

境界要素法による三次元格子の生成

柳 沢 三 憲* 中 館 正 顕**
越 岡 康 弘** 井 上 敦**

Generation of 3-D Grid Using Boundary Element Method

by

Mitsunori YANAGIZAWA

National Aerospace Laboratory

Masaaki NAKADATE, Yasuhiro KOSHIOKA, Atushi INOUE

Fuji Heavy Industries, Ltd.

ABSTRACT

A computational procedure for generating three-dimensional grids around wing-fuselage configurations is presented. Resort is made of Green's theorem to obtain the required solution using of the panel methodology. Then the lines of force and equipotential surfaces surrounding the configuration determine a body-conforming orthogonal grid. Application of the method to several test cases shows that the grid for a fore-body is made smooth and continuous and that the grid for a civil transport plane is created. A finite-volume Euler solver is adapted to the grid system. Computed inviscid compressible flow solutions about the civil transport plane are presented.

1. ま え が き

任意物体周りの三次元空間を差分法や有限要素法等に用いる三次元計算格子を境界要素法的手法を適用して求めた。すなわち、物体表面と無限遠にパネルを張り、物体表面から発する法線と等ポテンシャル面に沿って格子を作るもので非常に直交性が良く、また十分に滑らかな三次元計算格子を作成することが出来る。二次元計算格子の生成ではパネル法により既に作成し報告されている¹⁾。しかし、特異点法による三次元格子生成では僅かに外国²⁾で報告され、またわが国では文献3が報

告されている。そこで今回試みた格子の形状としてO-O型格子とC-O型格子について述べる。

2. 格子計算法

静電場における等ポテンシャル面とその流線に沿って三次元計算格子を作成すれば直交性の極めて良好な格子が得られる。任意の空間内でLaplaceの方程式がなり立ち、次のように書ける。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

基本的には、O-O型は湧層(Source)のみの解の重畳により格子を生成し、C-O型は湧層と二重湧層(Doublet)の解の重畳により格子を生成することになる。また、境界条件の適用もO-O型ではDirichlet型の境界条件のみでよいが、C-

* 航空宇宙技術研究所

** 富士重工業株式会社

O型では Neumann と Dirichlet 型の混在する混合型境界条件で解くなど一般に C-O型の方がその生成が難しい。以下に、O-O型およびC-O型格子の生成の手順について述べる。

① O-O型計算格子の生成

物体表面に法線ベクトルが外向きになるようなパネルを張り、無限遠方に内向きになるような球形のパネルを張る。そのときの境界条件として次の条件を与える。

模型の内部境界 $\phi = \phi_B$ (2)

外部境界 $\phi = \phi_\infty$ (3)

パネル面に強さ σ の湧点を分布させ、任意の点のポテンシャルを ϕ とする。

$$\phi = \phi_s = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\sigma}{r} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_k \sigma \iint \frac{1}{r} ds = -\sum_k B_{hk} \sigma_k \quad (4)$$

(4)式を離散化して、 σ_k を未知数とする次の連立一次方程式を得る。

$$[B_{hk}] \{\sigma_k\} = \{\phi_B, \phi_\infty\}^T \quad (5)$$

(5)式を解いて σ を求める。この求められた σ_k から任意の空間における速度（電界の強さ）を求めるには次式を用いる。

$$\nabla_* \phi = -\sum_k \nabla_* B_{hk} \sigma_k \quad (6)$$

ここに、 σ_k は湧点の強さ、 B_{hk} は湧点による空力的影響係数である。

② C-O型計算格子

C-O型格子の場合グリーンの公式から次式が

得られる。

$$2\pi\phi - \iint \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) ds = -\iint \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (7)$$

物体表面のパネル化を行い

$$[\partial_{hk} - C_{hk}] \{\phi_k\} = [-B_{hk}] \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_k \quad (8)$$

ここに

$$C_{hk} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) ds \quad (8-1)$$

$$B_{hk} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{1}{r} ds \quad (8-2)$$

$$\nabla \phi = -\frac{1}{2} \left(\sum_k \nabla C_{hk} \phi_k + \sum_k \nabla B_{hk} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_k \right) \quad (9)$$

C-O型の場合は Neumann および Dirichlet の混合型境界条件を用いて解く。即ち、物体、後流渦面および外部境界を Dirichlet 型の境界条件とし、Trefftz面を Neumann型の境界条件を適用する(図1)。

これらの式を解いて物体表面のポテンシャルを求める。物体表面のポテンシャル ϕ が求まると(6),(9)式を用いて空間の速度が計算出来る。以下の手順は同一なのでO-O型の格子生成を例に説明する。

速度（電界の強さ）は次式で表わせる。

$$E = -\nabla \phi \quad (10)$$

$$E \cdot ds = E ds = -d\phi \quad (11)$$

従って、ポテンシャル差 $d\phi$ の E 方向の距離 ds は

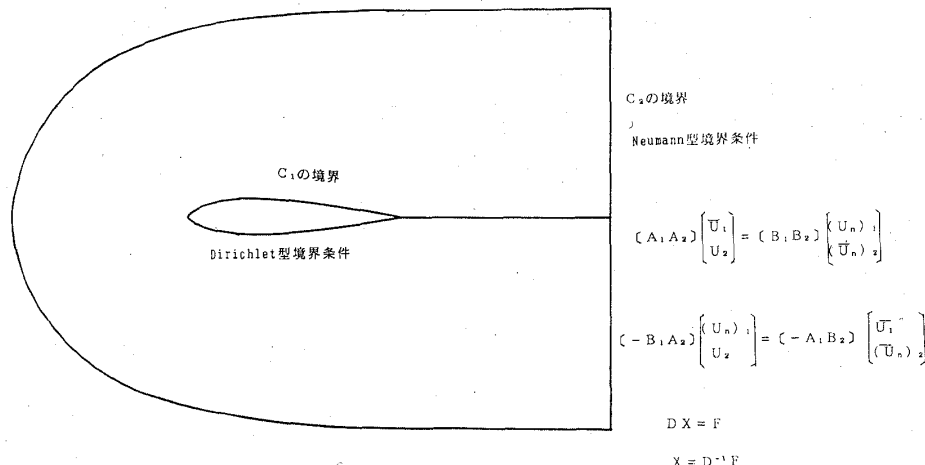


図1 Dirichlet型とNuemann型の境界条件

次式になる。

$$ds = -\frac{d\phi}{E} \quad (12)$$

一方、距離 ds を三方向の成分で書くと

$$dx = \frac{E_x}{E} ds, \quad dy = \frac{E_y}{E} ds, \quad dz = \frac{E_z}{E} ds \quad (13)$$

ここで、 E_x, E_y, E_z はそれぞれ

$$E_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (14)$$

である。(14)式を(13)式に代入する。

$$\frac{dx}{d\phi} = -\frac{E_x}{E^2}, \quad \frac{dy}{d\phi} = -\frac{E_y}{E^2}, \quad \frac{dz}{d\phi} = -\frac{E_z}{E^2} \quad (15)$$

結局、ポテンシャル差 $d\phi$ の面は次式で求められる。

$$dx = -\left(\frac{E_x}{E}\right) \left(\frac{1}{E} d\phi\right), \quad (16)$$

$$dy = -\left(\frac{E_y}{E}\right) \left(\frac{1}{E} d\phi\right), \quad (17)$$

$$dz = -\left(\frac{E_z}{E}\right) \left(\frac{1}{E} d\phi\right) \quad (18)$$

しかし、ある等ポテンシャル面から次の等ポテンシャル面へ(16), (17), (18)式で一度に行くと誤差を生ずるので次のような三次元 Runge-Kutta 法を適用する。今、連立常微分方程式の初期値問題を考える。 x 成分についてのみ記述する。

$$\frac{dx}{d\phi} = f(\phi, x) \quad (19)$$

ここで、関数 $f(\phi, x) = -\frac{E_x}{E^2}$ であり、さらに(16)または(19)式が代入される。(19)式の解 $x = x(\phi)$ を初期条件 $x_0 = x(\phi_0)$ のもとで求めることになる。この計算を x, y, z の三成分について行って次の等ポテンシャル面 ϕ_1 に到達する。ここで、問題になるのは付録1で示すようにキザミ幅 h の値の決め方であるが、通常の場合、 $h = 0.001$ に設定した。また、翼胴結合部で流線が急激に変化する場所では $h = 0.0001$ として計算を行った。

3. 計算結果および考察

一般的な超音速領域の解析用格子の生成では全

空間に格子を張る必要があり、外部境界として球面を用いる。実際には、模型物体表面(内部境界)と無限遠面(外部境界)上にパネルを張る。すなわち、内部境界は物体表面と後流渦面をパネル化して図2のように作成し、模型物体表面のポテンシャルを ϕ_B とし無限遠面上のポテンシャルを ϕ_∞ とする。次に(5)式を用いて全パネルの湧点の強さ q_k を求める。

① ONERA-M6翼模型(C-O型計算格子)

図3にM6翼模型周りの三次元格子を示した。対称面および水平面の格子の様子を示したものである。Trefftz面で垂直に格子が出来ているのが

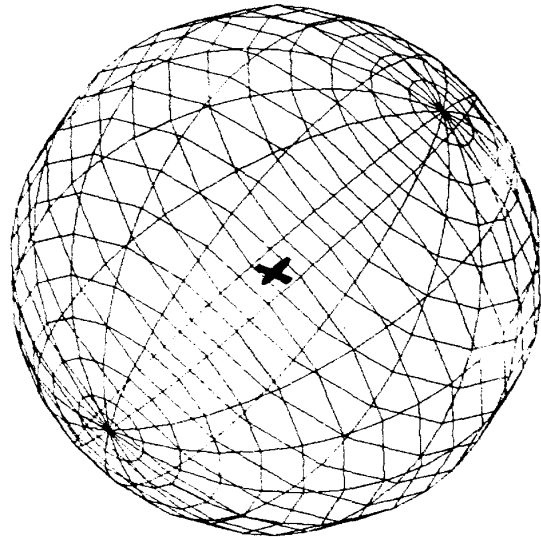


図2 外部境界と内部境界のパネル化

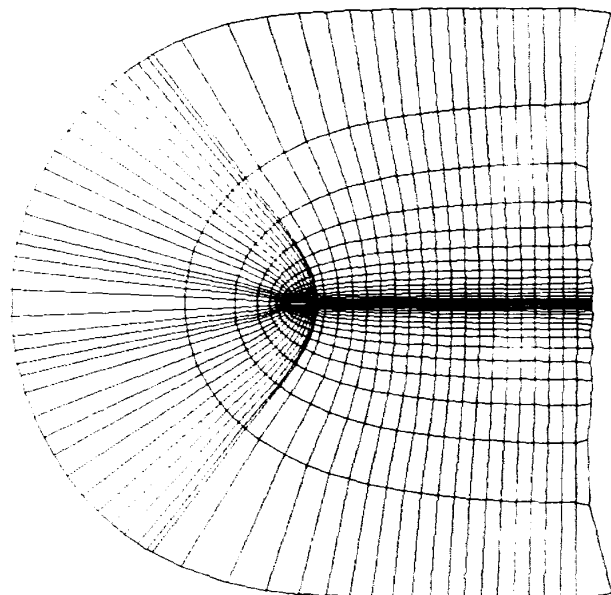


図3 ONERA-M6翼の格子 ($K=1$)

分かる。翼端に近づくほど格子は前方と翼端方向に傾いていく傾向にあり、C-O型格子が理想的に出来上がっている(図4)。

② Forebody 模型 (O-O型計算格子)

図5に Forebody 周りの三次元格子の一断面を示した。半径方向の断面の格子を示したものが物体表面に密に張り、滑らかさも十分に保たれている。前方と後方部にパネルが張ってないため、端の部分で格子の成長が異常に早いが断面の格子は物体表面が密に作成されており全体的に平滑化されており、この格子を用いて超音速流中でSLOR法による計算が出来、その結果を図6に示した。

③ 輸送機形状の翼胴模型 (O-O型計算格子)

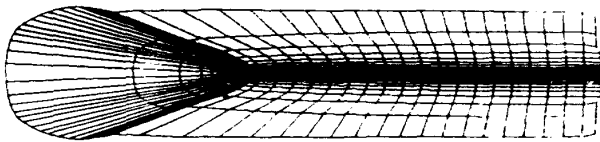


図4 ONERA-M6翼の格子 (K=9)

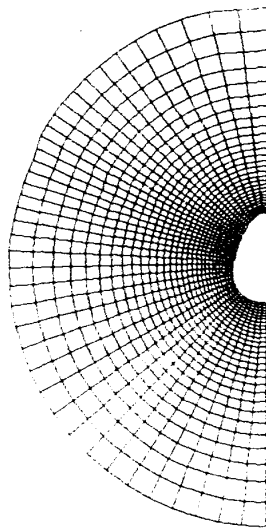


図5 FORE-BODYのI断面

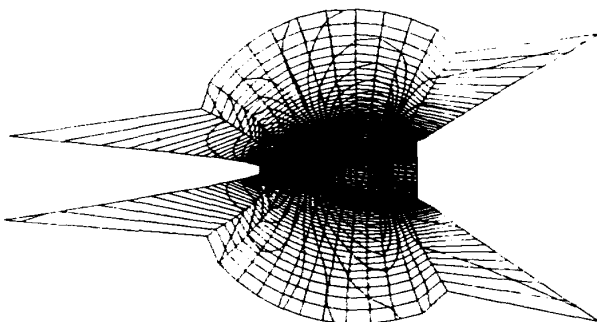


図6 FORE-BODYの格子 (K=7)

図7に示すような翼胴模型について三次元格子を生成した。内部境界にあたる物体のパネルの構成が胴体部と翼および後流部で構成されている。また、外部境界は球体である。図8は胴体部のK=1の面の格子の状態を示した。図9は翼胴干涉の最も厳しい部分の格子の状態を示したものである。一方、見方を変えて翼胴部を含むI断面を図

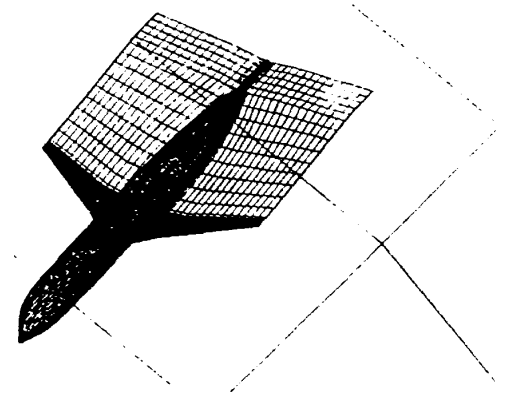


図7 輸送機形状の内部境界パネル

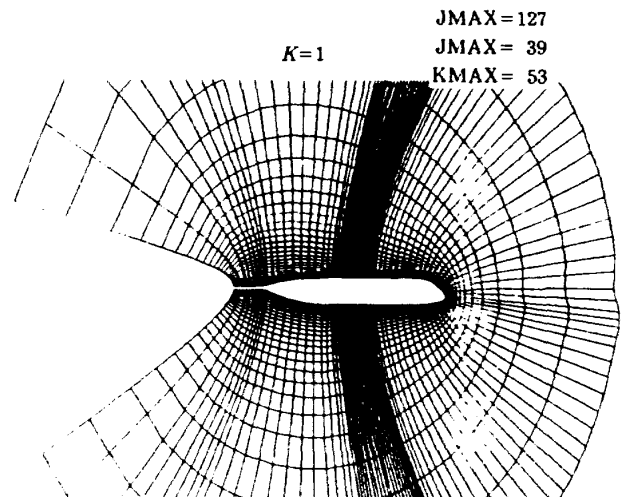


図8 輸送機形状の格子の胴体部 (K=1)

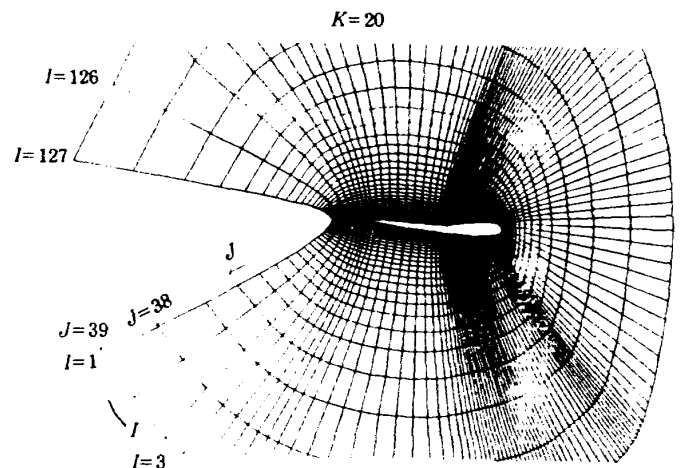


図9 輸送機形状の格子の翼胴結合部 (K=20)

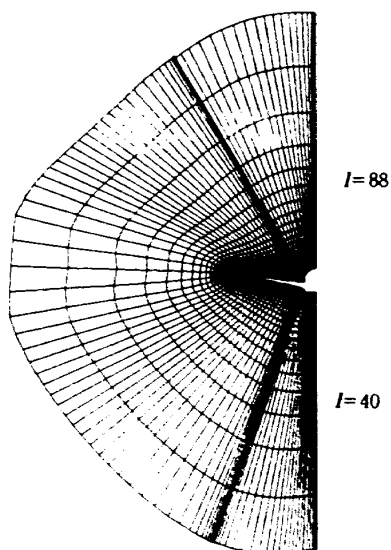


図10 輸送機形状の格子の I 断面

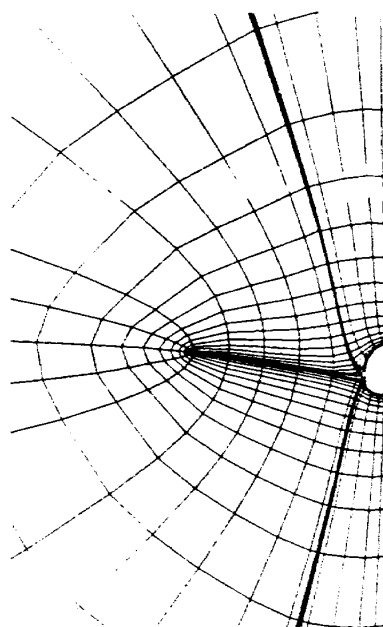
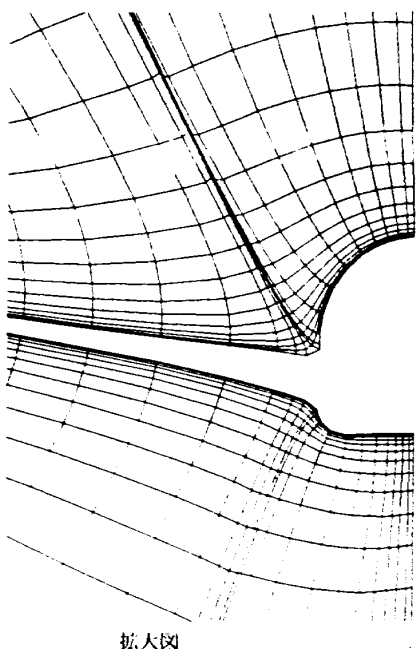


図12 輸送機形状の格子の I 断面



拡大図

図11 輸送機形状の格子の I 断面の拡大図

10に示した。また、その拡大図を図11に示した。一部の凹部を除いて物体表面付近に密に格子が生成されている。図12は後部胴体部と翼の後流部の格子を示した。いずれも直交性の非常に良い格子が生成された。

これらの格子を用いてオイラー方程式を有限体積法によって計算した結果の一例を図13に示した。マッハ数 $M=0.8$ で迎角 $\alpha=3^\circ$ の場合で胴体面上（図13a）と翼面上（図13b）の圧力分布をそれぞれ示した。また、物体表面の等圧力線を示した。図14aは上面を図14bには下面をそれぞれ示した。

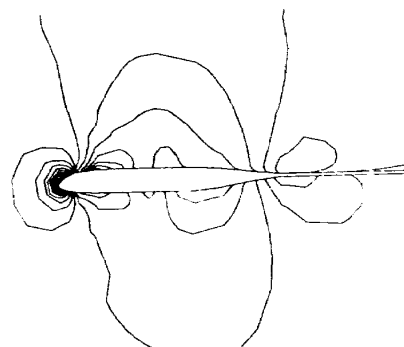


図13a 輸送機形状の胴体上の圧力分布図

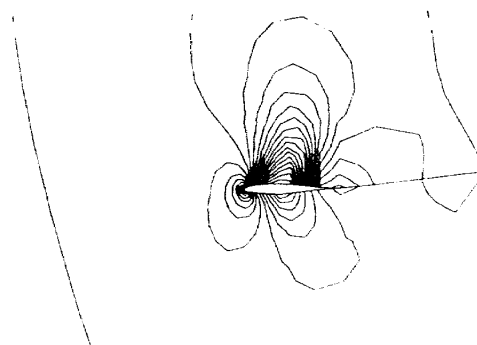


図13b 輸送機形状の翼面上の圧力分布図

格子間隔を粗いため翼面上の衝撃波が鮮明に捕えられていないがその傾向は現われている。さらに、格子間隔を密にして、計算を行う予定である。

複雑な形状で生成される格子は通常の topology は成立ないが差分法では multi-grid として、また有限要素法などの格子として利用できる。

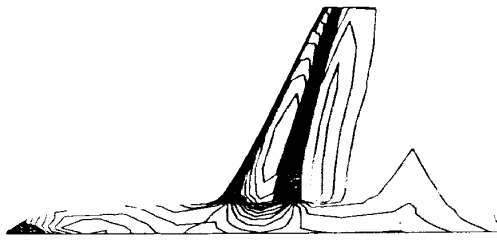


図14a 輸送機形状の翼胴上面の圧力分布図

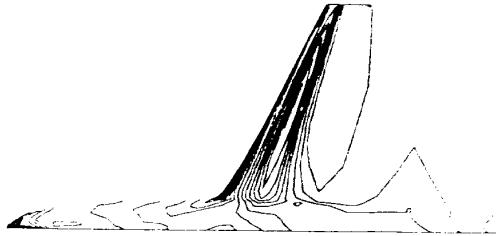


図14b 輸送機形状の翼胴下面の圧力分布図

4. ま と め

上記のように任意の三次元物体の周りの空間に三次元格子を張ることが出来、しかも直交性の良い格子である。しかし、Navier-Stokes の方程式の解法等に実際の計算に用いるにはさらに物体表面に近づく、全体として密に格子を張る必要があるが、その骨格として本格子を用いることが出来る。

なお、本研究は航空宇宙技術研究所と富士重工業株式会社との数値空力計算に関する共同研究の一環として行われたものである。東都工業KKの小久保佐知子氏にはこのソフトの開発を手伝って戴いた。

5. 参 考 文 献

- 1) 重見 仁 ; 航技研報告 TR-860, 1985
- 2) J. S. Sikora and L. R. Miranda AIAA-85-4088
- 3) 高梨 進 ; 航技研報告 TR-1009, 1988

付録1 ルンゲクッタ法 (Runge-Kutta method)

連立常微分方程式の初期値問題とする。yはM次元ベクトル、fはM次元ベクトルを構成する関数としたとき

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の解 $y=y(x)$ を初期条件

$$y(x_0) = y_0$$

のもとで求める。

打ち切り誤差がキザミ幅 h の5乗以下のものを用いる。 y_i まで求められたとすると、 y_{i+1} を

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

と置き、増分 Δy_i は

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

で与えられる。 k_0, k_1, k_2, k_3 は

$$k_0 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_2)$$

で計算される。

付録2

空力的影響係数 $B_{hk}, C_{hk}, F_* B_{hk}, F_* C_{hk}$ は次のように表わされる。

湧点による係数

$$B_{hk} = I_s(1, 1) - I_s(1, -1) - I_s(-1, 1) + I_s(-1, -1) + I_s(-1, -1)$$

$$I_s(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -R \times a_1 \cdot n \frac{1}{|a_1|} \sinh^{-1} \right.$$

$$\times \left(\frac{R \cdot a_1}{|R \times a_1|} \right) + R \times a_2 \cdot \frac{1}{|a_2|} \sinh^{-1}$$

$$\times \left(\frac{R \cdot a_2}{|R \times a_2|} \right) + R \cdot n \tan^{-1}$$

$$\left. \times \left(\frac{R \times a_1 \cdot R \times a_2}{|R| \cdot (R \cdot a_1 \times a_2)} \right) \right\}$$

二重湧点による係数

$$C_{hk} = I_D(1, 1) - I_D(1, -1) - I_D(-1, 1) \\ + I_D(-1, -1)$$

$$I_D(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{R \times a_1 \cdot R \times a_2}{|R| \cdot (R \cdot a_1 \times a_2)} \right\}$$

湧点の微分形の係数

$$F_* B_{hk} = I_s(1, 1) - I_s(1, -1) - I_s(-1, 1) \\ + I_s(-1, -1)$$

$$I_s(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -(a_2 \times n) \frac{1}{|a_2|} \sinh^{-1} \right. \\ \times \left(\frac{R \cdot a_2}{|R \times a_2|} \right) + (a_1 \times n) \frac{1}{|a_1|} \sinh^{-1} \\ \left. \times \left(\frac{R \cdot a_1}{|R \times a_1|} \right) - n \tan^{-1} \left(\frac{R \times a_1 \cdot R \times a_2}{|R| |R \cdot a_1 \times a_2|} \right) \right\}$$

二重湧点の微分形の係数

$$F_* C_{hk} = I_D(1, 1) - I_D(1, -1) - I_D(-1, 1) \\ + I_D(-1, -1)$$

$$I_D(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{R \cdot a_2 R \times a_2}{|R| |R \times a_2|^2} \right. \\ \left. + \frac{-R \cdot a_1 R \times a_1}{|R| |R \times a_1|^2} \right\}$$

ただし,

$$R(\xi, \eta) = P - P_h = P_0 + \xi P_1 + \eta P_2 + \xi \eta P_3 - P_h$$

$$a_1(\xi, \eta) = \frac{\partial R}{\partial \xi} = P_1 + \eta P_3$$

$$a_2(\xi, \eta) = \frac{\partial R}{\partial \eta} = P_2 + \xi P_3$$

$$n(\xi, \eta) = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|}$$

