

矩形曲り管内の流れと熱伝達

山田 仁* 石垣 博* 望月 宗和*

Numerical Treatment of Laminar Flow in Curved Rectangular Channels

by

Hitoshi YAMADA, Hiroshi ISHIGAKI, Munekazu MOCHIZUKI

National Aerospace Laboratory Kakuda Research Center

ABSTRACT

The Navier-Stokes equations were solved by numerical methods for steady, fully developed, incompressible, laminar flow in curved rectangular channels. Solution are obtained for Dean number to 550 correctly by using the power-law scheme and it can be calculated to the Dean number to 900 by using the up-wind scheme.

The results are compared with the available experimental and the theoretical results. It was found that the friction factor became larger about 6% when the flow changed from the two vortex to the four vortex flow patterns, which occurred the Dean number was 116.0. The slope of the friction factor was different between the two vortex and the four vortex regions. Our results showed better agreement with the experimental results than the other theoretical results.

1. 緒 言

矩形曲り管を対象とした完全発達非圧縮層流流れの数値解析はCheng-Akiyama¹⁾, Joseph-Smith-Adler²⁾, Cheng-Lio-Ou³⁾, 小宮山, 三上, 奥井, 保里⁴⁾らにより従来行われてきている。解析方法は(2)がMAC法, それ以外は流れ関数を導入して圧力を消去するものである。また(3)以外は曲り曲率半径が大きいという仮定があり, 計算結果もディーン数が300以下にとどまっている。(3)はディーン数が700までの報告であるが壁面速度勾配と主流方向圧力勾配から求まる二つの管摩擦係数が10~20%も異なっており, これは計算精度を評価す

る一つの尺度となるので, その収束性, 信頼性には疑問がもたれる。なお小宮山らの計算結果はこの相違が2%以下と記されている。

本研究では上記対象について流れの数値計算を行ったものである。解析方法は基本変数を従属変数として断面内圧力, 主流方向圧力勾配とも変数として取り扱い, 上記文献等とは解析方法が異なる。現在までの所ディーン数が550まで十分な精度を有する解を得ており, 上述の二つの管摩擦係数の相違は0.1%以下である。しかしディーン数がそれ以上になると解が振動し始め収束解が得られなくなるが, 一次精度の風上スキームを用いると解は安定し, ディーン数が900程度まで解が得られる。

本報告では, これらの計算結果を従来行われて

* 航空宇宙技術研究所角田支所

きている実験結果や数値公式と比較検討し、矩形曲り管の完全発達非圧縮層流流れの一資料とするものである。

2. 記号

- a ; 矩形曲り管の幅
- b ; 矩形曲り管の高さ
- C_f ; 管摩擦係数
- D_h ; 水力直径 ($2ab/(a+b)$)
- K ; ディーン数 ($Re\sqrt{(a/R_c)}$)
- N_u ; ヌッセルト数
- R_c ; 曲り矩形管の曲率半径
- Re ; レイノルズ数 ($V_0 D_h/\nu$)
- r ; 座標の方向
- v ; 速度
- z ; 座標の方向
- θ ; 座標の方向
- λ ; 曲り矩形管の曲率半径比 (R_c/a)

3. 基礎方程式と数値解析

図1に本研究で対象とした矩形曲り管を示す。流れの主流方向は図中の θ 方向となり、幅方向を r 、高さ方向を z とする。それぞれの速度成分を v_θ 、 v_r 、 v_z とすると矩形曲り管内の定常非圧縮層流の完全発達領域での基礎方程式は、円柱座標を用いると次のようになる。

連続式

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1)$$

運動量式

$$\begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\Gamma^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\Gamma^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Gamma^2 v_z \quad (4)$$

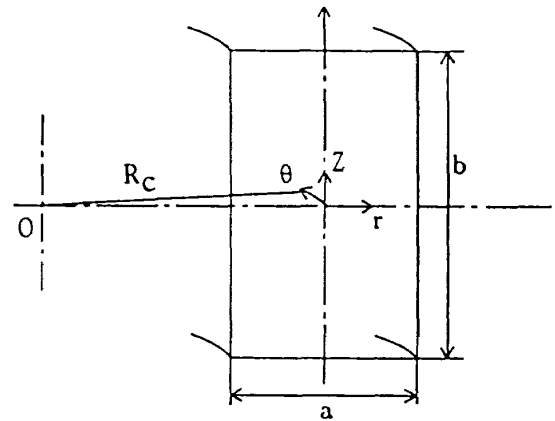


図1 曲り矩形管の座標系

エネルギー式

$$\rho c_p \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \Gamma^2 T \quad (5)$$

ここで

$$\Gamma^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

解析は図1に示すように $r \rightarrow R_c \rightarrow r$ におきかえたトロイダル座標系で行う。ここでは曲率半径比が1より大きいという仮定は入らない。

境界条件は次式で示される。

壁面上

$$v_r = v_\theta = v_z = 0$$

対称面 ($Z=0$) で

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = v_z = 0$$

数値計算プログラムはPatanker⁵⁾の著書を参考にしたものである。格子数は 21×17 でディーン数が550以下ではべき乗スキームを用い、それ以上では一次精度の風上スキームを用いた。

4. 計算結果と考察

4.1 流れのパターン

アスペクト比が1.0の矩形曲り管の上半面についての主流速度の等速度線とその鳥瞰図および二次流線をディーン数100と200の場合について図2および図3にそれぞれ示す(矩形管は上下対称なのでこれ以後特に記する以外は全て上半面の図である)。ディーン数が200の場合にはディーン数100の上下壁の影響による通常の二次流れに加え

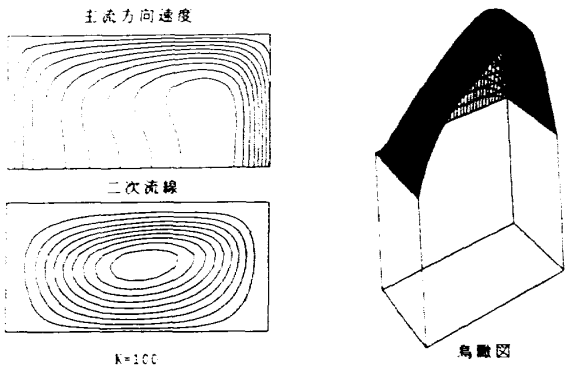


図2 主流方向速度分布と二次流線
(アスペクト比 1.0 K=100)

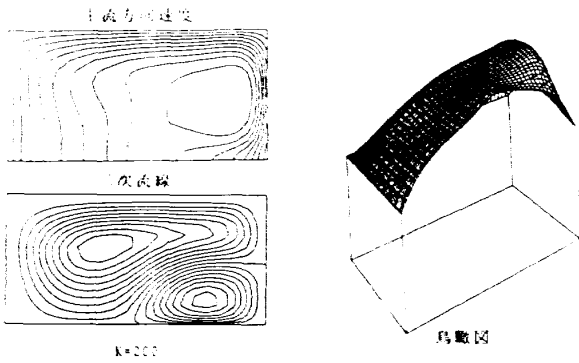


図3 主流方向速度分布と二次流線
(アスペクト比 1.0 K=200)

て、ディーン型遠心力不安定により外側壁面近くに付加渦が発生し、矩形管全面では2対4個の渦を持つ流れとなる。

図4および図5にアスペクト比が1.0の場合の矩形管の水平面および垂直面での主流速度分布におよぼすディーン数の影響を示す。ディーン数100では速度の最大値は外側壁近くにあるが、ディーン数が300および500の場合は、速度の最大値は前述したようにディーン型遠心力不安定により矩形管路中央部に移動し、またその速度の最大値も減少する。垂直面ではディーン数が大きい程、管路の大部分で速度分布が平滑化していることがわかる。

次にアスペクト比が大きい場合の流れのパターンを図6に示す。アスペクト比が大きくなると渦の数は急激に増大し、アスペクト比10で管全面で6対12個の渦となる。図6はディーン数の二次流れにおよぼす影響を示す。図6の(1)のディーン数30では上壁面の影響により上壁面近くの1個の渦

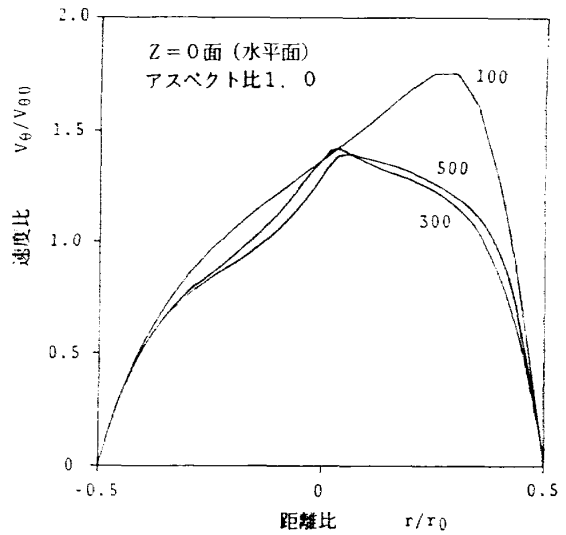


図4 水平面でのディーン数による主流方向速度分布の変化

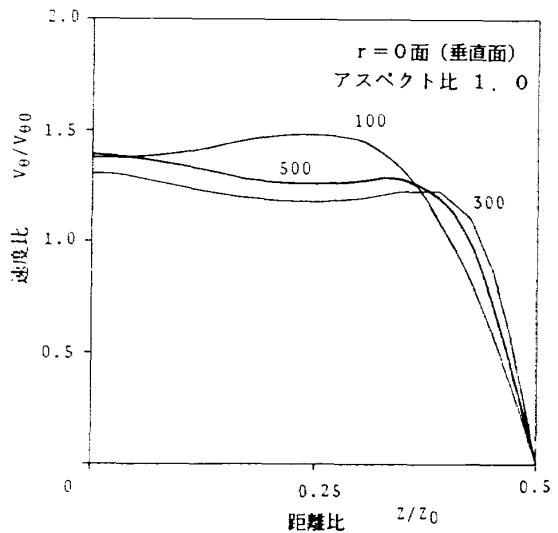


図5 垂直面でのディーン数による主流方向速度分布の変化

しかないが、図6の(2)のディーン数100では遠心力不安定による5個の渦が追加されている。図6の(2)の等速度線図から外側壁面上から内側に向う流れがこれらの渦を作っていることがわかる。

次によく引用される文献Cheng-Lin-Ou³⁾と同じ条件で流れを計算し、同じパターンがあらわれるかどうかを調べたところ文献(3)の5つの図(文献(3)の図2、アスペクト比1.0での二次流れ)のうち2個の場合で異なった結果を得た。すなわちディーン数151、曲率半径比100でCheng-Lin-Ouらの結果は2渦であるが、本研究ではディーン数が120以上では全て4渦となる。また曲率半径比が

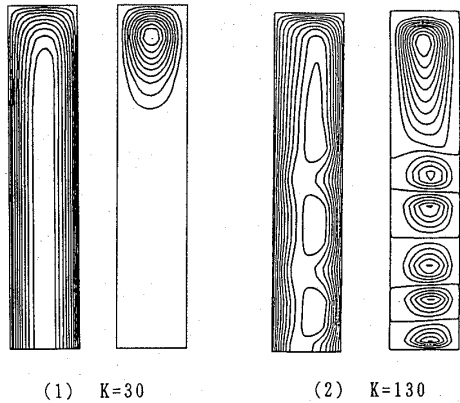


図6 アスペクト比が大きい場合の主流方向等速度分布と二次流線 (アスペクト比 10.0 曲率半径比 20.0)

4ではディーン数488で4渦であるが、ディーン数520になるとまた2渦にもどるとしている。しかし本研究ではいずれの場合でも4渦のままで2渦にもどることはなかった。

図7は曲率半径比が20の場合の2渦から4渦に変化する臨界ディーン数を求めた結果を示す。図中の直線はディーンの求めた二次元曲り通路の35.92⁶⁾である。Cheng⁷⁾、杉山⁸⁾らは曲率半径比が5の場合の可視化実験から、また秋山らの数値解⁹⁾よりアスペクト比が2~3で極大値をもつ事を示しているが、本研究ではアスペクト比が1以下で臨界ディーン数は非常に大きく、1付近に極小値を持ち次に2~3付近に小さい極大値を有し、その後アスペクト比が増大するにつれて単調に減少する。

4.2 管摩擦係数

図8に本研究で得られた管摩擦係数比におよぼすディーン数の影響を従来得られてきているものと合わせて示す。なお管摩擦係数比は曲り管の管摩擦係数を直管のそれで除したものである。図中のBaylisの実験公式¹⁰⁾はディーン数500以上で成立するものでLudwigの実験値¹¹⁾とも良く一致するので漸近公式とみなせる。Cheng-Lin-Ouの数値公式はかれらの数値計算結果から導かれたものであり、公式集にはよくこの公式が使われている。しかし図から明らかなように、Chengらの公式はBaylisの実験公式とはディーン数が500で20

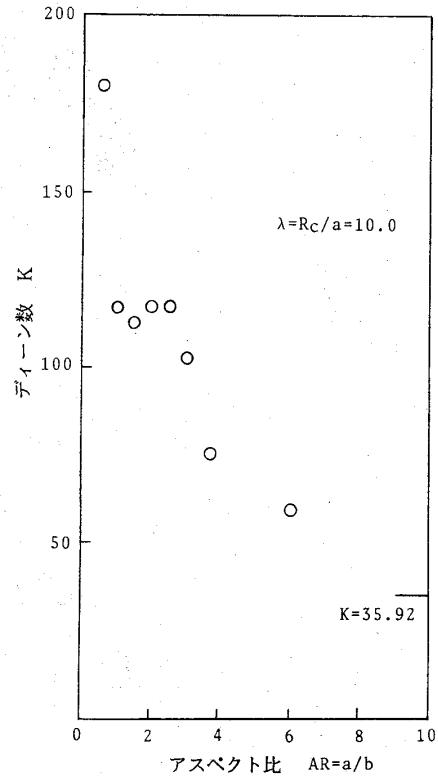


図7 遠心力不安定による4渦発生の臨界ディーン数

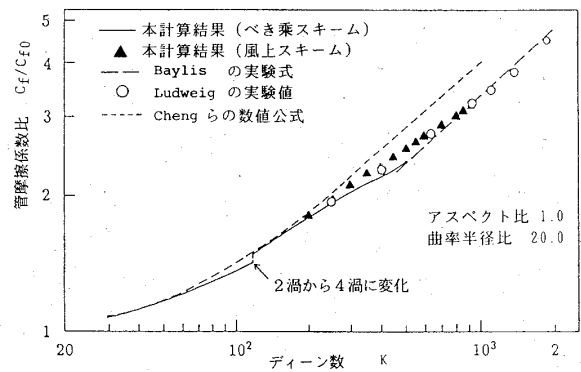


図8 管摩擦係数におよぼすディーン数の影響

%程度異なるが、これについてChengらは曲率半径比の影響であるとしている。しかしBaylisらの曲率半径比(1.75 λ <math>< 17.5</math>)を変えた実験ではその影響は全くみられないので、検討する必要がある。

さて本研究ではディーン数が約118で二次流れは2渦から4渦に変化するが、これにともなって管摩擦係数比も約6%増加し、曲線の傾きも変化する。円形曲り管ではこの増加は約0.6%と無視できる程度¹²⁾と報告されている。ディーン数が大

きくなると本計算結果は Cheng らの数値公式からずれて Baylis の実験公式に漸近するが、ディーン数が 550 以上では解は振動しはじめ収束解が得られなくなる。しかし一次精度の風上スキームを用いて解を安定させると、ディーン数が 900 程度まで収束解が得られる。これによる解も図中に示したが、ディーン数が大きくなるにつれて Baylis の実験公式に漸近していくことがわかる。しかしこの場合数値拡散が大きくなるのでべき乗スキームほどの精度はでないと思われる。

4.3 熱伝達

図9にアスペクト比が 1.0, 曲率半径比が 20 の場合で主流方向壁面熱流束が一定(周方向壁温度一定)の場合の平均ヌセルト数比(直管のヌセルト数で除したものを)を示す。前述の管摩擦係数と同様に流れが 116 で 2 渦から 4 渦に遷移するが、その時点でヌセルト数は約 5% 変化する。なお図中に空気を得られた平均ヌセルト数比¹³⁾ および Cheng らの公式をあわせて示した。この場合全体として本計算結果は上記の実験結果および Cheng らの公式より小さい値を示した。

5. 結 論

矩形断面の曲り管の完全発達層流の現在まで得られた計算結果について述べた。これより Cheng-Lin-Ou らの管摩擦係数公式は実験値および本計算結果とかなりずれていることが明らかである。本研究の予備計算や Baylis の実験値では曲率半径比の影響はほとんどあらわれないので Cheng らの理由づけには疑問がある。

6. 参 考 文 献

- 1) K.C. Cheng and M. Akiyama, Int. J. Heat Mass T., 13 (1970), 471.
- 2) B. Joseph, E.P. Smith and R.J. Adler, AIChE Journal, 21 (1975), 965.

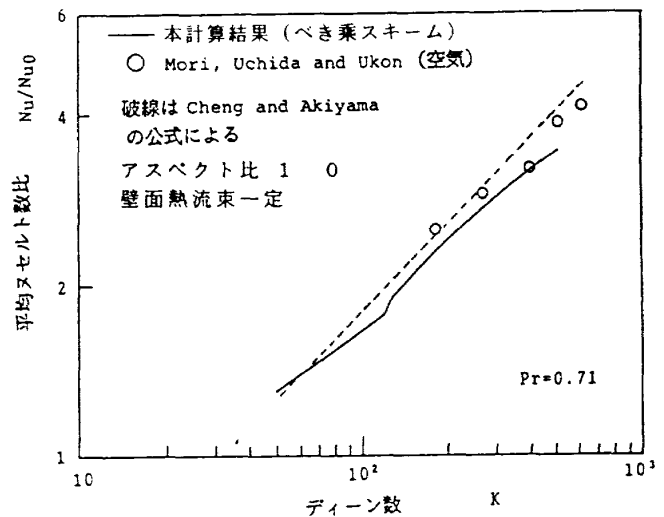


図9 平均ヌセルト数におよぼすディーン数の影響

- 3) K.C. Cheng, R.O. Lin and J.W. Ou, Trans ASME J. Fluid Engineering, 98 (1976), 41.
- 4) 小宮山, 他 3 名: 機論 50 巻 450 号 (昭和 59), 424.
- 5) S.V. Patanker, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill 1980.
- 6) P.G. Drazin and W.H. Reid, Hydrodynamic Stability (1981) 108, Cambridge University Press.
- 7) K.C. Cheng, Nakayama and Akiyama, Proceedings of the International Symposium on Flow Visualization (1977), 181.
- 8) 杉山, 他 2 名: 機論 48 巻 434 号, (昭和 57), 1870.
- 9) 秋山, 他 5 名: 機論 47 巻 421 号, (昭和 56), 1705.
- 10) J.A. Baylis, J. Fluid Mech., 48 (1971) 417.
- 11) H. Ludwig, Ing. Archiv, (1951) 296.
- 12) 石垣, 望月: 第 26 回伝熱シンポ講演論文集 (1989).
- 13) Mori, Uchida and Ukon, Int. J. Heat Mass T., 14 (1971), 1787.

円形曲り管内の流れと熱伝達

植 田 修 一* 石 垣 博* 望 月 宗 和*

Flow and Heat Transfer in Curved Pipe

by

Shuichi UEDA, Hiroshi ISHIGAKI, Munekazu MOCHIZUKI
Kakuda Research Center, National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

Numerical solutions of the parabolized Navier-Stokes equation in connected with energy equation are presented for steady laminar flow through a curved pipe. Predictions are presented for flow and heat transfer in the developing and fully developed regions. Results of skin friction, heat transfer, 360-deg. bend flow meter coefficients show that comparison with experimental data exhibit good agreement. Axial velocity and stream function developments are presented in developing regions for two inlet velocity profiles of uniform and Poiseulli flows.

1. 緒 言

曲り管内の流れは、実用上非常に重要な問題として、古くから実験的、解析的に詳しく調べられている^{1,2,3)}。最近では、計算機の発達に伴い助走区間の流れの数値解析による解析が盛んであり、層流の結果は実験データと良い一致を示している^{4,5,6)}。しかし乱流では、2次流れを伴う乱流のモデル化が未発達であり、実験値との一致は層流ほど良くない。本報告は、乱流を取扱う前段階として、放物化ナビエ・ストークス式を用いて曲り円管助走区間の層流を数値解析し、これまでの研究結果と比較して計算プログラムの精度等を確認したものである。完全発達領域における管摩擦係数、熱伝達率等について計算結果と過去の実験データとの比較を示す。また、助走区間における流れの発達について、実験結果との比較および断面内の分布を示す。

2. 基礎方程式と数値解析

図1に示すような円柱極座標系 (r, θ, z) をとり、速度成分を (u, v, w) とする。管内の流れが定常、非圧縮であるとし、 $R \gg a$ とすれば、 z 方向の粘性拡散を無視した放物化 Navier-Stokes 式は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w^2}{R} \cos \theta + \nu \left(r^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{w^2}{R} \sin \theta + \nu \left(r^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu r^2 w \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha r^2 T \quad (4)$$

* 航空宇宙技術研究所角田支所