

CFDにおけるスプライン関数の利用

児 玉 良 明*

Use of Spline Functions in CFD

by

Yoshiaki KODAMA
Ship Research Institute

ABSTRACT

Spline functions are often used for interpolating discrete functions. Here the use of spline functions in various stages of CFD, i.e., grid generation, flow solver, and postprocessing is described.

The simplest of the spline functions are cubic splines. With addition of tension, tension splines are defined. Addition of convection produces convection splines.

Parametric bi-cubic splines are used to define body surface geometry. Then the grid points on the surface can be shifted arbitrarily along the surface to produce optimum body-surface grid.

A scalar linear convection equation is computed using cubic splines. There the energy as well as momentum is conserved.

In the postprocessing of the computed flow, it is sometimes necessary to interpolate values at arbitrary spatial locations. There the parametric multi-direction splines are used for interpolation.

Multi-direction splines can also be used for streamline-tracing. Coordinate values and velocity vectors are interpolated, and a streamline is traced semi-analytically in the spline space.

1. はじめに

スプライン関数は、離散的な分布を内挿する関数としてよく用いられる。ここでは CFD におけるスプライン関数の利用法を、格子生成・本計算・後処理の各段階において述べる。

2. スプライン関数の基礎

スプライン関数のなかで最も簡単なのは cubic-

spline である。図 1 に示されるように区間 (x_i, x_{i+1}) において、関数 $f(x)$ は次式で表される¹⁾。

$$f''(x) = f_i'' \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.1)$$

この式を 2 回積分すると、3 次関数である cubic spline が得られる。

もうひとつのよく用いられる関数は tension spline である。 σ^2 を tension parameter として

$$f''(x) - \sigma^2 f(x) = [f_i'' - \sigma^2 f_i] \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$$

* 運輸省船舶技術研究所

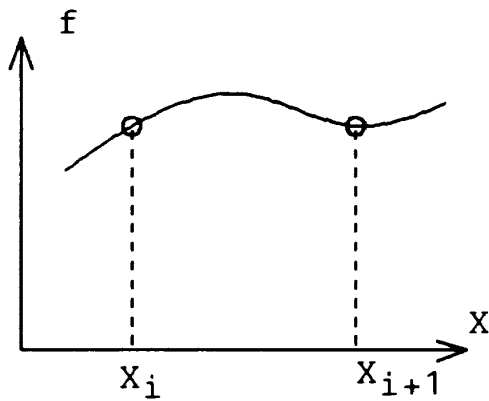


図1 離散点を通るスプライン

$$+ [f_{i+1}'' - \sigma^2 f_{i+1}'] \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.2)$$

この式を2回積分すると、linearな関数とsinh関数の和からなる tension spline が得られる。上式で σ^2 のかかった項は sink の働きをもつ。流体力学者の理解を助けるために、sink 項を付加した線形 Burgers 方程式を示す。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -af \quad (2.3)$$

a, μ は正の係数である。上式を再配置して

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} - \frac{a}{\mu} f = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

上式と(2.2)式の右辺同士を比較されたい。(2.2)式で σ^2 を大きくして sink 項を卓越させると、linearな関数に近づく。また逆に、cubic spline は拡散項が卓越した場合とみることができる。tension spline は exponential spline と呼ばれることもある²⁾。

Burgers 方程式との類推から、また別のスプライン関数を定義することができる。移流項に注目して

$$f''(x) - cf'(x) = [f_i'' - cf_i'] \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + [f_{i+1}'' - cf_{i+1}'] \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.5)$$

この式を2回積分すると、2次関数と従数関数の和が得られる。この関数を仮に convection spline と呼ぶことにする。Patankar³⁾は移流拡散方程式の局所的な解析解を用いる“exponential scheme”を提案しているが、convection spline はこれを含

む。

上記3種のスプライン関数をより便利な形で記述する。区間 (x_i, x_{i+1}) において

$$f_i(\xi) = f_i p_0(\xi) + f_{i+1} q_0(\xi) + d_i [f_i' p_1(\xi) + f_{i+1}' q_1(\xi)] \quad (2.6)$$

ただし

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi = \frac{x - x_i}{d_i}, \quad d_i = x_{i+1} - x_i$$

$p_0(\xi), q_0(\xi), p_1(\xi), q_1(\xi)$ は以下の境界条件を満たす基底関数である。

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1 & p_0(1) &= 0 & p_{0\xi}(0) &= 0 & p_{0\xi}(1) &= 0 \\ q_0(0) &= 0 & q_0(1) &= 1 & q_{0\xi}(0) &= 0 & q_{0\xi}(1) &= 0 \\ p_1(0) &= 0 & p_1(1) &= 0 & p_{1\xi}(0) &= 1 & p_{1\xi}(1) &= 0 \\ q_1(0) &= 0 & q_1(1) &= 0 & q_{1\xi}(0) &= 0 & q_{1\xi}(1) &= 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

cubic spline では

$$\begin{cases} p_0(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ q_0(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ p_1(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ q_1(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

tension spline では

$$\begin{cases} p_0(\xi) = 1 - q_0(\xi) \\ q_0(\xi) = \xi + \frac{\alpha(\xi) - \beta(\xi)}{A + B} \\ p_1(\xi) = -\frac{A\alpha(\xi) + B\beta(\xi)}{A^2 - B^2} \\ q_1(\xi) = \frac{B\alpha(\xi) + A\beta(\xi)}{A^2 - B^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\alpha(\xi) = \beta(1 - \xi),$$

$$\beta(\xi) = \xi - \frac{\sinh(\sigma d_i \xi)}{\sinh(\sigma d_i)} \quad (2.10)$$

$$A = 1 - \sigma d_i \coth(\sigma d_i), \quad B = 1 - \frac{\sigma d_i}{\sinh(\sigma d_i)}$$

となりあった区間の接点 x_i では関数の値、1階微分、2階微分の連続性を要求する。(2.6)式の表示を用いると、値と1階微分の連続性は trivial である。点 x_i において2階微分の連続性を要求すると、cubic spline では

$$d_i f_{i-1}' + 2(d_i + d_{i+1}) f_i' + d_{i+1} f_{i+1}'$$

$$= 3 \Delta_i e_{i-1} + 3 \Delta_{i-1} e_i$$

ただし

$$e_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{J_i} \quad (2.11)$$

適当な境界条件のもとに上式を3重対角 solver を用いて解けば, spline が定まる。

3. 格子生成

3次元物体まわりの格子生成を行う場合, 物体表面上の格子の出来具合が, 全体の格子の出来具合に大きな影響をもつ。良質な表面格子を生成するためには, 格子点を物体表面上に自由に配置できることが必要であり, そのためには通常はオフセットとして離散的は点位置でのみ与えられる物体形状を全面にわたって数学的に定義する必要がある。parametric な bi-cubic spline はその目的に適している。点の位置ベクトルを $X_{i,j}$, 2方向の番号を i, j , それらの方向のスプライン座標を ξ, η とすると, 四角形セグメント (i, j) 上のスプライン面は(2.6)式の拡張である次式で定義できる。

$$\begin{aligned} X_{i,j}(\xi, \eta) = & Y_{i,j}(\xi) p_0(\eta) + Y_{i,j-1}(\xi) q_0(\eta) \\ & + p_0(\xi) \Delta_{i,j}^{\eta} [\dot{X}_{i,j}^{\eta} p_1(\eta) + \dot{X}_{i,j+1}^{\eta} q_1(\eta)] \\ & + q_0(\xi) \Delta_{i+1,j}^{\eta} [\dot{X}_{i+1,j}^{\eta} p_1(\eta) + \dot{X}_{i+1,j+1}^{\eta} q_1(\eta)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1)$$

ただし

$$\Delta_{i,j}^{\xi} \equiv |X_{i+1,j} - X_{i,j}|, \quad \Delta_{i,j}^{\eta} \equiv |X_{i,j+1} - X_{i,j}|$$

$$\begin{aligned} Y_{i,j}(\xi) = & X_{i,j} p_0(\xi) + X_{i+1,j} q_0(\xi) \\ & + \Delta_{i,j}^{\xi} \{ \dot{X}_{i,j}^{\xi} p_1(\xi) + \dot{X}_{i+1,j}^{\xi} q_1(\xi) \} \end{aligned}$$

図2はプロペラ翼面形状を与えられたオフセットに基づいて2方向スプラインで定義し, 初期格子を翼面上で変形・移動させた例である。変形は幾何学的方法により, 翼前後縁と翼端へのそれぞれ異なった基準での clustering と直交性, 平滑化などの要請に従って行った。格子点は各移動の後スプライン面に垂直投影された。格子点は4隅の点以外はすべて, 縁上の点も含めて, 移動している。

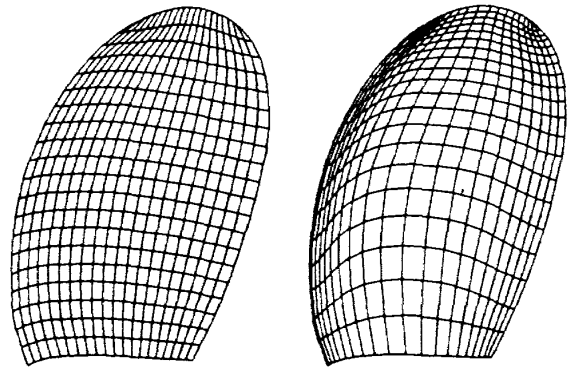


図2 プロペラ翼面上格子

4. 本計算

線形移流方程式に cubic spline を用いた計算例を示す。方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

空間刻み Δx は一定(一様格子)とし, 時間刻みを Δt とする。空間方向は cubic spline を, 時間方向は linear な関数形を仮定して, 上式を区間 $(x_i \leq x \leq x_{i+1}, t^n \leq t \leq t^{n+1})$ で解析的に積分すると

$$\begin{aligned} (1-\lambda) u_i^{n+1} + \frac{1}{6} u_{\xi_i}^{n+1} + (1+\lambda) u_{i+1}^{n+1} - \frac{1}{6} u_{\xi_{i+1}}^{n+1} \\ = (1+\lambda) u_i^n + \frac{1}{6} u_{\xi_i}^n + (1-\lambda) u_{i+1}^n \\ - \frac{1}{6} u_{\xi_{i+1}}^n \end{aligned}$$

$$\text{where } \lambda = \frac{c \Delta t}{\Delta x} : \text{Courant number}$$

$$(4.2)$$

この式と点 x_i における2階微分が連続の条件(2.11)式を連立させて解く。1点につき2つの未知数があるので, 1次元問題でもブロック対角行列を解かなければならない。多次元問題での緩和法の適用を念頭において, この1次元問題を緩和法で解くことを考える。上記の式の組合せで周期境界条件のもとに係数マトリックスの固有値を調べると, 対流項の係数 $c < 0$ のときすべて正となり, 緩和法で iterative に解くと収束する。逆に, $c > 0$ のときは発散する。組合せを変えて, (4.2)式と $x = x_{i+1}$ での2階微分の連続性の式とを組み合わせると, 逆に $c > 0$ のときに固有値がすべて正となり,

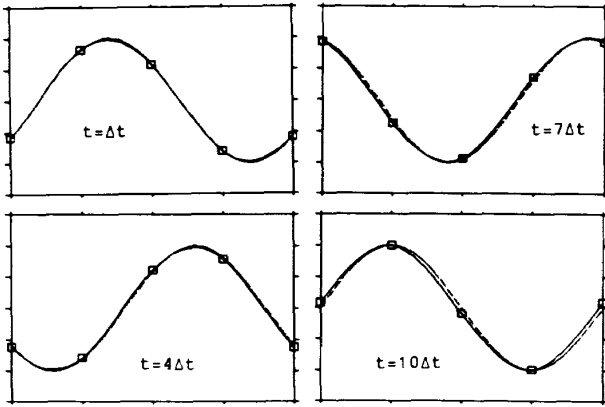


図3 (4.1)式の cubic spline による計算 $\Delta t=0.1$

緩和法は収束する。このように、条件式の組合せによって固有値が変化する現象は上流差分の考え方に対応していると思われる。

図3に計算例を示す。長さ1の正弦波を初期値とし、速度1で右に伝播する。破線は解析解を示す。 $\Delta t=0.1$ であるので $t=10\Delta t$ で1波長分移動するが、実際はやや位相誤差がある。ピークが代表点の間にある場合でもスプライン曲線が解析解をよく近似している点は興味深い。運動量は当然ながら保存するが、エネルギーも保存し、しかもその積分値の精度が高い(図の場合のエネルギー積分値は解析値の97%であった)。ただし非一様格子の場合には保存しなかった。また、 Δt を任意に大きくとっても安定に計算できる。 Δt が大ききときは、波形が各時間ステップ毎に逆転する。この現象は(4.2)式で λ を大きくとった形を見れば理解できる。

5. 後処理

計算結果の後処理で、格子点だけでなく空間内の任意の点における値が必要となることが多い。船のまわりの流れの計算では、船尾で作動するプロペラに流入する流場情報が重要であるが、プロペラ面での流速分布を求めるためには内挿を行う必要がある。図4はある船の船尾近傍格子とプロペラ面の位置関係を示す。格子点での分布をもとに parametric な3方向の cubic spline を用いて内挿して得られたプロペラ面内速度分布を図5に示す。なお、格子生成には幾何学的方法を、NS solver には擬似圧縮を入れた IAF 法を用いた⁴⁾。

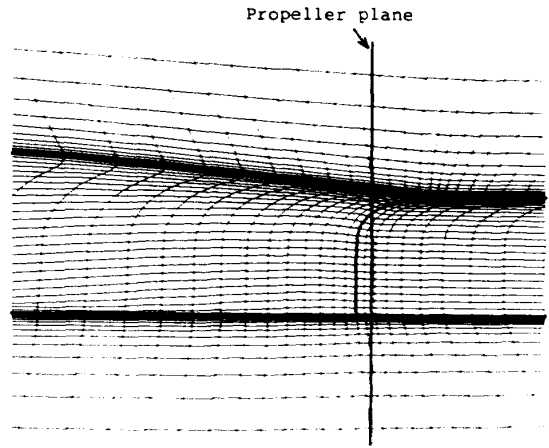


図4 船尾近傍格子とプロペラ面

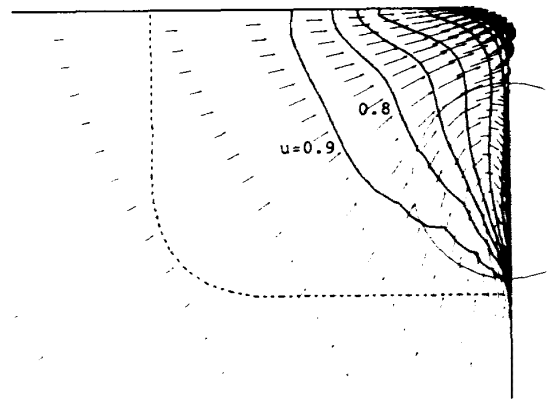


図5 内挿して得られたプロペラ面内速度分布

多方向スプラインを用いて速度場を内挿して計算する流線追跡法を紹介する⁵⁾。簡単のため2次元で説明する。2方向スプラインの式を、物理空間 (x, y) とスプライン空間 (ξ, η) の座標変換とみることができる。

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (5.1)$$

このときスプライン空間での ξ, η の流線に沿った時間的増分は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \xi_x \frac{dx}{dt} + \xi_y \frac{dy}{dt} = J(y_\eta u - x_\eta v) \\ \frac{d\eta}{dt} = \eta_x \frac{dx}{dt} + \eta_y \frac{dy}{dt} = J(-y_\xi u + x_\xi v) \end{cases} \quad (5.2)$$

上式最右辺は ξ, η の多項式であり、 ξ, η の値を代入するだけで求まる。有限増分 Δt 毎の ξ, η の増分をもとめてスプライン空間で流線追跡を行い、対応する物理空間上の点 (x, y) をこれも ξ, η の代入で求める。図6に2次元円柱まわりのレイノルズ

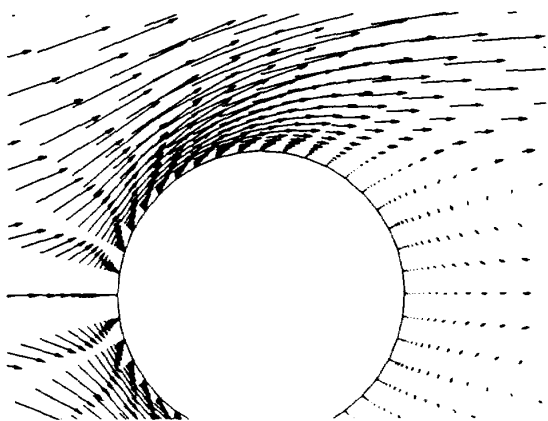
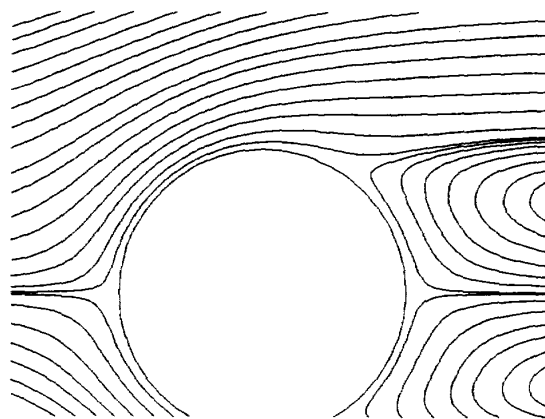
図6 2次元円柱まわりの速度ベクトル($Re=40$)

図7 2方向スプラインを用いた流線追跡

数 $Re=40$ の流れの速度ベクトルを示す。この速度場をもとに上に述べた方法で計算した流線を図7に示す。問題点として、NS solver が保存形であってもスプライン関数との consistency が無いため、例えば流線が物体表面と交差することが起こり得る。これをなくすためには、NS solver 自身にスプライン関数を用いなければならない。今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) J.H. Ferziger, "Numerical Methods for Engineering Application", John Wiley & Sons, 1981.
- 2) B.J. McCartin, "Application of Exponential Spline in Computational Fluid Dynamics", AIAA J. Vol. 21 No. 8, August 1983.
- 3) S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGrawhill, 1980.
- 4) Y. Kodama, "Grid Generation and Flow Computation for Practical Ship Hull Forms and Propellers Using the Geometrical Method and the IAF Scheme", 5th Int'l Symp. on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, Sept. 1989.
- 5) 児玉「CFDにおけるCGの利用」, 関西船舶流体力学研究会 (KFR) 第2回シンポジウム, 1989年6月.

