13

乱流の秩序構造としての乱流二次流

巽 友 友 正* 吉 村 卓 弘**

Turbulent Secondary Flow as a Coherent Structure of Turbulent Shear Flows

by

Tomomasa TATSUMI
Kyoto Institute of Technology
Takahiro YOSHIMURA
Information System Developments, Hitachi Ltd.

ABSTRACT

Turbulent secondary flow in a rectangular duct is a typical example of coherent structure in turbulent shear flows. The generation of the secondary flow is investigated in the framework of hydrodynamical stability of the corresponding laminar flow and the secondary flow is described as an equilibrium state of growing unstable disturbances.

Keywords: secondary flow, instability, duct flow

1. 乱流の秩序構造と乱流二次流

乱流の中には，文字通り乱雑な小規模成分の他に，大規模な組織的構造が存在することが知られている。このような秩序構造は，一般に，層流の線形不安定性によって発生した横渦が外部撹乱によって三次元化され，それが流れによって引き延ばされて馬蹄形の渦となったものと理解されている。この馬蹄渦（あるいはヘヤピン渦，バナナ渦）によって代表される秩序構造の存在は，乱流の統計的および力学的な性質を決定する上に大きな影響を及ぼすものと考えられる。

このような秩序構造についての理論的研究は，これまで，さまざまなモデル化による取り扱いが行われているが，その多くは現象論的な記述に留まっている。その理由は，この馬蹄渦に代表される秩序構造が一般に不定形であり，かつ寿命が極めて短いことにある。

＊京都工芸繊維大学
＊＊日立製作所・情報システム開発本部

他方において，乱流に特有の大規模な組織的構造としては，円形でない断面の直管を通る乱流における断面内の流れ，いわゆる「乱流二次流」が，すでに1920年代から知られている。

図1の上の二つの図は，正三角形と長方形の断面管を通る乱流の等速度線のNikuradse (1926)による測定結果を示す。これらの等速度線は，層流の等速度線と比べると，各線が境界の隅に向かってより突き出た形になっている。このことは，乱流の速度分布が，層流のそれに比べて，隅の付近でより大きな速度をもつことからも伺われる。

このような状況は，流れの断面内で，それぞれ下の二つの図のような，中心から隅に向かう流れと，それを補うための中心に向かう流れとを想定することによって説明できることが，Prandtl (1927)によって示唆された。このような流れの存在は，後にNikuradse (1930)によって，流れの可視化法を用いて確かめられた。この流れを「乱流二次流」，あるいは，Prandtl (1965) の命名では「第二種の二次流」という。

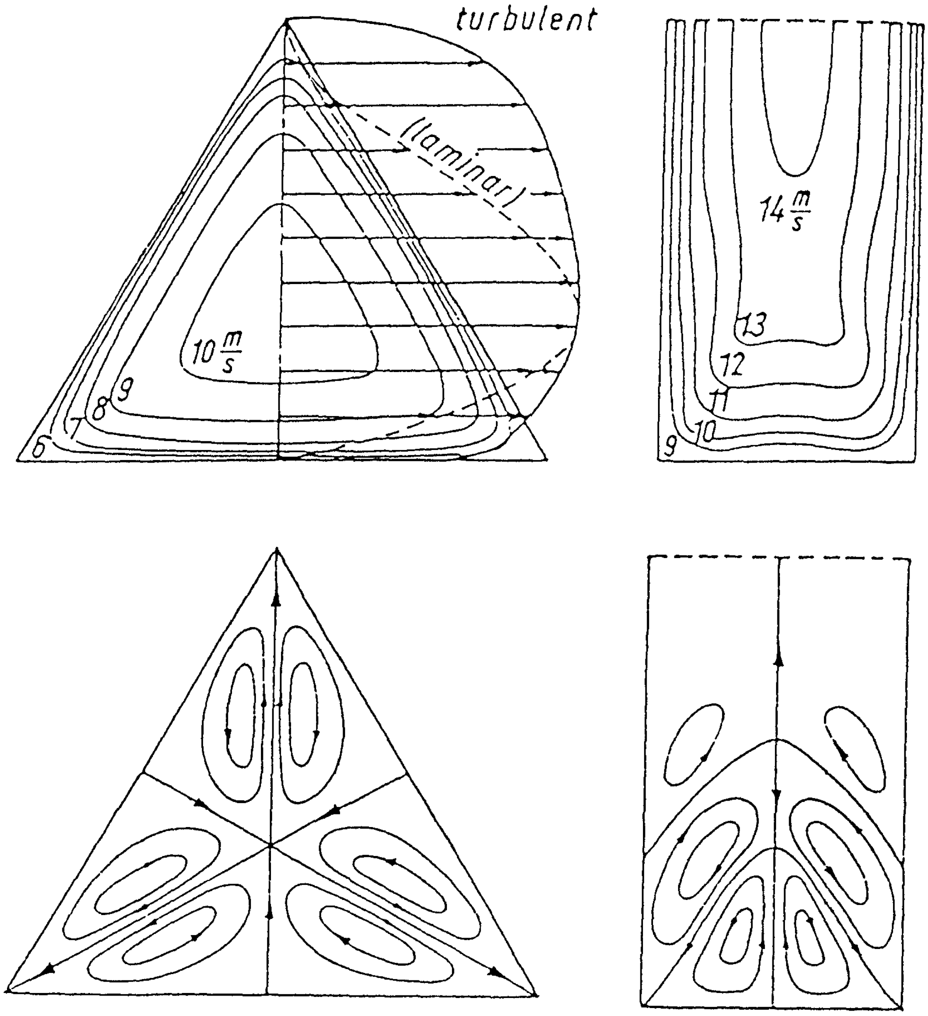

図1 正三角形管と長方形管内の乱流。一次流の等速度線（上図）と二次流の流線（下図）。

ちなみに，Prandtl の「第一種の二次流」とは，円環のように軸が湾曲した管を通る流れにおいて，断面内に生ずる流れをいう。しかし，この場合，軸方向の一次流は二次流なしでは存在し得ないのであって，両者はそれぞれ，一つの三次元的な流れの断面と見るべきものである。さらに，この種の二次流は層流としても可能であり，一次流の流速の変化による二次流の解の分岐が興味ある問題である。

「第三種の二次流」は，振動する物体によって，その外の流体に引き起こされる定常流をいう。この場合，定常流は確かに振動流を一次流とする二次流であるが，流れは全体として遅い粘性流であり，理論的には Stokes 近似を用いて取り扱われる。

したがって，これらの第一種および第三種の二次流は乱流とは直接関係がなく，第二種の「乱流二次流」だけが乱流の秩序構造の典型的な実例となっている。近年，乱流における種々の不定形でかつ短命の秩序構造が話題となっているとき，この古くから知られた秩序構造に関するわれわれの知識が未だ完全なものとは言えないのは残念である。

2. 長方形管流における乱流二次流

長方形断面の管を通る乱流における二次流の実験的測定は，Nikuradse (1926) によって初めてアスペクト比3.5の管について行われた。しかしその後，管内流の測定は，主として軸方向の圧力降下に関する水力学的測定に留まっており，二次流自体についての測定は，アスペクト比1の正方形管を除いてはあまり行われていないように思われ

る。

一方，理論的には，この二次流は，Prandtl (1927)によって，Reynolds応力の非一様・非等方性によって引き起こされるものと解釈されている。この解釈は，乱流モデルによる計算においても，等方的な Reynolds 応力表現を用いた K-ε モデルではこの二次流が記述できないという結果によって裏付けられている。このため，非等方的なReynolds 応力表現を用いた計算も行われているが，結果はパラメータ依存的であり，半実験的理論の域を出ていないように思われる(Bradshaw(1987))。

ところで見方を変えれば，この二次流は，明らかに管軸方向の縦渦であって，これが乱流状態においてのみ存在することから，軸方向の一次流の不安定性によって発生したものと考えられる。そうだとすれば，この二次流の理論的取扱いには，まず管内の一次層流の安定特性を解析し，ついで不安定な一次流における撹乱の成長の結果として二次流を説明するという筋書きが考えられる。

ここで問題となるのは，これまで安定性の解析が行われた層流は，実質的に速度分布が一方向に変化するものに限られており，長方形管内の流れのように速度分布が二方向に変化する層流については，まだ手が着けられていないということである。したがって，上の筋書きを実行するには，まず，この種の層流に対して安定性理論の定式化を行う必要がある。

われわれは，層流の速度分布と撹乱の速度とを共に二方向に直交関数系に展開し，それらを撹乱方程式に代入し，それから導かれる行列方程式を解くという方法を試みた(Tatsumi & Yoshimura (1990, 1991))。

以下，その方法と結果について簡単に述べてみたい。

3. 長方形管内の層流の安定性

層流の流れの方向に x 軸，それと直交して y 軸と z 軸をとる。管の y 方向の半幅 L を基準の長さにとり，すべての長さを L で無次元化すれば，管壁の位置は $y=\pm 1$，$z=\pm A(>1)$ で表される。A を断面のアスペクト比という。層流の x 軸上での速度 U_0 を基準の速度とし，すべての速度を U_0 で無次元化すれば，層流の速度は，$\boldsymbol{U}=(U(y, z), 0, 0)$，$U(0, 0)=1$，撹乱の速度は $\boldsymbol{u}=(u, v, w)$ で表される。層流の Reynolds 数を，$R=LU_0/\nu$ で定義する。ここに，ν は流体の動粘性率を表す。

まず，微小撹乱を考え，撹乱速度 $\boldsymbol{u}$ について二次量を無視した撹乱方程式（Orr-Sommerfeld 方程式の拡張形）を導く。この方程式の線形性から，撹乱は，x 軸方向には一つの Fourier 成分，そして時間的には一つの Laplace 成分だけをとり，

$$\boldsymbol{u} \propto \exp[i\alpha(x-ct)]$$

とおくことができる。ここに，$\alpha(>0)$は撹乱の x 軸方向の波数を示し，$c=c_r+ic_i$ は一般に複素数で，c_r は撹乱の位相速度を，αc_i は対数増幅率を表す。したがって，$c_i>0$ は撹乱の増幅すなわち層流の不安定性を，そして，$c_i<0$ は撹乱の減衰すなわち層流の安定性を表す。

撹乱方程式の y, z に関する対称性から，撹乱は，その偶奇性によって次の 4 個のモードに分けることができる：

Ⅰ：$(e\ e)$,　　Ⅱ：$(e\ o)$,

Ⅲ：$(o\ e)$,　　Ⅳ：$(o\ o)$.

ここに，例えば $(e\ o)$ は，y に関して偶関数，z に関して奇関数であることを表す。

撹乱方程式に境界条件を課すことによって得られる固有値方程式から，次の結果が得られる。

モードⅠおよびⅡの撹乱に対しては，層流は，アスペクト比 A がある臨界値 A_c 以下のときは安定であるが，A_c 以上のときは不安定である。

モードⅢおよびⅣの撹乱に対しては，層流は，すべてのアスペクト比において安定である。

図2は，モードⅠおよびⅡの撹乱に対する中立曲線を示す。明らかに，層流は，モードⅠに対して，モードⅡに対してよりも不安定であり，同じアスペクト比では，より低い臨界 Reynolds数 R_c をもつ。モードⅠに対する R_c の値は，$A\to\infty$ の極限において，平面 Poiseuille流に対する値5772 (Orszag (1971)) と一致し，A が減少すると共に増加して，$A\to 3.2$ のとき ∞ となる。すなわち，長方形管内の層流は，臨界アスペクト比 $A_c=3.2$ 以下では安定，それ以上では不安定となる。モー

ドIIに対するR_cの値は，$A \to \infty$の極限では同じであるが，Aの減少と共により速やかに増加し，$A \to$約5のとき∞となる。

図3は，$A=5$，$R=12000$，$\alpha=0.9$のときの撹乱の断面内における速度場，渦度場，および層流の等速度線を示す。図から，撹乱が，層流の臨界層$U=c_r=0.24$の付近に集中した薄い渦層の構造をもつことが分かる。

4. 撹乱の非線形増幅

解析の次の段階は，撹乱の非線形増幅とその平衡状態としての乱流二次流の記述である。そのた

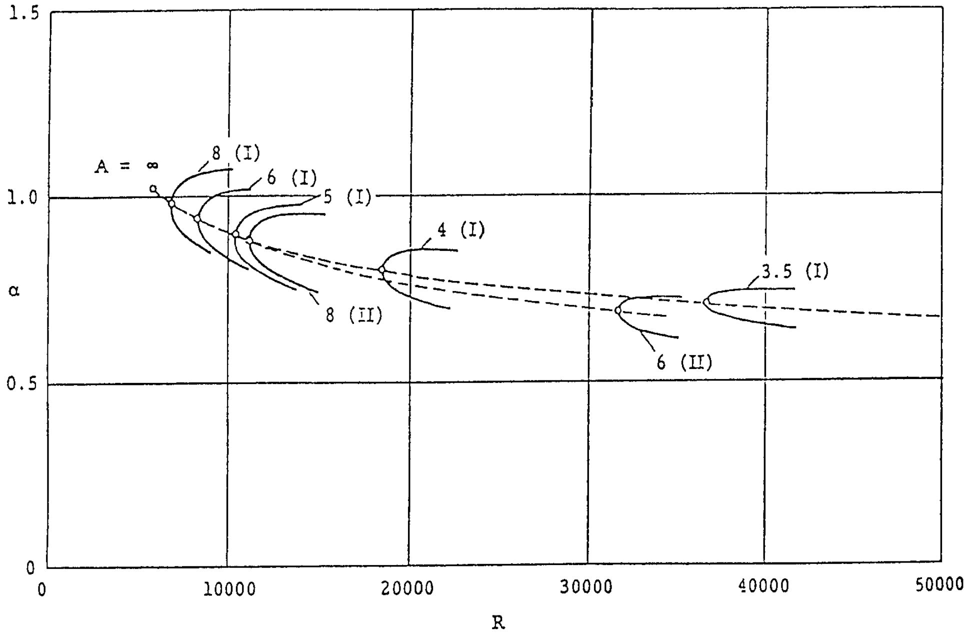

図2　長方形管内の層流の中立曲線。

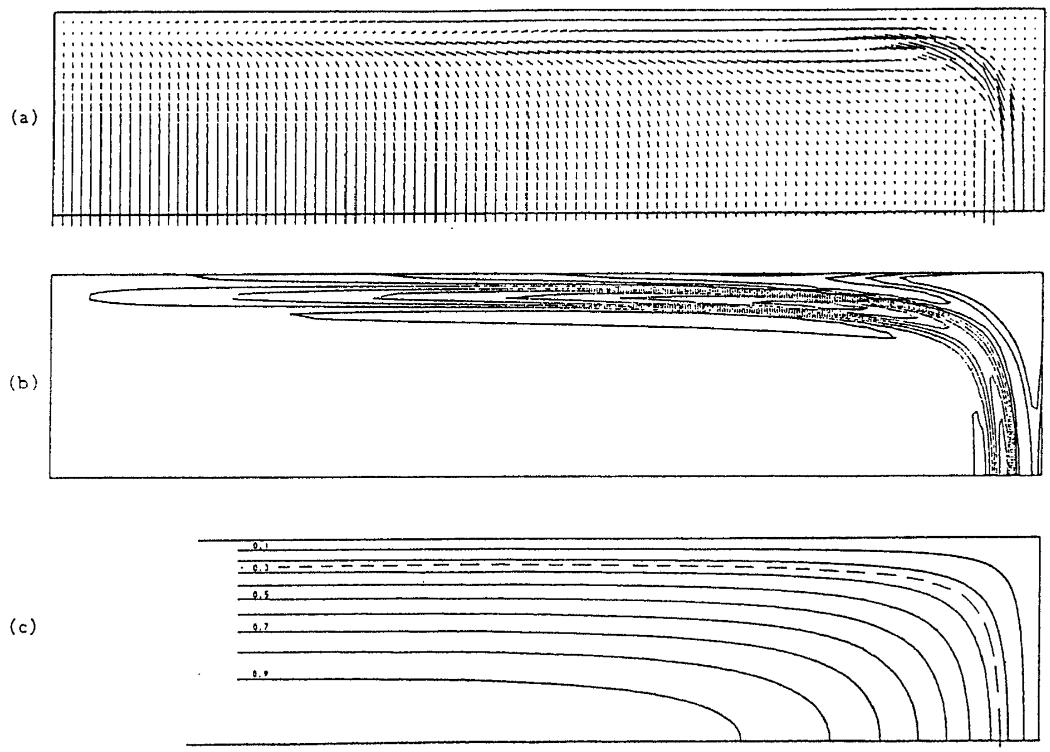

図3　撹乱（モードI'）の断面内における速度場(a)と渦度場(b)。
一次流の等速度線(c)。

めには，撹乱についての二次の量まで考慮した非線形撹乱方程式を対象としなければならない。

いま，初期の微小な撹乱として，前節で考察した波数 α の正弦波撹乱をとるとすれば，この撹乱の成長と共に，方程式の非線形性によって高波数成分が発生するから，撹乱は一般に，

$$u(x,\,t)=\sum{}' u_n(y,\,z\,;\,t)\exp[in\alpha x]$$

の形となる。

初期撹乱として，臨界点に近い超臨界状態にある波数 α と Reynolds 数 R をもつものをとるとすれば，撹乱の Fourier 成分は，$n=\pm 1$ の成分だけが正の増幅率をもち，他はすべて減衰成分となる。したがって，撹乱の成長と共に，Fourier成分間の非線形相互作用によるエネルギーの授受によって，一種の平衡状態が生まれることが期待される。このとき，$n=0$ の成分の表す縦渦構造が，断面内において乱流二次流を与えるものと考えられる。

以上のような構想のもとに，少数個の Fourier 成分，$n=0$，± 1，± 2 をとった撹乱について，その非線形成長と平衡状態への接近を数値計算によって調べることを試みる。ただ，種々の状況から，線形の臨界点からの分岐は亜臨界分岐であり，平衡振幅は臨界点近傍においても有限の大きさをもつと思われる。そのため，平衡状態への接近がどの程度容易であるかは予測できない。いま，計算はまだ途中の段階にあるので，具体的な結果については別の機会に報告することとしたい。

5. 終わりに

この研究会の会場で「研究会講演集（第1回～第4回）」(1990)を拝見し，その中に谷一郎先生の「乱流二次流れの安定論的考察」(1988)という講演の記録があるのを見て，驚きとも残念ともつかぬ複雑な気持ちに襲われた。それは，先生がこの講演記録の中で，われわれと全く同じ問題意識をもっておられることを知ったからである。先生は，そこで，次のように述べておられる。

「乱流二次流れの発生を，広い意味での不安定現象として捉える試みがなされてよいのではないかと思われる。このことは，数年前に希望（谷(1983)）したところであるが，長方形流路の安定解析の困難のためか，未だに実現されていない。」

確かに，この講演がなされた第3回研究会（1988年8月）の頃には，われわれの研究はまだ肯定的な結果が出ていなかった。しかし，その年の暮れから翌1989年の春にかけて，図2や図3に示すような結果が続々と得られたのである。もし，先生のお考えをもっと早く承知していたら，結果が出たときに早速にご報告して，ご意見を伺うことができたのにと思うと，まことに残念でならない。この「研究会講演集」の場をかりて，本論文を謹んで先生のご霊前に捧げたいと思う。

引 用 文 献

Bradshaw, P. (1987) : Ann. Rev. Fluid Mech., **19**, 53-74.

Nikuradse, J. (1926) : Forsch. Ver. deuitsch. Ing. 281, pp.13-14.

Nikuradse, J. (1930) : Ing.-Archiv. **1**, 306-332.

Orszag, S. A. (1971) : J. Fluid Mech., **50**, 689-703.

Prandtl, L . (1927) : Verh. 2 intern. Kongr. techn. Mech. Zürich, 1926, pp.70-74.

Prandtl, L. (1965) : Führer durch die Strömunslehre. Braunschweig, pp.207-212.

谷 一郎(1988)：航空宇宙技術研究所 特別資料 SP-11, 1990, pp.41-42.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1990) : J. Fluid Mech., **212**, 437-449.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1991) : Turbulence and Coherent Structures. eds. O. Metais & M. Lesieur, Klewer Acad. Pudl. pp.267-281.