$はスキーム毎に表現が異なる。$\Phi_{j+1/2}$は列ベクトルであるが，そのm番要素を$\Phi_{j+1/2}^m$と書くと，各スキームについて以下のように書ける。

2.1 Harten-Yee型TVDスキーム

この場合，

$$\phi_{j+1/2}^m=\sigma(\alpha_{j+1/2}^m)(g_j^m+g_{j+1}^m)-\psi(\alpha_{j+1/2}^m+\beta_{j+1/2}^m)\alpha_{j+1/2}^m \tag{3.a}$$

但し

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}[\psi(z)-\lambda z^2] \tag{3.b}$$

$$\psi(z)=\begin{cases}|z| & |z|\geq\delta\\ (z^2+\delta^2)/2\delta & |z|<\delta\end{cases} \tag{3.c}$$

$$\beta_{j+1/2}^m=\begin{cases}\sigma(\alpha_{j+1/2}^m)(g_{j+1}^m-g_j^m)/\alpha_{j+1/2}^m & \alpha_{j+1/2}^m\neq 0\\ 0 & \alpha_{j+1/2}^m=0\end{cases} \tag{3.d}$$

$$\alpha_{j+1/2}^m=(R_{j+1/2}^{-1})^m(\widehat{U}_{j+1}^m-\widehat{U}_j^m) \tag{3.e}$$

である。ここで，$\widehat{U}_j=J_jU_j$，$R_{j+1/2}^{-1}$は$R_{j+1/2}$の逆行列（$R^{-1}R=I$，Iは単位行列），δは正定数で$0.1\geq\delta\geq0.001$の範囲で選ばれる。$\delta\geq0.1$も可能であるが，衝撃波遷移幅が広がるので可能な限り小さな値が望ましい。$\delta=\delta(U,a)$のようにすると更に良い結果が得られるが，全域に亘って一定の小さな値の定数を使っても（非粘性完全気体で流れのマッハ数が5を超えない場合）それ程顕著な差は見られない。

(3)式で説明の残されたg_jは流束制限関数で，

$$g_j^m=mm(\alpha_{j-1/2}^m,\alpha_{j+1/2}^m) \tag{4a}$$

$$g_j^m=[\alpha_{j+1/2}^m\alpha_{j-1/2}^m+|\alpha_{j+1/2}^m\alpha_{j-1/2}^m|]/(\alpha_{j+1/2}^m+\alpha_{j-1/2}^m) \tag{4b}$$

$$g_j^m=\{\alpha_{j-1/2}^m[(\alpha_{j+1/2}^m)^2+\varepsilon]+\alpha_{j+1/2}^m[(\alpha_{j-1/2}^m)^2+\varepsilon]\}/[(\alpha_{j+1/2}^m)^2+(\alpha_{j-1/2}^m)^2+2\varepsilon] \tag{4c}$$

$$g_j^m=mm[2\alpha_{j+1/2}^m,2\alpha_{j-1/2}^m,\frac{1}{2}(\alpha_{j-1/2}^m+\alpha_{j+1/2}^m)] \tag{4d}$$

$$g_j^m=S\cdot\max[0,\min(2|\alpha_{j+1/2}^m|,S\cdot\alpha_{j-1/2}^m),\min(|\alpha_{j+1/2}^m|,2S\cdot\alpha_{j-1/2}^m)];\quad S=\mathrm{sgn}(\alpha_{j+1/2}^m) \tag{4e}$$

の何れかが使える。ここで，$10^{-7}\leq\varepsilon\leq10^{-5}$の範囲の$\varepsilon$を選ぶ。この$\varepsilon$は$\psi(z)$における$\delta$程強い効果は無い。また，mmは次の特性を持つ（通常min mod と呼ぶ）演算子

$$\mathrm{mm}(x,y,\cdots)=\begin{cases}S\cdot\min(|x|,|y|,\cdots) & \text{if } S=\mathrm{sgn}(x)=\mathrm{sgn}(y)=\cdots\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{5}$$

である。

ここで実践上の注意に触れておく。(2)を書いた時何も断わり書きを入れておかなかったが，実は局所特性（local characteristic）法を使っており，ベクトルであったEuler方程式が$W=R^{-1}\Delta\widehat{U}$なる特性変数に関し分解され，スカラの連立方程式になっている事に注意する。この事はWの成分夫々毎にスキームを変え得る事を意味し，(4)の流束制限関数を組合せて使える事になる。そこでLaxの定義[11]に従って特性場を線形・非線形に分け，夫々に別の流束制限を行う事が考えられた。筆者の経験[12]に依れば，ある適当なマッハ数では，

(イ) 線形場に（4e）

(ロ) 非線形場に（4a）

を適用した時が，衝撃波・滑り面・接触面の分解に関して最良結果を出す事が判った。爾来，Harten-

This document is provided by JAXA.

Yee TVDにはこの組合せで計算を行う事が多くなった。また，(3.a)括弧内の関数$\psi(z)$は解を一意ならしめる為のentropy fixの役割を持ったものである。線形場にentropy fixは必要無いので，線形場に対してのみ$\delta=0$とした$\psi=|z|$を使ってもよい。

2.2 TVBスキーム

このスキームはShu[13]が提案したものであるが，次のUNO/ENOと比較するとTVD枠内での改良と言う色彩が強い。

TVBに入る前に，前に述べたTVDの欠点をもう一度洗っておく。問題となるのは(3.a)の右辺である。そこで右辺に表われる因子g_jの性質は，格子が十分小さい時

(a) Uが滑らかで，かつ単調ならば$\alpha_{j+1/2}\cdot\alpha_{j-1/2}>0$だから，必らず有限な値$\propto 0(\Delta U)$をとるが，

(b) Uが滑らかであっても$\alpha_{j+1/2}\cdot\alpha_{j-1/2}<0$のところ，換言すれば$U$がある極値を通過するところで完全にゼロかゼロに非常に近い値となる，

ことが(4)からわかる。ある格子点の近くで(b)の状況が起こると，その格子点での数値流束(2)へは(3.a)の残りからくる$R_{j+1/2}a_{j+1/2}R^{-1}_{j+1/2}(U_{j+1}-U_j)=A_{j+1/2}(U_{j+1}-U_j)=A_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}U$が寄与するだけとなり，1次精度風上差分の数値流束へ戻って仕舞う。従って，(b)状況下で精度を落とす原因は数値流束関数の特性にあると言える。

従って(b)状況下でも$O(\Delta U)$の寄与を確保すると同時に，(a)の下でも同じ寄与となる流束制限関数を見つける事が欠点修復の一つの可能性と認められる。これは，完成されたTVDスキームを基礎から見直すのではなく，その枠内での修復法と見倣して良いと考えられる。ここで，TVDの枠内と言っているのは後述のUNO/ENOの手法を意識しての事であって，得られるスキームはTVDを含むものになっている事に注意したい。TVBの定義その他の詳細はShuの論文[13]を参照してもらう事にして，実際手続きに話を戻すと(3.a)のg_jに

$$g_j=\frac{1}{2}[\mathrm{mc}(\alpha_{j+1/2},\ b\alpha_{j-1/2})+\mathrm{mc}(\alpha_{j-1/2},\ b\alpha_{j+1/2})] \qquad (6a)$$

を用いる。

但し，bは$1<b\leqq 3$の範囲の定数でmcは演算子

$$\mathrm{mc}(x,y,\cdots)=\mathrm{mm}\,(x,y+S\cdot M\Delta\xi^2,\cdots)$$
$$S=\mathrm{sgn}(x) \qquad (6b)$$

であり，Mは正定数，$\Delta\xi$は格子幅などである。(6b)を用いて(6a)を書直すと

$$g_j=\frac{1}{2}\{\mathrm{mm}[\alpha_{j+1/2},\ b\alpha_{j-1/2}+\mathrm{sgn}(\alpha_{j+1/2})M\Delta\xi^2]+\mathrm{mm}[\alpha_{j-1/2},\ b\alpha_{j+1/2}+\mathrm{sgn}(\alpha_{j-1/2})M\Delta\xi^2]\} \qquad (7)$$

である。

U_jが十分滑らかで，かつ単調ならば$\mathrm{sgn}(\alpha_{j+1/2})=\mathrm{sgn}(\alpha_{j-1/2})$。また格子が十分小ならば$|\alpha_{j+1/2}|\approx|\alpha_{j-1/2}|$と考えられるので，$b>1$に対し

$$g_j=\frac{1}{2}(\alpha_{j+1/2}+\alpha_{j-1/2}) \qquad (8a)$$

$$\approx\Delta\xi\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)_j+0(\Delta\xi^2) \qquad (8b)$$

となり，TVDの流束制限関数と同じオーダで動作する。$b>1$の下で

$$\begin{aligned}|g_{j+1}-g_j|&\leqq\max(|g_{j+1}|,|g_j|)\\&=\max\left(\frac{1}{2}|\alpha_{j+3/2}+\alpha_{j+1/2}|,\ \frac{1}{2}|\alpha_{j+1/2}+\alpha_{j-1/2}|\right)\\&\leqq\max(|\alpha_{j+1/2}|,\ |\alpha_{j+1/2}|)\\&\leqq\frac{1+b}{2}|\alpha_{j+1/2}|\end{aligned}$$

である。流束修正型TVDスキームの安定条件

$$\lambda|a_{j+1/2}+\beta_{j+1/2}|\leqq\lambda|a_{j+1/2}|+\lambda|\beta_{j+1/2}|\leqq 1 \qquad (9)$$

において，(3.d)の$\beta_{j+1/2}$へ先程見積った$|g_{j+1}-g_j|$を入れ，(3.b)，(3.c)の関数を用いると

$$\begin{aligned}|\beta_{j+1/2}|&\leqq\frac{1+b}{2}\frac{1}{2}\sigma(a_{j+1/2})\\&=\frac{1+b}{4}|a_{j+1/2}|(1-\lambda|a_{j+1/2}|)\end{aligned}$$

と見積れるので，(9)を満たすには

$$\frac{1+b}{4}\leqq 1\quad 即わち\ b\leqq 3 \qquad (10)$$

This document is provided by JAXA.

である事を必要とする。$1<b\leqq 3$ の間で b を選んだ時，$\alpha_{j+1/2}\cdot\alpha_{j-1/2}<0$ の条件下で(8a)のようになる為には

$$|\alpha_{j+1/2}|\leq|b\,\alpha_{j-1/2}+\mathrm{sgn}\,(\alpha_{j+1/2})M\Delta\xi^2|$$
$$\leq b|\alpha_{j-1/2}|+M\Delta\xi^2$$

とならねばならない。格子が十分細かければ

$$|\alpha_{j+1/2}|\leq M\Delta\xi^2/(1+b) \tag{11}$$

を目安として M がきめられる。$M=0$ とすれば，(7)からTVDに戻る事もわかる。

以上により，解 U が滑らかで単調なところでTVDの時と同程度に動作し，極値を取るところでも有限な値を取る流束制限関数を作れる事がわかった。これをTVDのそれと交換する事により，理論的には大域同一精度の解が得られる筈だが，流束制限効果が薄れ具合の悪い結果となって仕舞う。

2.3 UNO/ENOスキーム

このスキームの鍵になるのは本質非振動内挿(ENO interpolation)[14]と呼ばれるもので，古典的内挿法と異なりデータ参照点（数ではなくて区間）をデータ適応的に変化させる手法である。

導出の詳細[15]を省略して結果のみ示すと(3.a)の g_j に代えて（上添字 m 省略），

$$g_j=-|\alpha_{j+1/2}|\,\alpha_{j+1/2}$$
$$+\max\,(0,\,a_{j+1/2})(1-\lambda a_{j-1/2})\widehat{S}_j$$
$$-\min\,(0,\,a_{j+1/2})(1+\lambda a_{j-1/2})\widehat{S}_{j+1} \tag{12.a}$$

但し，

$$\widehat{S}_j=\mathrm{mm}\,(S_{j-},\,S_{j+})/[\,1+\lambda\,(a_{j+1/2}-a_{j-1/2})\,] \tag{12.b}$$

$$S_{j\pm}=\alpha_{j+1/2}\mp\frac{1}{2}\mathrm{mm}\,(\alpha_{j+3/2}-\alpha_{j+1/2},\,\alpha_{j+1/2}-\alpha_{j-1/2}) \tag{12.c}$$

である。$\alpha_{j+1/2}=R^{-1}_{j+1/2}(U_{j+1}-U_j)=W_{j+1}-W_j$ だから

$$\alpha_{j+1/2}-\alpha_{j-1/2}=W_{j+1}-2W_j+W_{j-1}$$
$$=\Delta\xi^2\left(\frac{\partial^2W}{\partial\xi^2}\right)_j+0\,(\Delta\xi^3)$$

を表わしているので，(12.c)は2階導関数時のデータ参照点が（$j-1$，j，$j+1$）又は（j，$j+1$，$j+2$）に固定されるのでは無くて，データに依存してどちらに切換えられる事を表わす。この g_j を用いたスキームはMUSCL法になっているので

$$U(\xi)=U_j+\frac{(\xi-\xi_j)}{\Delta\xi}S_{j\pm}\qquad |\xi-\xi_j|<\frac{\Delta\xi}{2}$$

但し

$$S_{j\pm}=\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)_{j\pm}+O(\Delta\xi^2)$$

の内挿式で $U_{j\pm1/2}$ を求めようとしてENO内挿法を使用している事になる。

ENO内挿法に基づいたものをENOスキームと呼ぶ。この呼び方をHarten, Osher等は使うが，現在はUNOと言っても通用はする。ENOスキームの別な構成法・実行法については研究成果[16~18]が出されている。特に報告16)，17)で出されたものを新ENOスキームと呼ぶ事があるが，ENO内挿を基礎とする点は変らない。

3. 計算結果と考察

3.1 1次元Euler方程式

空間1次元のスキーム検定の標準とされるリーマン問題，即ち初期値を

$$U(x,0)=\begin{cases}U_L(x) & x<x_0\\ U_R(x) & x>x_0\end{cases}$$

と設定する問題を解く。具体的な U の値はSod[25]の用いたもの

$$U_L=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad U_R=\begin{bmatrix}0.125\\0\\0.1\end{bmatrix}$$

と同じである。

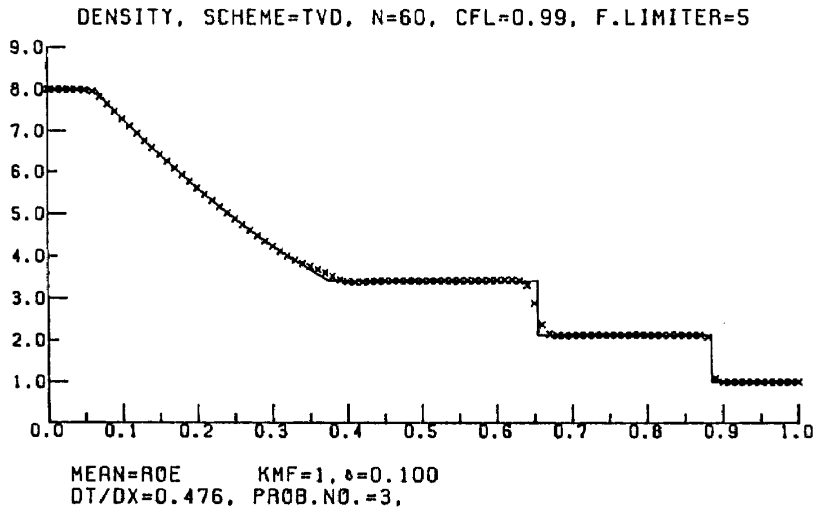
x 軸に101格子を用いた，各スキームの計算結果を図1に示す。また，TV量の時刻履歴を夫々のスキームについてプロットｔ図2に示す。計算時のCourant数は何れも0.99である。

図1から，

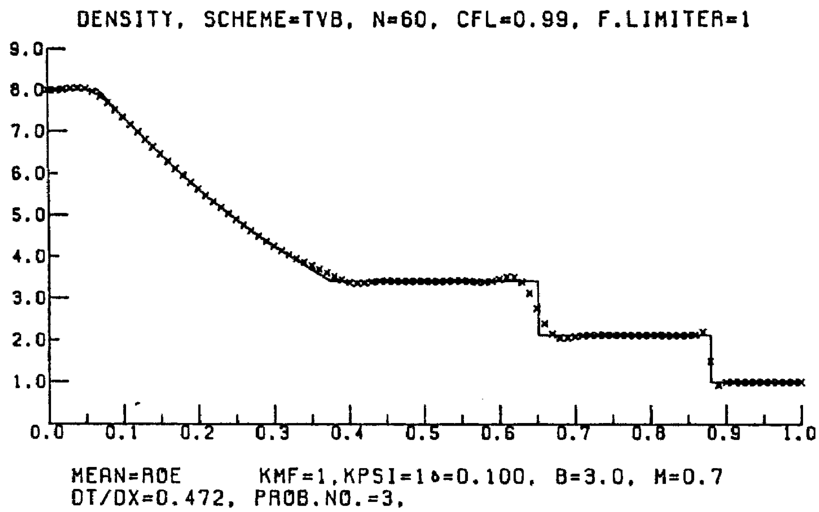
(1) TVBは（古典的スキームのLax-WendroffやMaCormack法程ひどくは無いが），不連続通過時に振動を示す。膨張終端（expansion tail）に於いても滑らかさに不足している。

(2) TVDとUNO/ENOとはほぼ似た結果となる。然し，図2から見られるように解の滑らかさは

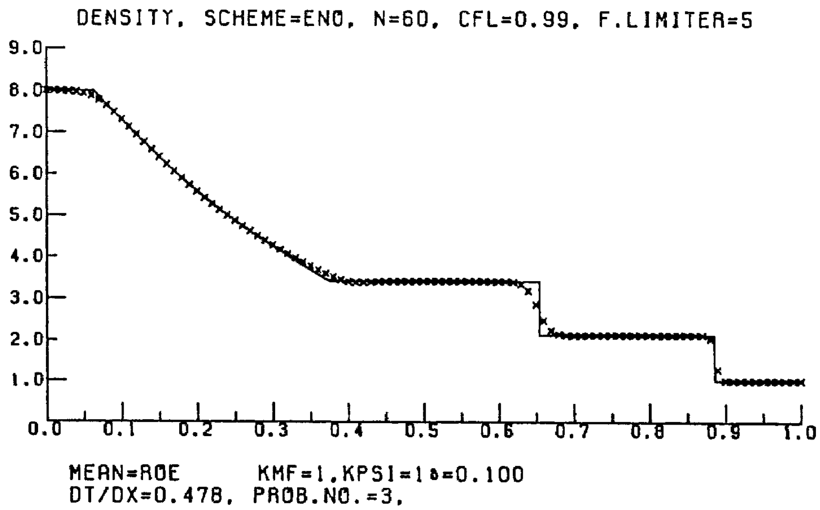
This document is provided by JAXA.



(a)



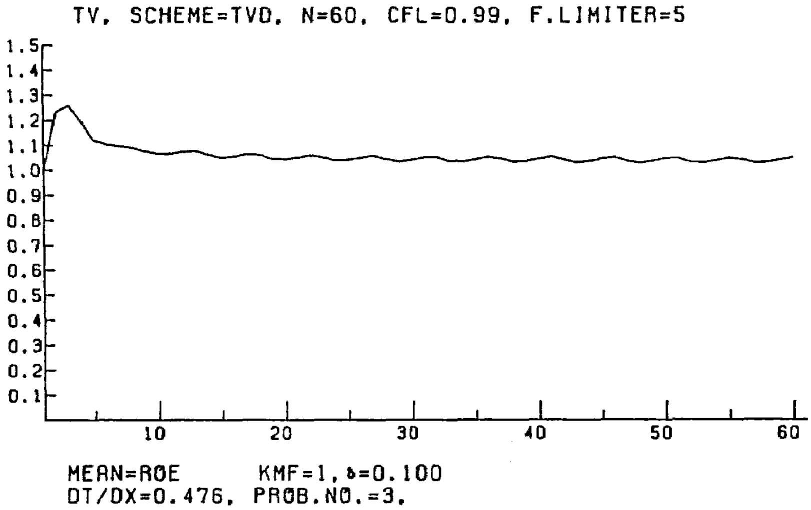
(b)



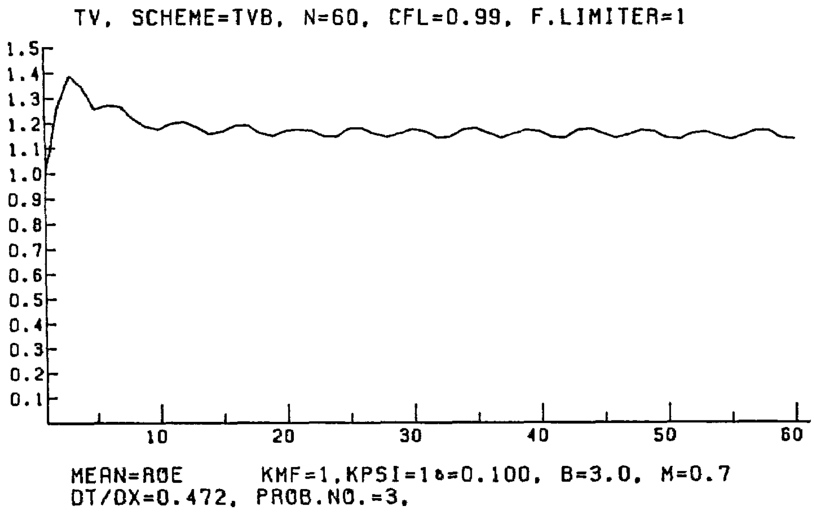
(c)

図 1 Density distribution, n=60, CFL=0.99, and (a) TVD : (b) TVB : and (c) ENO results, x numerical, — exact solutions.

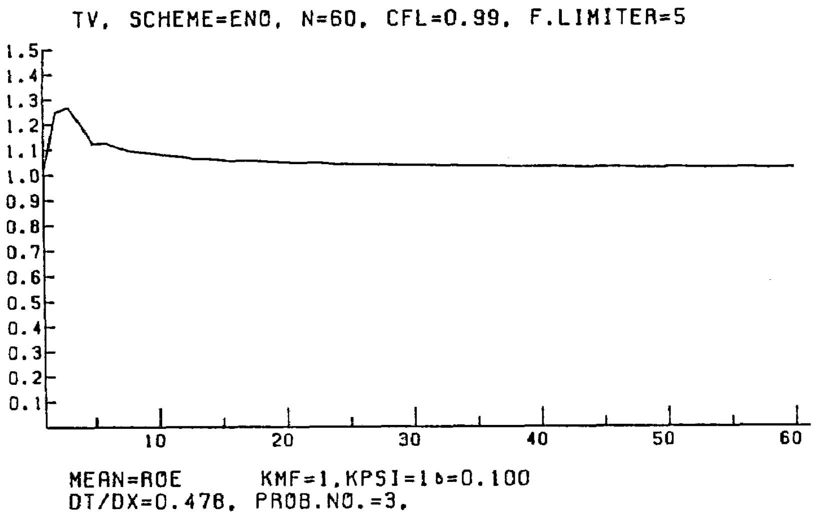
This document is provided by JAXA.



(a)



(b)



(c)

図２ History of total variation corresponding to cases in Fig.1.

UNO/ENOが勝る。

(3) 各スキーム共，衝撃波の捕捉力に比較し接触面のそれが劣る。

図2は

$$TV = \sum_{j=0}^{100} \alpha_{j+1/2}$$

の各時刻毎における値をプロットしたものである。TV安定スキームでは，時刻ステップ1回当り

$$TV((n+1)\Delta t) \leq TV(n\Delta t) + 微小量 \quad (13)$$

であり，初期値迄さかのぼると

$$TV(n\Delta t) \leq TV(0) + 或る量 = 上限値$$

だから一方的に減少するか一定でなければならない筈であるが，実際の計算では図2のように初期数ステップの間TV量は増加する事が多い。この遷移的な変化の後(13)が満たされるようになる。図2から解の滑らかさは

TVB < TVD < UNO/ENO

の順であり，図1のみからはよく分らなかったTVDとUNO/ENOの差が出てくる。

3.2 2次元Euler方程式

一般曲線座標の下で，保存形式で書かれた空間2次元のEuler方程式を用い，2次元90度曲り管内の衝撃波伝播を計算した。この問題は在来より著者が色々なスキームの検定に使用して来たものだが，ここでも繰返して使用する。

格子は各スキームとも共通のもので，管幅方向に131点，曲り部で4点/度，上・下流端に同一長さの直管部を付けておく。気体は$\gamma = 1.4$の完全気体とし曲り部入口端に衝撃波マッハ数2.2の平面衝撃波が到達したものとして初期条件を設定する。衝撃波前方は静止気体，また後方は無限長さにあるとして計算を行う。(2)の$R_{j+1/2}$，$\Phi_{j+1/2}$の計算のうち，物理量に関してはRoeの空力平均[26]を，幾何量に関しては算術平均を用いる。衝撃波マッハ数2.2の時，その背後流れは局所マッハ数約1.07で超音速だから上流端境界条件は衝撃波背後流れの値で固定される。壁面では流体の不流出（滑り）条件を課す。下流端での処理は不要である。各スキームによる結果を図2に示す。計算はCourant数＝0.99で行われた。

図3から

(1) 各スキーム共各衝撃波面（回折波，マッハステム，マッハ反射）や滑り面(密度線図を見よ)を良好に捕捉している，

(2) マッハ反射波の後方に追従している接触面（密度線図）の捕捉に関してはTVDとUNO/ENOがほぼ同程度TVBがやや劣る能力である。

(3) 滑り面の終端近くにある不安定（実験[27]ではリップルで捕えられるが，その波長・波高が小さいので計算ではキンクのように捕えられる）はTVDが最とも良く捕捉している，

(4) 解の滑らかさはUNO/ENOが最とも良い，

などがわかる。

一方，計算コストは各スキームの$\phi_{j+1/2}$の内訳からもわかるように

TVD < TVB < UNO/ENO

である。実際にはUNO/ENO：TVD < 1.1であった。

4. 結　論

前章での考察により，以下のように結論がまとまる。

(1) TVBのようなやり方でTVDを改善しようとしても余り効果が無いのでUNO/ENOを考えた方がよい，

(2) 流れ場物理の捕捉を重視するなら，低コストのTVDが推奨出来る。

(3) UNO/ENOはまだ研究余地がある。例えば風上差分との整合性は必要・緊急な課題と思われる。

参　考　文　献

1) Harten, A., "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes", SIAM J. N.A., Vol. 21, 1984, pp. 1-23.

2) Harten, A., "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", J. Comp. Phys. Vol. 49, 1983, pp. 367-393.

3) Yee, H.C., Warming, R.F. and Harten, A., "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) for Steady-State Calculations", J. Comp. Phys. Vol. 57, 1985, pp. 327-

This document is provided by JAXA.

360.
4) Yee, H.C. and Kutler, P., "Application of Second-Order-Accurate Total Variation Diminishing (TVD) Schemes to the Euler Equations in General Geometries", NASA TM-85845, 1983.
5) Yee, H.C. and Harten, A., "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates", AIAA J., Vol. 25, 1987, pp. 266-274.
6) Davis S.F., "TVD Finite Difference Schemes and Artificial Viscosity", ICASE Report No. 84-20, 1984.
7) Roe, P.L., "Generalized Formulation of TVD Lax-Wendroff Schemes", ICASE Report No. 84-53, 1984.
8) Yee, H.C., "Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications", J. Comp. Phys. Vol. 68, 1987, pp. 151-159.
9) Osher, S. and Chakravarthy, S., "Very Higer Order Accurate TVD Schemes", ICASE Report No. 84-44, 1984.
10) Osher, S., "Riemam solvers, the entropy condition, and difference approximations", SIAM J. N.A. Vol. 21, 1984, pp. 217-235.
11) Lax, P., "Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves", CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, SIAM, Philadelphia, 1973.
12) Aki, T., "A Computer Study on Mach Reflection around a Concave Surface", in Proc. 1st Appi Workshop on Supercomputing, Ed. R.H. Mendez, Institute of Supercomputer Research, 1987, pp. 1-20.
13) Shu, C.-W., "TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws", Math. Comp. Vol. 49, 1987, pp. 105-121.
14) Chakravarthy, S.R., Harten, A., and Osher, S., "Essentially non-oscillatory shock-capturing schemes of uniformly very high accuracy", AIAA 86-0339, 1986.
15) Harten, A. and Osher, A., "Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes, I", SIAM J. N.A. Vol. 24, 1987, pp. 279-309.
16) Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S.R., "Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III", J. Comp. Phys. Vol. 71, 1987, pp. 231- .
17) Harten, A., Osher, S., Engquist, B., and Chakravarthy, S.R., "Some Results on Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes", J. App. Numer. Math. Vol. 2, 1986, p. 347.
18) Shu, C.-W. and Osher, S., "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes", ICASE Report No. 87-33, 1987, 及び ICASE Report No. 88-24, 1988.

25) Sod, G.A., "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws", J. Comp. Phys. Vol. 27, 1978, pp. 1-31.
26) Roe, P.L., "Approximate Rieman Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", J. Comp. Phys. Vol. 43, 1981, pp. 357-372.
27) Takayama, K. et al., "Shock Propagation along 90 Degree Bends", Report Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ., Vol. 35, 1977, pp. 1-30.

This document is provided by JAXA.

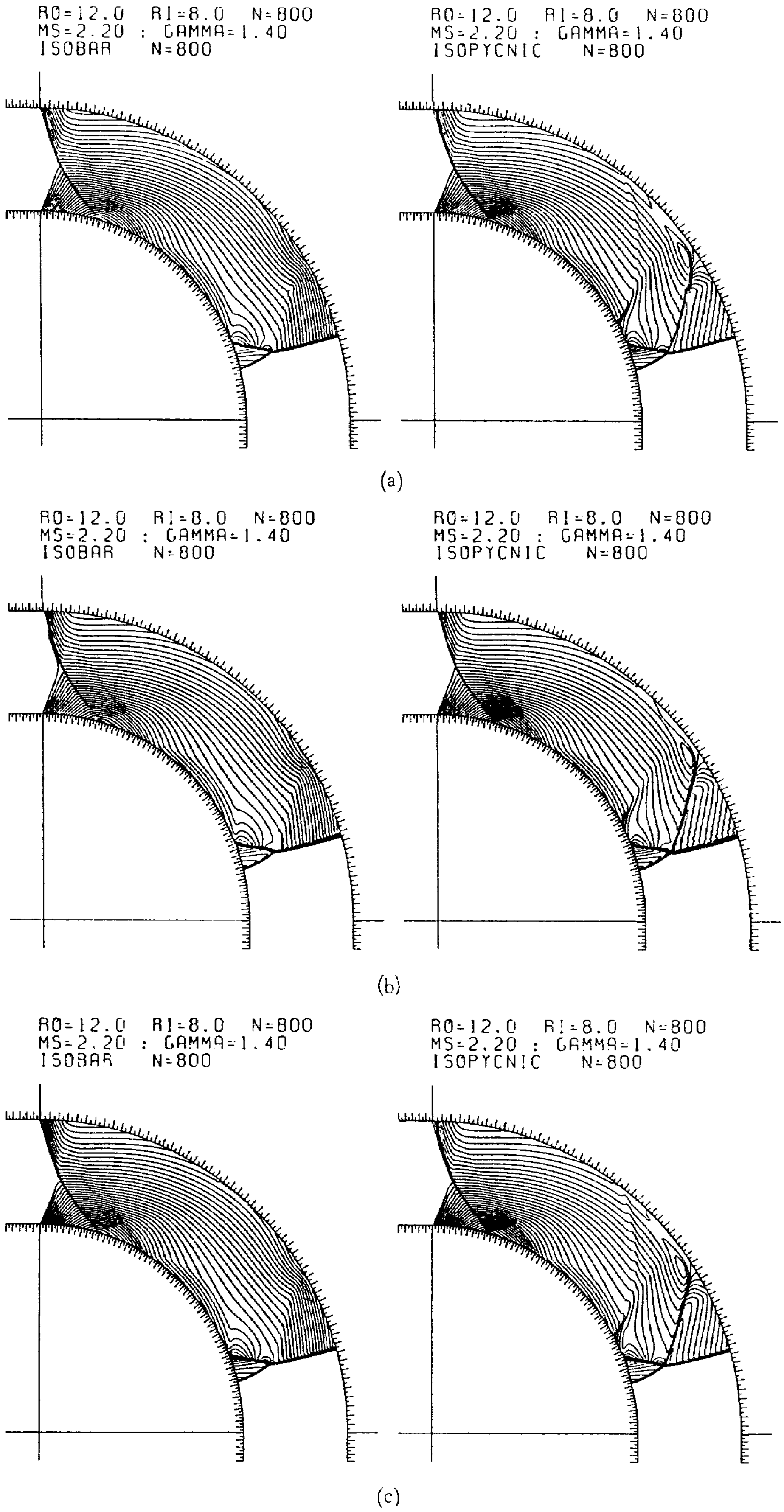


図 3 Shock propagation around 90 degree bend, grids : 4/degree along the bend and 131 across the bend width, $M_i=2.2$, $\gamma=1.4$, CFL=0.99, and (a) TVD : (b) TVB : (c) ENO

This document is provided by JAXA.