

グローバルな保存性をもった 非圧縮流有限体積上流差分スキーム

児玉良明*

A Finite Volume, Upwind Scheme with Global Conservation for Incompressible Flows

by

Yoshiaki KODAMA
Ship Research Institute

ABSTRACT

A finite-volume, conservative upwind scheme has been developed, based on the flux-difference splitting method. Pseudo-compressibility is introduced in the continuity equation. The cell-centered layout is adopted, i.e., flow variable nodes are placed at the center of each grid cell. With this combination of the scheme and the node-cell layout the global conservation property has been derived in a straightforward manner.

The scheme was applied to two types of flows. First the flow past a circular cylinder was computed at the Reynolds number $R_e = 40$. The integrated momentum and mass fluxes at inner and outer boundaries agreed up to more than 11 significant figures. Thus the global conservation property was confirmed.

The flow past a flat plate at zero angle of attack was computed. The integrated drag of the flat plate was found to be very insensitive to the grid resolution.

1. はじめに

工学において物体まわりの流れを計算する大きな目的の一つは、抗力や揚力などマクロな力を求めることである。船舶の設計では、船体抵抗の推定は、スピードの guarantee の都合上、1%の精度が要求される。現在はこの推定を、模型船の計測値を基に経験則を加味して行っているが、これをCFDで置き換えることを考えると、容易なことではない。

本報告のタイトルである“グローバルな保存性”とは、物体に働く抗力や揚力あるいは流量の flux が積分路によらず一定であることを指す。従来の

計算スキームでは、保存形を用いていても境界近傍等で保存性が壊れ、結果として、例えば物体表面積分で得られた力と外側境界積分でのそれとが異なる値をもつことが多い。一方、グローバルな保存性が成り立つ世界では、このあいまいさが無いため、力の実験値との一致度等の議論が安心して行える。本報告では、グローバルな保存性をもった非圧縮流の計算スキームを紹介する。

2. 計算スキーム

計算スキームは、cell-centered なレイアウトをもつ高次精度の有限体積 upwind flux-difference splitting 法である。連続の式に擬似圧縮性を入れている。

Cell-centered な配置の長所を述べる。従来は、

* 運輸省船舶技術研究所

図1(a)の右側に示すように、格子点に流場の諸量を置き、コントロールボリュームはその点を中心に±1/2の範囲に設けていた。この配置では、境界近傍で1/2の隙間ができ、グローバルな保存性が満たされない。Cell-centered法では(図1(a)の左側)、格子セルがコントロールボリュームとして用いられ、その中心に流場の諸量が置かれ、グローバルな保存性が自動的に満たされる。図1(b)に示されるH-gridで表された物体の前縁の場合には、従来のレイアウトでは、保存性が壊れること以外に、上下面で圧力の2値性が生じることがあるが、cell-centered法では、グローバルな保存性が満たされると同時に2値性の問題を回避できる。図1(c)に示すように写像の特異点が存在する場合にも、グローバルな保存性が成立する。もちろん、従来の配置でも、境界近傍でのコントロールボリュームの形を工夫すれば、グローバルな保存性を得ることは可能である¹⁾が、定式化とコーディングの手間がかなり増えると思われる。

定式化の概略を述べる。一般座標への変換を経由した定式化はref. 2)に詳しく示されているが、ここでは、格子が時間的に変化しないとの仮定の下に、直接に有限体積法に基づいた導出を述べる。支配方程式は

$$q_t + (F + F_v)_x + (G + G_v)_y = 0 \quad (1)$$

ただし

$$q = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u^2 + p \\ uv \\ \beta u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} uv \\ v^2 + p \\ \beta v \end{bmatrix},$$

$$F_v = -\frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 2u_x \\ u_y + v_x \\ 0 \end{bmatrix}, G_v = -\frac{1}{Re} \begin{bmatrix} u_y + v_x \\ 2v_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

β は擬似圧縮性のパラメータで、正である。上式を図2に示される1つの格子セル領域で有限体積積分を行う。すなわち積分範囲は次式で示される。

$$[\text{積分領域}] = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \int_{i-1/2}^{i+1/2} dx dy$$

すると、Gaussの積分定理により、(1)式は

$$\iint q_t dx dy + \oint (F + F_v) dy - \oint (G + G_v) dx = 0 \quad (2)$$

上式第1項は、 $S_{i,j}$ を格子セルの面積として、 q_t がセル内で一定と近似して、次式で表される。

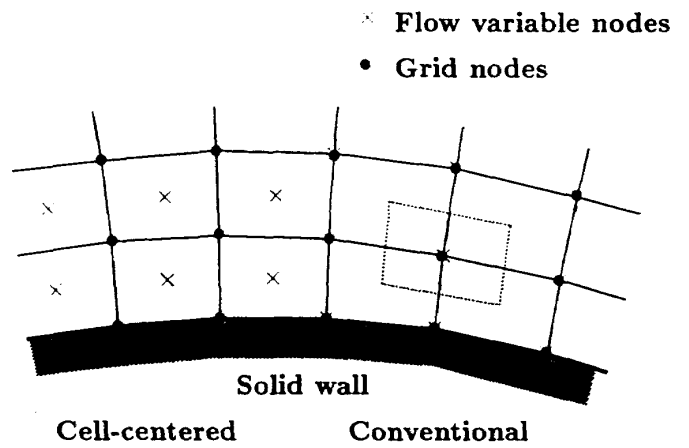


図1(a) コントロールボリューム

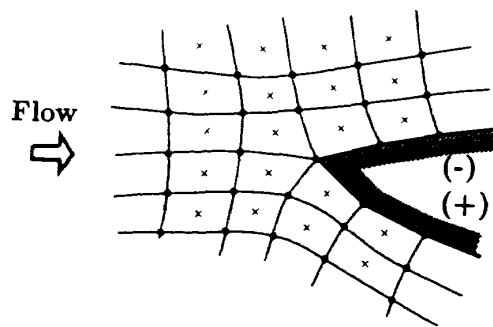


図1(b) H-gridの接続点

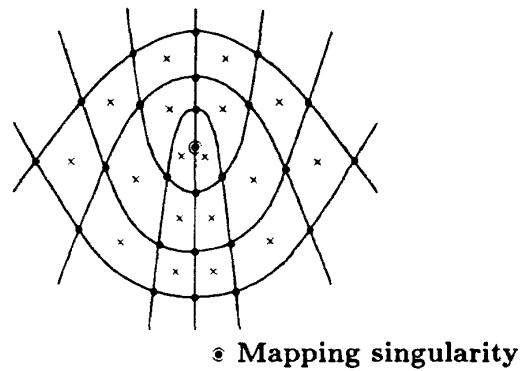


図1(c) 写像の特異点

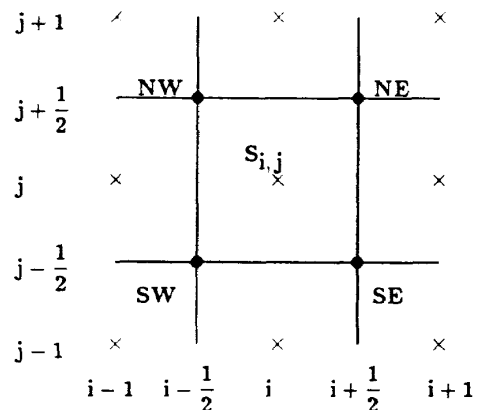


図2 格子セルとコントロールボリューム

$$\iint q_t dx dy \approx S_{i,j} q_{t,i,j}$$

(2)式の非粘性 flux F の周回積分は、各辺毎に分けられ、各辺上で F が一定と近似して、次式で表される。

$$\oint F dy = \left[\int_{j-1/2}^{j+1/2} F dy \right]_{i-1/2}^{i+1/2} - \left[\int_{i-1/2}^{i+1/2} F dy \right]_{j-1/2}^{j+1/2}$$

$$\approx [(y_\eta F)_j]_{i-1/2}^{i+1/2} - [(y_\xi F)_i]_{j-1/2}^{j+1/2}$$

ただし

$$\begin{cases} y_{\eta i \pm 1/2, j} \equiv y_{i \pm 1/2, j+1/2} - y_{i \pm 1/2, j-1/2} \\ y_{\xi i, j \pm 1/2} \equiv y_{i+1/2, j \pm 1/2} - y_{i-1/2, j \pm 1/2} \end{cases}$$

非粘性項 G についても同様に

$$\oint G dx \approx [(x_\eta G)_j]_{i-1/2}^{i+1/2} - [(x_\xi G)_i]_{j-1/2}^{j+1/2} \quad (4)$$

以上をまとめると

$$S_{i,j} q_{t,i,j} + (\hat{F} + \hat{F}_v)_{i+1/2,j} - (\hat{F} + \hat{F}_v)_{i-1/2,j} + (\hat{G} + \hat{G}_v)_{i,j+1/2} - (\hat{G} + \hat{G}_v)_{i,j-1/2} = 0 \quad (5)$$

ただし

$$\begin{cases} \hat{F} \equiv y_\eta F - x_\eta G \\ \hat{G} \equiv -y_\xi F + x_\xi G \end{cases}$$

格子セル境界での非粘性 flux は、ref. 3)と同様に flux-difference splitting method を用いて定めた。3次精度までの高次精度上流差分を後処理型³⁾で構成した。ただし、高次精度は計算空間で組み立てられるので、実空間の精度は格子に依存する。粘性 flux は、これも ref. 3)と同様に Gauss の積分定理により定めた。物体境界上での非粘性 flux は、そこでの値そのものを用いた。すなわち、速度成分は、粘着条件から、 u, v とともにゼロを代入し、圧力は、接するセル中心での値をゼロ次外挿して用いた。流入・流出境界では、それぞれ一様流・ゼロ次外挿で計算領域外での値を与え、境界上で信号の伝播方向に応じて差分を使い分けた。時間積分は Euler implicit を用い、空間方向に IAF 法を用いた。なお、手法としては、圧縮流・擬似圧縮流の違いを除けば、ref. 4)と良く似ている。

3. 計算例

円柱まわりの流れを計算した。レイノルズ数は

$Re=40$ である。格子トポロジーはO型である。外側境界は円柱直径の40倍にとった。格子点数は 41×61 である。擬似圧縮パラメータ $\beta=1.0$ であり、3次精度で計算した。円柱のまわりの flux を、円柱表面に沿って積分した値 (F_{bottom}) と、外側境界に沿って積分した値 (F_{top}) の2種類について計算した。それらを下に示す。

$$F_{bottom} = \begin{bmatrix} 0.75673968224135 \\ 0.7218 \times 10^{-13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{top} = \begin{bmatrix} 0.75673968224303 \\ 0.4807 \times 10^{-11} \\ -0.3769 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

第1, 第2成分は、 C_D, C_L の1/2であり、第3成分は mass flux である。どれも11桁程度まで一致しており、収束が進めば、さらに下の桁まで一致すると思われる。格子点数をそれぞれ倍に増やした場合に $C_D=1.499$ となり、他の計算値(1.498, 1.494, ref. 2 参照)と良く一致している。

次に迎え角ゼロで置かれた平板まわりの流れを計算した。レイノルズ数は $Re=10^5$ である。計算領域は前縁から上流に1.0, 後縁から下流に1.0,

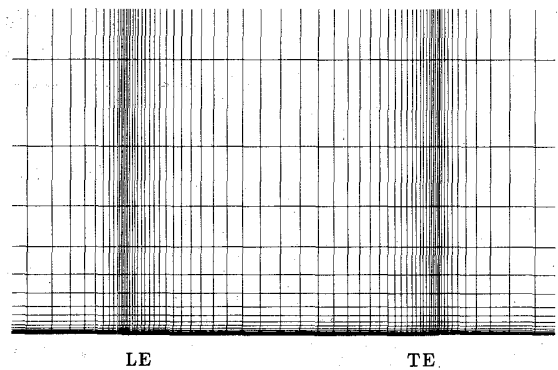


図3 平板まわりの格子

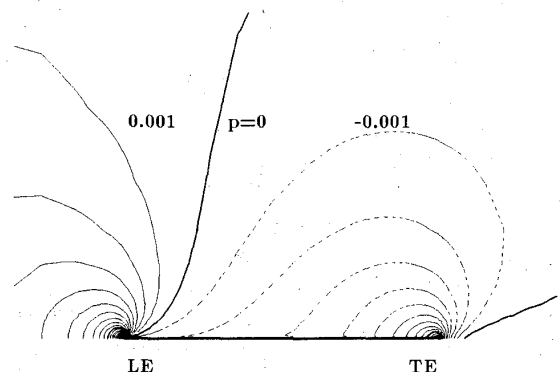


図4 平板まわりの圧力分布

高さ方向に5.0である。格子点数は75×31で、平板上に45点ある。図3に格子を示す。格子は前後縁にclusterされ、前後縁に隣接する格子セルは、均等に分割された場合の1/5の長さをもつ。円柱の場合と同様にグローバルな保存性が成り立つことを確認した。図4に流場内の圧力分布を、図5

に平板表面に沿った圧力分布を示す。x=0は前縁を、x=1.0は後縁を表す。後縁近傍では triple-deck theory に基づく計算値⁵⁾とまずまずの一致を示している。黒丸は、平板上に同一数の格子点を一様に配置した格子を用いた計算結果である。

図6に表面摩擦応力分布を示す。これを積分す

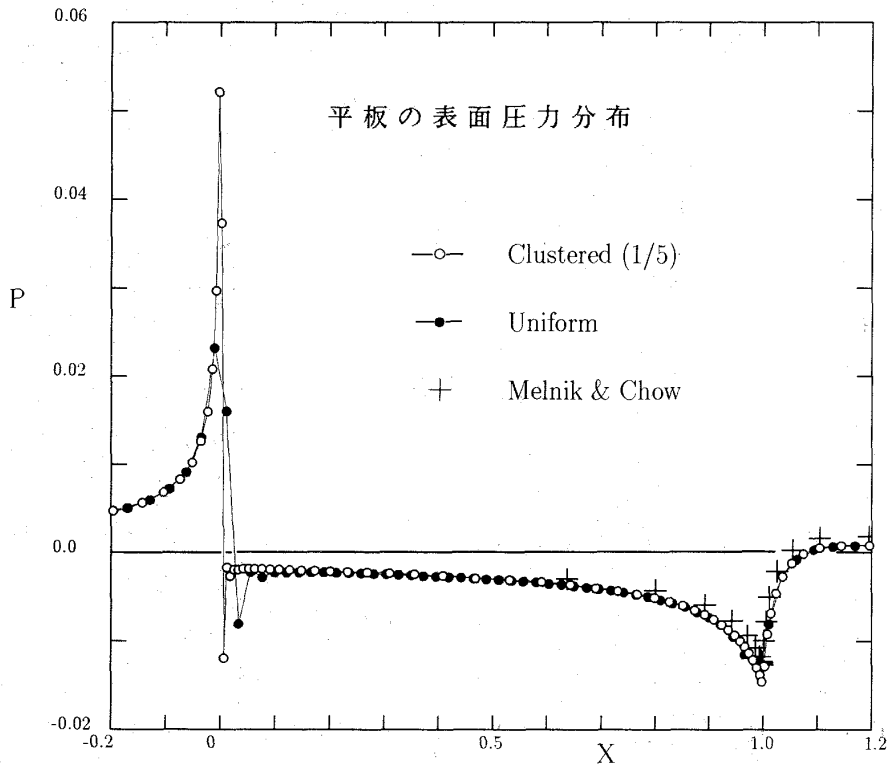


図5 平板の表面圧力分布

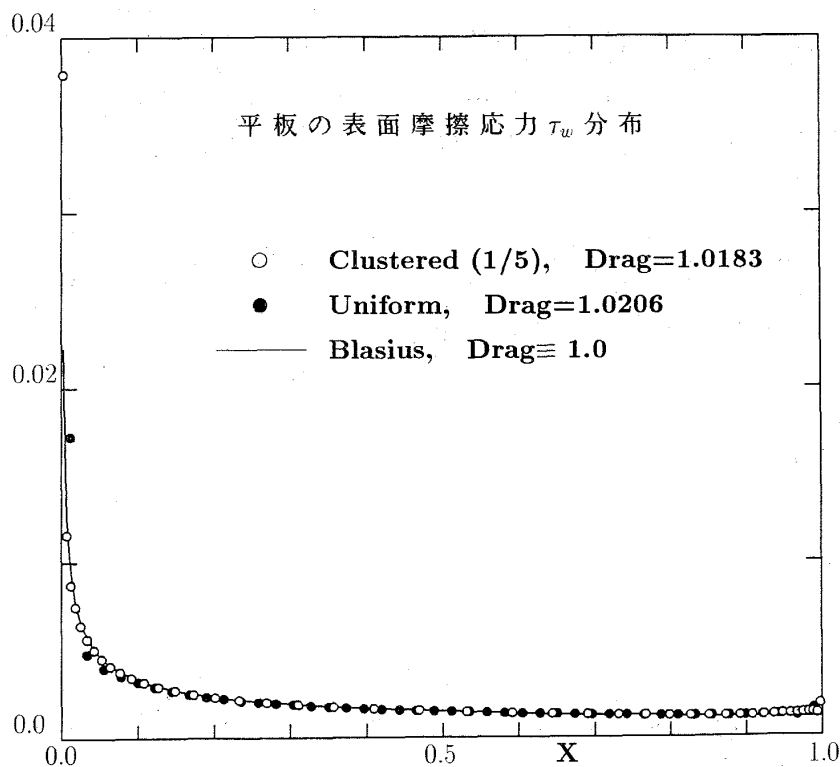


図6 平板の表面摩擦応力分布

ると抵抗値が得られる。前縁のピークの影響で、前縁から25%までの部分で抵抗値の半分以上を占める。得られた抵抗値が、Blasius解の積分値との比で、図中に示されている。一様格子での値は、前縁の鋭いピークを表現できていないにも拘らず、集中格子での値と0.2%しか違わない。このことは、グローバルな保存性を満たすスキームが、局所的な解像度が不十分な場合にも、積分量は精度良くとらえられることを示唆しているように思える。

4. あとがき

Cell-centered法と保存的な上流差分法の組み合わせによって、グローバルな保存性をもつ計算スキームが構成されることが示された。今後の課題は、実空間での高次精度の確保である。また、cell-centered法では、計算結果の格子に対する依存性が高いとの報告もある⁶⁾ので、これについても検討する必要がある。

参 考 文 献

- 1) 和田安弘, 熊谷 清: “新しいTVDスキームと壁境界条件について”, 第6回航空機計算空力シンポジウム論文集, 航技研特別資料 SP-9, 1988年12月.
- 2) Kodama, Y.: “A Cell-Centered, Finite-Volume Upwind Scheme with Global Conservation”, 日本造船学会論文集第168号, 1990年12月(出版予定).
- 3) Chakravarthy, S.; et al.: “Application of a New Class of High Accuracy TVD Schemes to the Navier-Stokes Equations”, AIAA Paper 85-0165, 1985.
- 4) 古川雅人他: “緩和形陰的風上法による非定常圧縮性粘性流れの数値シミュレーション”, 第8回航空機計算空力シンポジウム論文集(本論文集), 1990年12月.
- 5) Melnik, R. E. and Chow, R.: “Asymptotic Theory of Two-Dimensional Trailing Edge Flows”, Grumman Research Dept., Rept RE-510J, 1975.
- 6) 沢田, 高梨: “風上差分を用いた有限体積法の高精度化”, 第5回航空機計算空力シンポジウム論文集), 航技研 SP-8, 1987年11月.

