

# 緩和形陰的風上法による 非定常圧縮性粘性流れの数値シミュレーション

古川 雅人\* 中野 隆\* 井上 雅弘\*

## Numerical Simulation of Unsteady Compressible Viscous Flows Using an Implicit Upwind Relaxation Scheme

by

Masato FURUKAWA, Takashi NAKANO and Masahiro INOUE  
Department of Mechanical Engineering for Power  
Kyushu University

### ABSTRACT

An implicit upwind scheme has been developed for simulations of unsteady compressible viscous flows. The inviscid fluxes are evaluated using a highly accurate upwind scheme based on a TVD finite volume formulation with the Roe's approximate Riemann solver. The algebraic turbulence model of Baldwin and Lomax is employed. A zonal approach with composite grids is implemented to simplify grid generations. A new time-linearization of the inviscid fluxes evaluated by the Roe's Riemann solver is presented. No approximate factorization is introduced, and unfactored implicit equations are solved by a pointwise relaxation method. To obtain time-accurate solutions, 30 inner iterations are performed at each time step. Numerical examples are presented for unsteady flows in a transonic turbine cascade where periodic unsteadiness is caused by the trailing edge vortex shedding.

### 1. 緒 言

密な格子あるいは解適合格子を用いると、はく離せん断層、衝撃波と境界層の干渉等を計算で鮮明に捕らえることができる。しかしながら、このような場合、せん断層の不安定性や衝撃波の自動振動等の非定常性が現れて、定常解が存在しないことがある。すなわち、空間分解能の高い格子を使用する場合、非定常計算を行わなければ正しい解が得られないことがある。

陽的解法を用いた非定常計算の場合、CFL条件により、時間精度上要求される時間刻み幅よりも非常に小さな時間刻み幅しか採れず、工学上問題

となるような非定常現象を捕らえるためには膨大な時間ステップ数を要する。また、陰的解法の場合でも、広く一般的に使用されている近似因子分解法(AF法)を用いると、因子化に伴う誤差のために時間刻み幅を大きく採れないことがある。さらに、この因子化に伴う誤差は時間精度の低下をも引き起こすため、AF法は高精度の非定常計算スキームの開発には適さない。ところで、因子化を施さず、緩和法を用いて解く陰解法が提案されているが<sup>1)</sup>、この方法では因子化に伴う誤差がないのでAF法よりも大きな時間刻み幅を使用できる。

本報では、非定常圧縮性粘性流れを計算するためのスキームとして、緩和形陰解法を用いた有限体積形風上スキームについて述べる。特に、Roeの近似リーマン解法を用いて非粘性流束を評価する場

\*九州大学工学部動力機械工学科

合の非粘性流束の線形化を新たに提案する。本スキームでは複雑な物体への適用を考慮して、著者らが既に発表している複合格子を用いた領域分割解法<sup>2)</sup>に従う。さらに、時間精度を保つために、各時間ステップでニュートン反復を30回行う。二次元遷音速タービン翼列の非定常流れ解析に本解法を適用し、翼後縁でのカルマン渦の放出に伴う非定常性が流れ場に及ぼす影響を調べた。

## 2. 緩和形陰的風上解法

### 2.1 有限体積法

構造格子上で四辺形セルを用いた cell-centered 法により空間離散化を行い、時間項を陰的に離散化すると、二次元の時間平均完全ナビエ・ストークス方程式は次のように表せる。

$$A_{i,j} \frac{\Delta Q_{i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{i,j} (SH)^{n+1} + \frac{1}{Re} \sum_{i,j} (SR)^{n+1} = 0 \quad (1)$$

ただし

$$\Delta Q_{i,j}^n = Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n \quad (2)$$

$$\sum_{i,j} (SH) = (SH)_{i,j-1/2} + (SH)_{i+1/2,j} + (SH)_{i,j+1/2} + (SH)_{i-1/2,j} \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} (SR) = (SR)_{i,j-1/2} + (SR)_{i+1/2,j} + (SR)_{i,j+1/2} + (SR)_{i-1/2,j} \quad (4)$$

ここで、 $Q$ ,  $H$  および  $R$  はそれぞれ保存量、非粘性流束及び粘性流束から成るベクトルを表し、 $Re$  はレイノルズ数である。さらに、 $A$  は計算セルの面積、 $\Delta t$  は時間刻み幅、 $S$  はセルの辺の長さである。

### 2.2 非粘性流束

式(1)中の  $n+1$  タイムステップでの非粘性流束を、Roeの近似リーマン解法<sup>3)</sup>を用いた一次精度の風上法で評価し、次式のように近似的に線形化する。

$$H_{i,j-1/2}^{n+1} = H_{i,j-1/2}^n + \frac{1}{2} \left[ (|B_{i,j}^n| + |B_{i,j-1/2}^n|) \Delta Q_{i,j}^n + (|B_{i,j-1}^n| - |B_{i,j-1/2}^n|) \Delta Q_{i,j-1}^n \right] \quad (5)$$

ここに

$$B = \frac{\partial H}{\partial Q} = T A T^{-1}, \quad |B| = T |A| T^{-1} \quad (6)$$

ところで、式(5)中の  $n$  タイムステップでの非粘性流束は MUSCL 型の 3 次精度風上法<sup>2)</sup>により求める。

### 2.3 粘性流束

式(1)中の  $n+1$  タイムステップでの粘性流束は次式により近似的に線形化される。

$$\sum_{i,j} (SR)^{n+1} \cong \sum_{i,j} (SR)^n + \sum_{i,j} (SC)^n \Delta Q \quad (7)$$

ここに、 $C = \partial \bar{R} / \partial Q$  であり、 $\bar{R}$  は薄層近似された粘性流束ベクトルを表す。ただし、 $R$  は薄層近似のない粘性流束ベクトルである。また、 $4 \times 4$  のヤコビアンマトリックス  $C$  は文献4)に与えられている。上式右辺の  $n$  タイムステップでの粘性流束は Green の定理に従って中心差分的に評価される<sup>2)</sup>。さらに、渦粘性係数は Baldwin & Lomax の代数乱流モデル<sup>5)</sup>から求められる。

### 2.4 緩和法による非定常解析

式(1)の非粘性及び粘性流束ベクトルに対して式(5)及び(7)で表される線形化を施すと、次式を得る。

$$D_{i,j}^n \Delta Q_{i,j}^n + D_{i,j-1}^n \Delta Q_{i,j-1}^n + D_{i+1,j}^n \Delta Q_{i+1,j}^n + D_{i,j+1}^n \Delta Q_{i,j+1}^n + D_{i-1,j}^n \Delta Q_{i-1,j}^n = -\frac{\Delta t}{A_{i,j}} \left[ \sum_{i,j} (SH)^n + \frac{1}{Re} \sum_{i,j} (SR)^n \right] \quad (8)$$

ここで

$$D_{i,j} = I + \frac{\Delta t}{2A_{i,j}} \left[ S_{i,j-1/2} (|B_{i,j-1/2}| + |B_{i,j-1/2}| + 2C_{i,j-1/2}) + S_{i+1/2,j} (|B_{i,j} + |B_{i+1/2,j}| + 2C_{i+1/2,j}) + S_{i,j+1/2} (|B_{i,j} + |B_{i,j+1/2}| + 2C_{i,j+1/2}) + S_{i-1/2,j} (|B_{i,j} + |B_{i-1/2,j}| + 2C_{i-1/2,j}) \right] \quad (9)$$

$$D_{i,j-1} = \frac{\Delta t}{2A_{i,j}} S_{i,j-1} (|B_{i,j-1} - |B_{i,j-1/2}| + 2C_{i,j-1/2})$$

$$D_{i+1,j} = \frac{\Delta t}{2A_{i,j}} S_{i+1/2,j} (|B_{i+1,j} - |B_{i+1/2,j}| + 2C_{i+1/2,j})$$

$$D_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{2A_{i,j}} S_{i,j+1/2} (|B_{i,j+1} - |B_{i,j+1/2}| + 2C_{i,j+1/2,j})$$

$$D_{i-1,j} = \frac{\Delta t}{2A_{i,j}} S_{i-1/2,j} (|B_{i-1,j} - |B_{i-1/2,j}| + 2C_{i-1/2,j})$$

本解法では式(8)の左辺の非対角要素を右辺へ移

項し、点緩和法により解く。ただし、各タイムステップでの時間精度を保つために、右辺に非常項を付加し、各タイムステップにおいてニュートン反復を実行する<sup>1)</sup>。このとき、式(8)は次のように変形される。

$$D_{i,j}^p \Delta Q_{i,j}^p = -\frac{\Delta t}{A_{i,j}} \left[ \frac{Q_{i,j}^p - Q_{i,j}^n}{\Delta t} A_{i,j} + \sum_{i,j} (SH)^p + \frac{1}{Re} \sum_{i,j} (SR)^p \right] \omega - (D_{i,j-1}^p \Delta Q_{i,j-1}^p + D_{i+1,j}^p \Delta Q_{i+1,j}^p + D_{i,j+1}^p \Delta Q_{i,j+1}^p + D_{i-1,j}^p \Delta Q_{i-1,j}^p) \quad (10)$$

ここで、 $\omega$ は非粘性流束の陰的及び陽的部分の空間精度の違いを補正するために必要な緩和係数、添字 $p$ はニュートン反復の回数を示す。本報で示す計算ではニュートン反復の回数を30とした。上式において、ニュートン反復が収束して $\Delta Q^p = 0$ となると、離散化された基礎式(1)が満たされることがわかる。さらに、点緩和式により式(10)は各計算セルごとに解かれるので、本緩和法の使用は領域分割法の導入を容易にする。

### 3. 境界条件

#### 3.1 固体壁境界

圧力以外の非粘性流束を零とする。固体壁上の圧力は壁の法線方向の運動方程式から求める。粘性流束は、境界の外側に仮想セルを設定してその仮想セルに滑り無しの条件及び断熱条件に対応した物理量を与え、内部セルと同様に評価される<sup>2)</sup>。

#### 3.2 流入境界

境界の外側に仮想セルを設定し、上流条件に対応した物理量をその仮想セルに与え、内部セルと同様にリーマン問題を解いて境界上の流束を求める<sup>2)</sup>。

#### 3.3 流出境界

流入境界と同様に、仮想セルに下流条件を与えて境界上の流束を求める。下流条件としては静圧を与え、仮想セル上の密度及び速度の二成分を隣接する内部セル上のそれらと同じにおく<sup>2)</sup>。

### 3.4 領域境界

格子生成を容易にするために、本スキームでは複合格子を用いた領域分割解法を導入する。すなわち、計算領域を重合しない複数の領域に分割し、各領域ごとに構造格子を生成する。計算領域の分割により、領域境界と呼ばれる新たな境界が領域間に定義されるが、本報ではこの領域境界を、著者らが既に発表している領域分割解法<sup>2)</sup>に従って取り扱う。この領域分割解法では、領域間の数値流束に着目して領域境界を取扱い、領域境界上での数値流束の保存性を厳密に満足させる。

### 4. 数値計算例

二次元タービン翼列<sup>6)</sup>の遷音速流れ解析に上述の緩和形陰的風上解法を適用した結果について述べる。計算格子を図1に示す。格子はC型格子であるが、周期境界上で格子点は一致しておらず、周期境界を領域境界として扱った。計算セルの総数は $540 \times 44$ であり、翼面上のセル数は腹面側で76、背面側で156とした。後縁はく離を捕えるために、後縁近傍の格子を比較的密に設定し、翼面上の後縁部におけるセル数を20とした。さらに、最小格子間隔は翼弦長の $2/10^5$ である。流入条件は、マッハ数を0.282、流れ角を $30^\circ$ 、一方流出条件は、等エントロピマッハ数を0.975とした。基準状態として流出状態、代表長さとして翼弦長を採ったレイノルズ数を $8.74 \times 10^5$ とした。本計算条件に対応したシュリーレン写真<sup>6)</sup>を図2に示す。

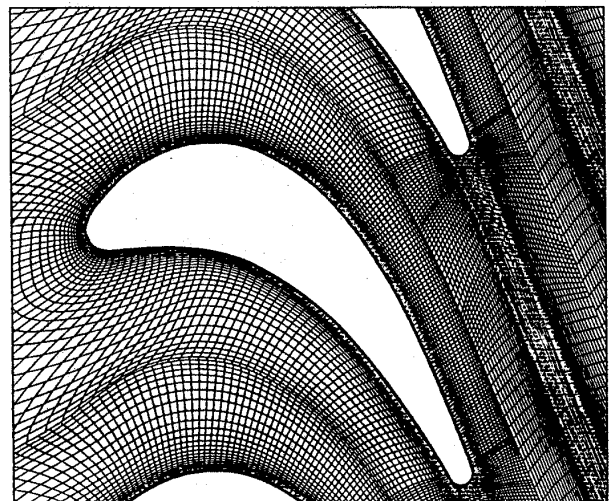


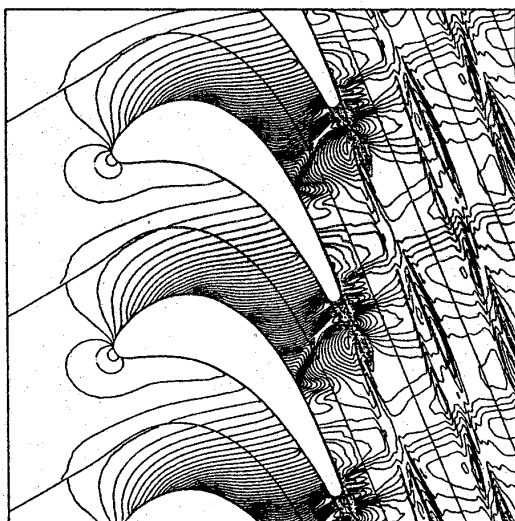
図1 計算格子(C形複合格子)

なお、本報で述べる計算では式(10)中の緩和係数 $\omega$ を0.5とした。

まず、非定常計算の結果ではなく、式(10)の右辺の非定常項を省略し、ニュートン反復を行わず、局所時間刻み法を用いて計算した結果について述べる。クーラン数を $CFL=5$ 及び $100$ とした場合の計算結果を図3及び4に示す。図において翼面圧力は上流の全圧で無次元化されており、文献6)から参照された実験結果と比較されている。両計算において定常解は得られなかった。両計算の結果は著しく異なっており、図4では強い後縁衝撃



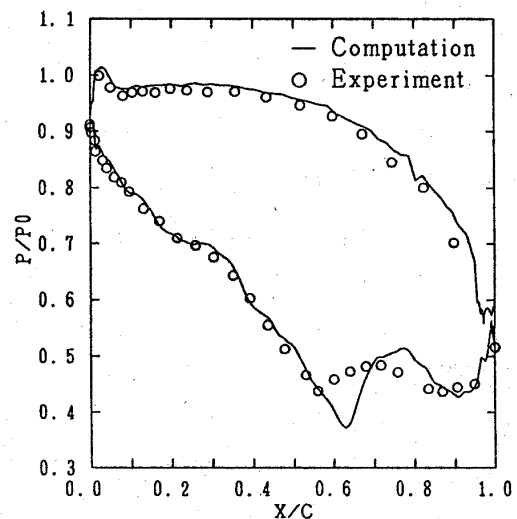
図2 シュリーレン写真<sup>6)</sup>



(a) 等密度線図

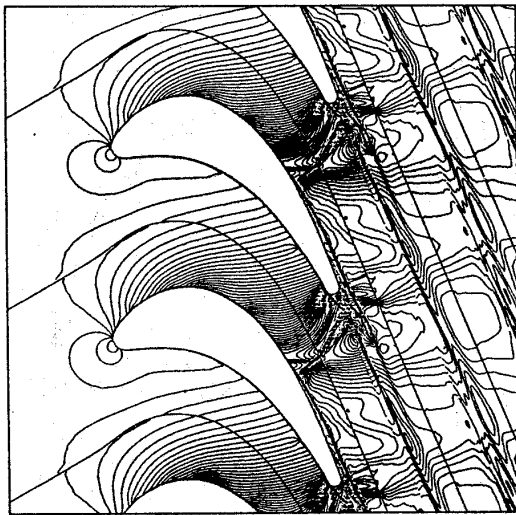
波が翼背面上に入射し、背面上の境界層が剥離しているのが認められる。定常解が存在しないため、このように解はクーラン数にも依存していることがわかる。また、図3及び4において等密度線図は図2のシュリーレン写真と良い一致を示しておらず、翼背面上の圧力分布も弦長の60~100%位置で計算結果と実験結果とに大きな不一致が生じている。

次に、式(10)を用いて非定常計算を行った場合の結果について述べる。無次元時間刻み幅を $\Delta t=0.01$ に固定した。また、ニュートン反復内の残差を3桁下げるために、各時間ステップでニュートン反復を30回実行した。さらに、初期状態として図4に示した結果を用いた。図5は翼に働くピッチ方向の力の履歴であり、図6は時間ステップ $n=1400$ における結果である。初期状態として用いた図4の結果では翼背面上で境界層の剥離が発生しているが、非定常計算結果の図6ではこの剥離は認められず、図2のシュリーレン写真と良い一致を示している。図5によると、高周波数の周期的な非定常性が認められ、その周期は無次元時間で約0.26であることがわかる。この周期的変動において位相が半周期異なる二つの時間ステップ $n=1085$ 及び $1098$ での計算結果をそれぞれ図7及び8に示す。両図の等密度線図には後縁からのカルマン渦の放出が認められ、上述の周期的な非定常性はこのカルマン渦の放出に起因していること

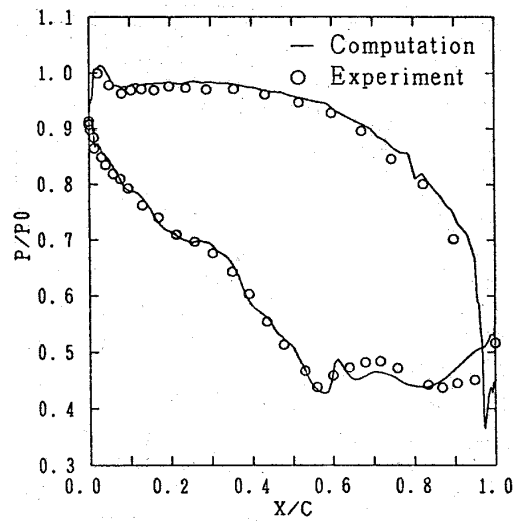


(b) 翼面圧力分布

図3 局所時間刻み法( $CFL=5$ )を用いた計算結果



(a) 等密度線図



(b) 翼面圧力分布

図4 局所時間刻み法 (CFL=100) を用いた計算結果

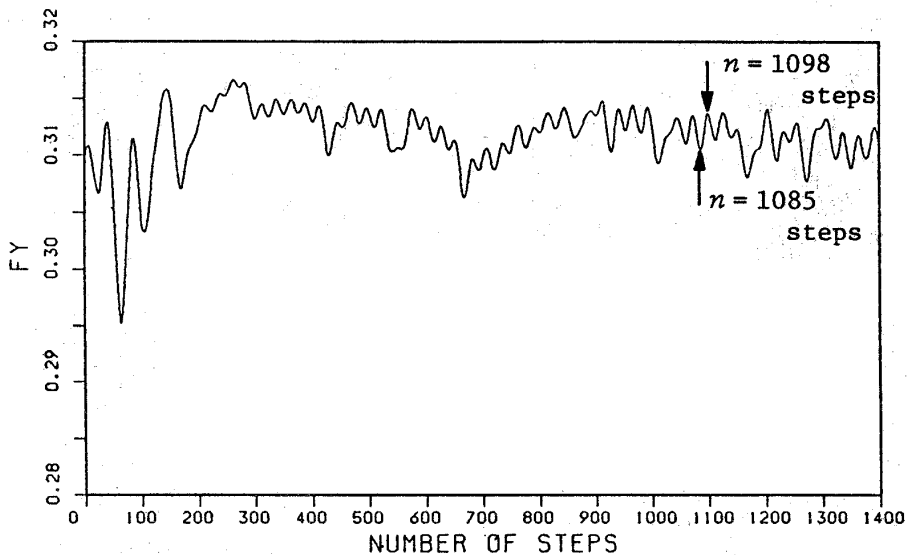


図5 翼に働くピッチ方向の力の履歴 (非定常計算)

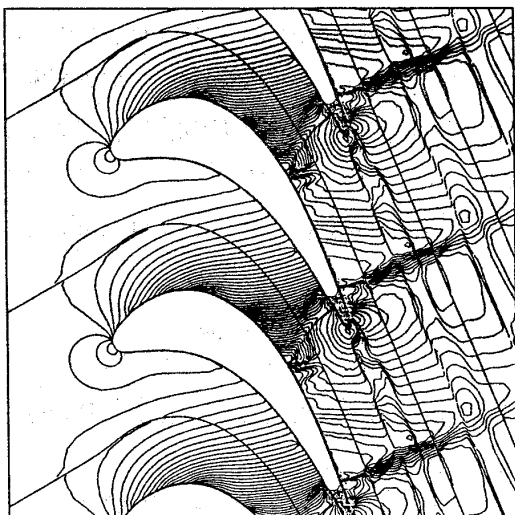
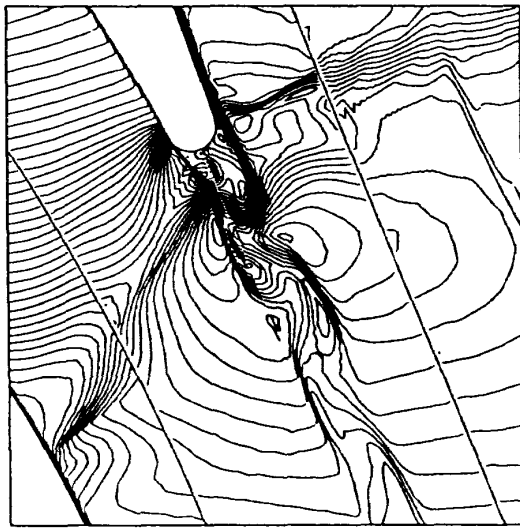


図6 非定常計算結果の等密度線図  
(n=1400ステップ)

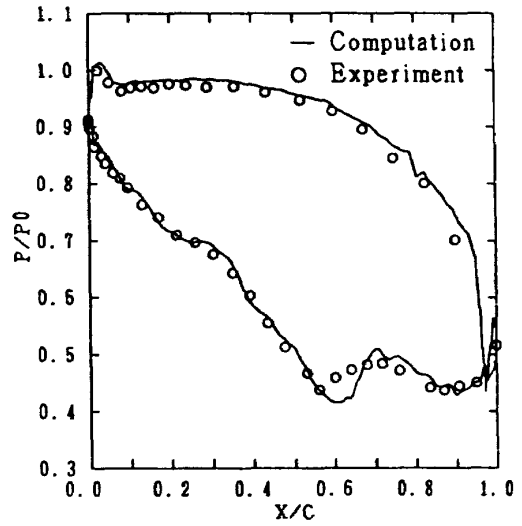
がわかる。さらに、カルマン渦の放出は翼背面上に入射する後縁衝撃波の振動を引き起こしており、その結果、その後縁衝撃波の入射位置（弦長の60%）より下流の翼背面上において圧力分布の時間的変動が起きている。図9は非定常計算における1001～1400ステップ間の結果を時間平均して得られた翼面圧力分布である。局所時間刻み法を用いた計算結果（図3、4）とは対照的に、非定常計算結果の時間平均は実験結果と良く一致している。

### 5. 結 言

非定常圧縮性粘性流れを計算するためのスキームとして、緩和形陰解法と複合格子を用いた有限

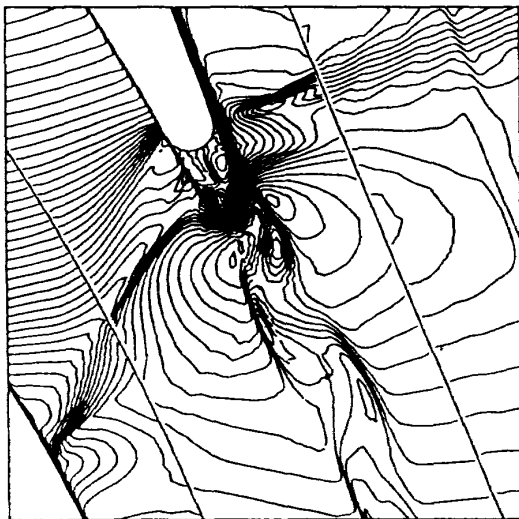


(a) 等密度線図

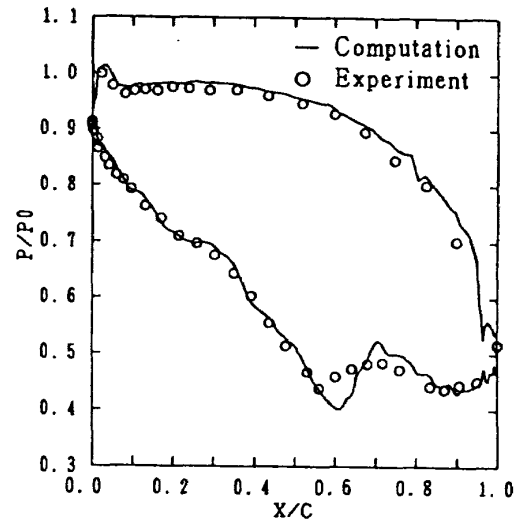


(b) 翼面圧力分布

図7 非定常計算結果 ( $n=1085$  ステップ)



(a) 等密度線図



(b) 翼面圧力分布

図8 非定常計算結果 ( $n=1098$  ステップ)

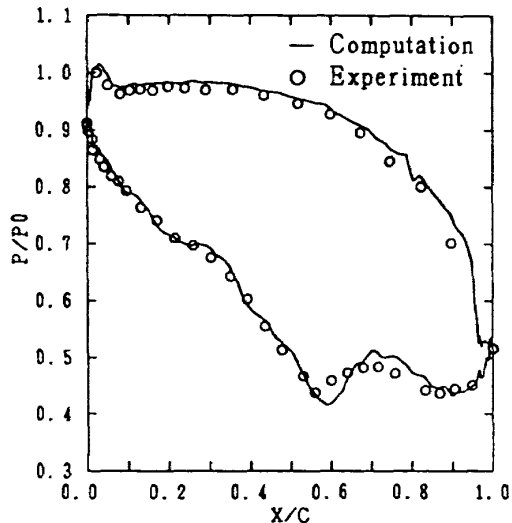


図9 時間平均された翼面圧力分布 ( $n=1001 \sim 1400$  ステップ)

体積形風上スキームについて述べた。特に本報では、Roeの近似リーマン解法を用いて非粘性流束を評価する場合の非粘性流束の線形化を新たに提案した。さらに、本解法では各時間ステップでニュートン反復を実行することにより時間精度を保つ。

参考文献

- 1) Chakravarthy, S. R. : AIAA Paper, 84-0165 (1984).
- 2) 古川, ほか2名 : 日本機械学会論文集(B編) 56巻523号 (1990), 609.

- 3) Roe, P. L. : J. Comp. Phys., 143 (1981), 353.
- 4) 古川, ほか 2 名 : 日本機械学会佐賀地方講演会講演論文集, No.908-2 (1990), 121.
- 5) Baldwin, B. S. and Lomax, H. : AIAA Paper, 78-257 (1978).
- 6) Kiock, R., ほか 3 名 : Trans, ASME, J. Engng. GT and Power, 108-2 (1986), 277.

