49

有限要素法による流体解析における高精度化と高速化に関する一考察

高　梨　和　光*

Study of Accuracy and Performance of Modified Euler Scheme with Finite Element Method on Flow Problem

by

Wako TAKANASHI

Design Department of Civil Engineering, Shimizu Corporation

ABSTRACT

This paper presents the formulation of new upwind scheme with finite element method on flow problem. High accuracy of the modified Euler scheme is generated streamline upwind and artificial viscosity depend on incremental time step in the second order of conventional term.

Lamped mass matrix not to require great amount of computing time and core memory is employed. This formulation could be applied to compressible and incompressible viscous flow problems.

1. はじめに

現在，コンピュータを用いた設計が製造技術CAD/CAM/CAEによって製品開発が行われている。これらのCAD/CAM/CAEの中で重要な役割を受けもつのがシミュレーションである。シミュレーションは複雑な形状を有した場での現象を再現するものであるが，このとき有限要素法が多く用いられる。この有限要素法は流体力学，熱伝導，拡散等に応用されてきている。有限要素法で流体解析を行う場合，要素分割が粗いと解析結果に非現実的な振動が現われる。この振動を取り除くために，上流法や人工粘性法が提案された。それらの方法の中に，SU/PG法[1,2]，オイラーの時間積分を高精度化する方法[3,4]，要素分割と時間刻みを合わせた上流法[5]が提案され有効性が示されてきた。しかしながら，SU/PG法を非定常問題に適用した場合には人工粘性が時間刻みに依存せず，オイラーの時間積分法を高精度化する方法では要素分割に人工粘性が関係してこないという不合理を有していた。そこで，要素分割と時間刻みに依在した上流法が考えられたが，これはただ単にSU/PG法とオイラーの時間積分を高精度化した方法を組み合わせただけで明確な根拠を持っていなかった。本研究では，移流項について2次精度まで考慮することによって時間刻みと要素分割の双方に依存した人工粘性が得られることを明らかにした。さらに，質量行列を集中化した陽的オイラー法を採用することによって，スキームの高速化が得られることを示した。

---

* 清水建設株式会社

2. 流線方向に2次精度まで考慮した移流項

移流項を2次まで考慮すると，

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial t}\Delta t+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Delta x\,\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\Delta t^2+\cdots \tag{1}$$

となる。ここで，

$$\Delta x=u\,\Delta\tau,\ \Delta y=v\,\Delta\tau \tag{2}$$

を式(1)に代入して，2次項のみを書くと，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}uu\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}uv\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\Delta t+\cdots \tag{3}$$

となる。このとき，$\Delta\tau$ は解析格子 Δx，Δy 内を端から端まで水粒子が横断するまでの時間を表わすことになる。

一方，特性量 F が流速 u，v や圧力 P であれば，次に示す連続方程式に制約されていなければならない。

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4}$$

ここで，β は体積弾性率である。もしも，流体が非圧縮なものであれば β の値は非常に大きくなり，式(4)は次のように退化し，よく知られた連続の方程式，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5}$$

となる。これは次のように表わすこともできる。

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ (\beta\to\infty) \tag{6}$$

式(6)を初期時刻 T_0 から T_1 まで積分すると，

$$P=\beta\int_{T_0}^{T_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dt \tag{7}$$

となる。いま，微小時間 $\Delta T=T_1-T_0$ を考えると式(7)は，

$$P=\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta T \tag{8}$$

となる。式(8)を β で割ると式(9)が得られる。

$$\frac{P}{\beta}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta T \tag{9}$$

このとき，ΔT は微小時間間隔であるものの有限時間であり，圧力 p も有限確定値を持つ。式(9)は体積圧縮率 β が非常に大きな非圧縮性流体においても成り立たなければならない。いま，考えている流体の体積率 β が大きくなった場合，流体が式(9)を満足するには発散 div $\boldsymbol{u}$ を小さくしなければならない。これを式で表わすと，

$$\beta\to 0\ \text{ならば}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\to 0 \tag{10}$$

となり，極限において式(9)は式(5)に退化する。したがって，非圧縮性流体においても，式(4)が退化した形で成立していることがわかる。

次に，運動方程式を考える。よく知られているように運動方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=X+\tau_{xx}+\tau_{xy} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=Y+\tau_{yx}+\tau_{yy} \tag{12}$$

である。このとき，せん断力 τ_{xx}，τ_{xy}，τ_{yx}，τ_{yy} は考えているコントロールボリューム V の表面を介して運動量の交換を行うことによって，その面に相対して存在する流体に作用をおよぼしている。このために，十分に小さな面を有するコントロールボリューム V を考えることによって，せん断力 τ_{xx}，τ_{xy}，τ_{yx}，τ_{yy} の変化を十分小さくすることができる。このとき，コントロールボリューム V は十分に小さいため，水粒子の変化は主に局所項によってなされ，移流項は十分無視することができる。このとき，コントロールボリューム V の空間ごとの差異は次のように表わすことができる。

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0 \tag{13}$$

$$\frac{1}{\Delta y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \tag{14}$$

ここで，Δx と Δy はコントロールボリューム V の x 方向の大きさと y 方向の大きさを表わす。したがって ∂x，∂y のような微係数とは異なることに注意したい。次に，コントロールボリューム V の大

きさを変化させた時に，せん断力τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yy}の変化がわずかである場合

$$\frac{1}{\Delta x}\tau_{xx}\approx 0,\ \frac{1}{\Delta x}\tau_{xy}\approx 0,\ \frac{1}{\Delta y}\tau_{yx}\approx 0,\ \frac{1}{\Delta y}\tau_{yy}\approx 0 \tag{15}$$

には，そのコントロールVを小さくしていくさいに多少の変化が生じても，十分遠く離れた所におけるコントロールボリュームVにおよぼす影響は十分小さいので式(13)と式(14)が任意の十分小さなコントロールボリュームVとして成立しているものと考えられる。そこで，ΔxとΔyを十分に小さくすると式(13)と式(14)は次のように表わすことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \tag{17}$$

したがって，式(4)，式(16)と式(17)より，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \tag{18}$$

が得られる。ここで，cは音速である。さらに，式(18)を式(3)に代入すると，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}uu\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}uv\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\cdots+\frac{1}{2}c^2\Delta t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \tag{19}$$

が得られる。これは，2次項は流速u，vのテンソル積に依存した拡散項と時間刻みΔtに依存した拡散項の2つの部分に分けられることができる。このとき，テンソル積に依存した拡散項は，

$$\begin{bmatrix} U, & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta, \cos\theta \\ -\cos\theta, \sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} uu, & uv \\ vu, & vv \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta, & \sin\theta \end{bmatrix} \tag{20}$$

のように座標変換によって流線方向のみの項だけにすることができる。したがって，式(19)は式(20)を考慮することによって，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}U^2\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}c^2\Delta t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \tag{21}$$

のようにすることができる。これは，2次項が流れの方向に対してのみ変化を与え，それ以外には影響を与えないことを意味している。

次に，流体が定常状態であることを考える。このとき，特性量Fの時間変化はなく，

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{22}$$

となる。したがって，式(22)を式(3)に代入すると，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}uu\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}uv\,\Delta\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\cdots \tag{23}$$

となる。これより，2次項の時間刻みに依存した部分がなくなることがわかる。

さらに，流体の変化が振動している場合のように移流の影響が小さいときは，

$$u\ll c,\ v\ll c \tag{24}$$

となるので，式(3)に式(24)を考慮すると，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\Delta t=\frac{1}{2}c^2\Delta t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \tag{25}$$

となる。これより，2次項から流速のテンソル積の部分がなくなることがわかる。

次に，水粒子が解析格子を横断する時間$\Delta\tau$を無次元化するために，無次元変数ξを導入する。

$$\Delta\tau=\xi\frac{h}{|U|} \tag{27}$$

ここで，h要素幅，$|U|$は速度ベクトルの大きさを表わす。式(3)に式(19)を代入すると，

$$\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2}=\frac{1}{2}uu\xi\frac{h}{|U|}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}uv\xi\frac{h}{|U|}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\cdots+\frac{1}{2}c^2\Delta t\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \tag{27}$$

となる。

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}=\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\Delta^2 F}{\Delta t^2} \tag{28}$$

より，式(27)を式(1)に人工粘性として加えることによって，オイラースキームに2次精度まで考慮することができる。

3. 陽的オイラースキームと集中化行列による高速化

式(28)を用いて，有限要素方程式をマトリックスで書くと，

$$[M]\{\phi\},t+[K]\{\phi\}+[X]\{\phi\}=\{0\} \tag{29}$$

となる。ここで，$[M]$は質量行列，$[K]$は剛性行列，$[X]$は人工粘性行列である。このとき，$[M]$行列を集中化して対角化すると，

$$[\bar{M}]\{\phi\},t+[K]\{\phi\}+[X]\{\phi\}=\{0\} \tag{30}$$

となる。このとき，

$$\{\phi\},t=\frac{\{\phi\}^{n+1}-\{\phi\}^{n}}{\Delta t} \tag{31}$$

とし，式(9)に代入して整理すると，

$$\{\phi\}^{n+1}=\{\phi\}^{n}-\Delta t[\bar{M}]^{-1}\{[K]+[X]\}\{\phi\}^{n} \tag{32}$$

となる。このとき，$[\bar{M}]$行列は対角行列となっているので，逆行列を求めなくても陽に解を求めることができる。

4. おわりに

本研究によって，移流項について２次精度まで考慮することによって時間刻みと要素分割に依存た人工粘性が得られることを示し，質量行列を集中化した陽的オイラー法によって高速化が得られることを明らかにした。

謝　　辞

本研究においてNKK (株) 水上昭氏より適切な助言を得た。ここに記して感謝の意を表わす。

参考文献

1) A. Mizukami: An Inplementation of the Stramline-Upwind/Petron-Galerkin Method for Linear Triangular Elements, Coputer Method in Applied Mechanics and Engineering 49, pp. 357-364, 1985.

2) A. Mizukami: Streamline-Upwind/Petron-Galerkin Formulation for Triangular Elements, 4th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, pp. 140-151, 1985.

3) 加藤千幸，池川昌弘：有限要素法による非圧縮性粘性流体の高精度解析，第１回計算力学シンポジウム，pp.111～118, 1987.

4) 加藤千幸，池川昌弘：有限要素法による移流拡散方程式の高精度解析，第７回流体力学における数値解析法シンポジウム，pp. 125～132, 1986.

5) 中村　努，矢川元基，奥田洋司：上流化法による移流拡散問題の有限要素解析の高精度に関する一手法，日本機械学会年会学術講演会，pp.45～46, 1988.