

遷移領域流れのシミュレーション —— DSMC法とNavier-Stokes数値解法 ——

嶋 田 徹* 和 田 安 弘** 古 浦 勝 久**

Numerical Simulations of Hypersonic Rarefied Transition-Regime Flows —— DSMC Method and Navier-Stokes Computation ——

by

Toru SHIMADA
Nissan Motor Co., Ltd.
Yasuhiro WADA and Katsuhisa KOURA
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

Numerical solutions of the direct-simulation Monte Carlo (DSMC) method and the Navier-Stokes equation with a no-slip or a slip wall boundary condition are obtained for hypersonic rarefied monatomic gas flows in the transition regime ($Kn = 0.1 \sim 0.001$) around a finite-length parallel flat plate and a circular cylinder. A comparison among these numerical solutions indicates that the DSMC method is well applied to a fully continuum flow regime and the Navier-Stokes equation is applicable to the transition flow regime by the use of the slip wall boundary condition.

1. 緒 言

近年、宇宙往還機、再突入実験機、AOTV等の提案が活発になされ、高層大気中の飛翔する宇宙機のニーズが高まっている。さて、この種の飛翔体は飛行高度に応じて自由分子流から連続流にわたる領域を飛翔することになる。この流れの領域を特性づける一つのパラメータとして主流クヌーセン数 (Kn) がある。 Kn 数 ($\sim Ma/Re$) が $O(1)$ から $O(0.01)$ の流れは高マッハ数の中 / 低レイノルズ数流れに対応し、自由分子流と連続流の間の遷移領域の流れと呼ばれる。

遷移領域流れの数値解析には一般に DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) 法¹⁾ が適用で

きるが、この場合 Kn 数の減少と共に計算容量と計算時間が増大する。この問題は擬衝突法²⁾を用いることで容量の点で一桁改善され、比較的低い Kn 数 ($Kn \sim 0.01$) に対しても DSMC 法の適用が可能になる³⁾。しかし、なおどこまで適用 Kn 数の限界を下げられるかという問題が残っている。

他方、連続流の数値解析は、 Kn 数の増加と共に Navier-Stokes (NS) 型構成方程式の妥当性が崩れ、そのまま遷移領域には適用できないため、固体壁での速度滑りと温度の跳びを設定したり、非線形の構成方程式を導入して、高い Kn 数に適用する試みがなされている。

ここでは、二次元有限長の平行平板と円柱の二種類の形状について、それらのまわりの単原子分子気体の極超音速遷移領域流れを DSMC 法と NS 数値解析 (滑り境界条件 / 粘着条件) で解析した

* 日産自動車㈱

** 航空宇宙技術研究所

結果を比較し、低い Kn 数での DSMC 法の適用性と高い Kn 数での NS 数値解析の適用性について検討する。

2. DSMC 解と NS 数値解の比較

2.1 平行平板の流れ

(1) 問題設定

気体を単原子分子 ($r=5/3$) とし、分子モデルは剛体球モデルを考える。主流のマッハ数 $Ma=7$ 、代表長を平板長 L としたときのレイノルズ数 $Re=100\sim 10000$ の範囲 ($Kn=0.115\sim 0.00115$) とする。

(2) DSMC 法

DSMC 法におけるタイムステップ $\Delta\tau$ 内の分子衝突頻度の取扱いには擬衝突法を用いる。分子衝突計算のための微小領域を衝突セルと呼び、流体の物理量を平均量として求めるための有限体積をデータセルと呼ぶ。ここでは衝突セルの幅を y 方向に平板長の 0.175% に、データセルの幅をその 4 倍にとる。また x 方向にはどちらも 2% とする。分割は衝突セルで x 方向に 70, y 方向に 400 等分割とする。計算領域の左右両端は平板の両端前方及び後方に 20% に位置し、上端は 70% に位置する。分子の平均衝突時間と、最小セル横断時間の小さい方に余裕を見込んで、その 60% をタイムステップとする。

(3) NS 数値解析

NS 方程式の数値解析は近似リーマン問題解法を用いた時間依存有限体積法により行う。DSMC と同様の計算領域を 120×70 のセルに分割し、セル界面における対流項の数値流束は HLLEM (Modified Harten-Lax-van Leer) 法⁴⁾を用いて評価する。また二次精度化は MUSCL 法⁵⁾によって行う。

(4) 固体壁境界条件

DSMC 法では、分子と壁の干渉は完全拡散反射を仮定する。壁の温度は一樣流の温度とする。

NS 数値解析では、通常の粘着条件と滑り条件の二通りを考える。滑り条件は DSMC 法における完全拡散反射壁の取扱いから類推して、次のように設定する。流体は連続体で扱えるものとしているから、入射する分子の速度は Chapman-Enskog の

第二次までの分布関数 (NS 方程式を与える、以下 CE 分布関数と呼ぶ) に従い、壁で反射して出る分子の速度は、壁の温度の静止気体の平衡分布に従うものとする。また、壁を通しての質量の流入がなく、壁上では壁に垂直方向の平均速度成分はゼロと考える。さて CE 分布関数は次のように書ける。

$$f_{CE}=f_0\left\{1-\frac{k}{\rho(RT)^2}\left[\frac{c'^2}{5RT}-1\right]c'\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\mu}{\rho(RT)^2}c'_0c':\frac{\partial C_0}{\partial r}\right\}$$

ここで、 $r=(x, y, z)$: 位置ベクトル,

$$f_0=\frac{\beta^3}{\pi^{3/2}}\exp\{-\beta^2c'^2\}: \text{熱平衡分布},$$

$$c'=(u', v', w'): \text{分子の熱速度},$$

$$c_0=(u_0, v_0, 0): \text{分子の平均速度},$$

$$\beta=(2RT)^{-1/2} \text{である}.$$

平板の先端を原点とし、平板に沿って x 軸、平板の外向き法線方向に y 軸を取る。平板上での滑りを含んだフラックスの表式は次の積分より決定できる。

$$F=n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Qvf_{CE}dudvdw \\ +n\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Qv'f_0^{\text{wall}}du'dv'dw'$$

ここで、 $u=u_0+u'$, $v=v_0+v'$, $w=w'$, n は数密度である。 Q は質量流束に対して分子質量 m , 各運動量成分に対して (mu, mv, mw) , エネルギー流束に対して $0.5m(u^2+v^2+w^2)$ と取る (内部モード無し)。こうして得られる各流束の表式には、古典的な滑り速度や温度の跳びの他に、温度勾配による運動量輸送や、粘性 (壁面上での) によるエネルギーの輸送等が含まれる。

壁の状態での密度 ρ_w は $Q=m$ としたとき $F=0$ であることから決定される。壁面での滑り速度と温度の跳びは、仮にクヌーセン層外縁での NS の解を壁面上に線形外挿したときの速度と温度が壁の速度、温度とずれる量であり、ここでは壁面上での u_0 と $T-T_w$ に相当する。壁面の物理量と勾配は元々セル内での物理量の線形性の前提が NS

の数値スキームに内在しているため、外挿的（あるいは片側差分的）に評価できる。

(5) 計算結果

主流レイノルズ数 (Re) = 10000 ($Kn = 0.0015$) と $Re = 100$ ($Kn = 0.15$) の二ケースについて、三種類の方法（□ : DSMC, △ : NS + 滑り条件, + : NS + 粘着条件）で計算された平板の中央 ($x = 0.5$) での速度 (u/a_∞) プロファイルを、それぞれ図1と図2に示す。また図3と図4に $Re = 100$ の場合の温度場 (T/T_∞) 及び密度場 (ρ/ρ_∞) の等高線図を示す。なお $Re = 10000$ の場合の温度場及び密度場の

等高線図は三者ではほとんど一致するのでここでは示さない。これらの結果より連続体領域 ($Kn = 0.0015$) で三者は良好に一致するが、希薄度の強い領域では NS + 粘着条件による解は DSMC 解から顕著にずれ、滑り条件を持ち込むことによって、そのずれをかなり解消することができることが判る。図2に示唆されるように、滑り条件が効果を現すのは $y/L > Kn$ 即ちクヌーセン層の外側である。

2.2 円柱まわりの流れ

(1) 問題設定

単原子分子気体とし、分子モデルを剛体球とする。主流の速度比 = 10, 円柱直径に対するクヌーセン数 $Kn = 0.1$ と $Kn = 0.01$ の二ケースを考える。

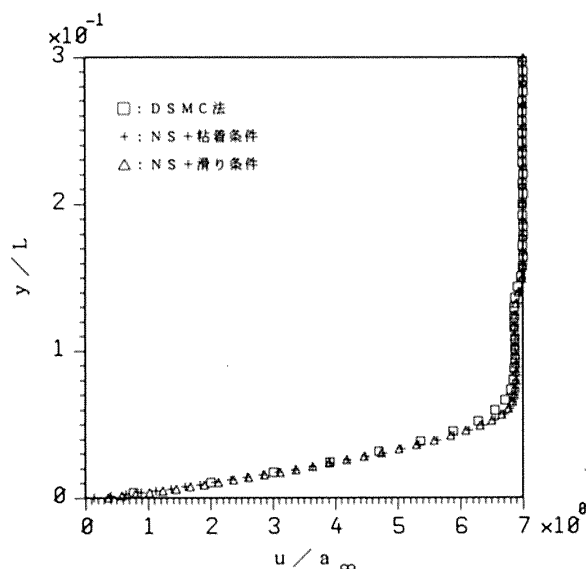


図1 速度プロファイル ($x/L = 0.5$, $Ma = 7.0$, $Re = 10000$, $Kn = 0.0015$)

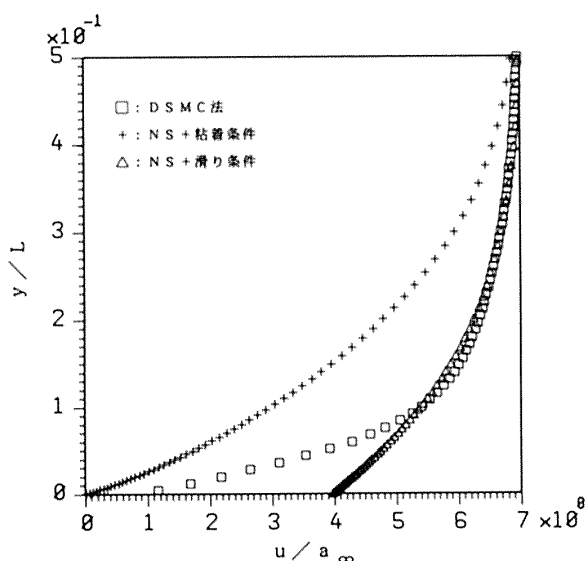
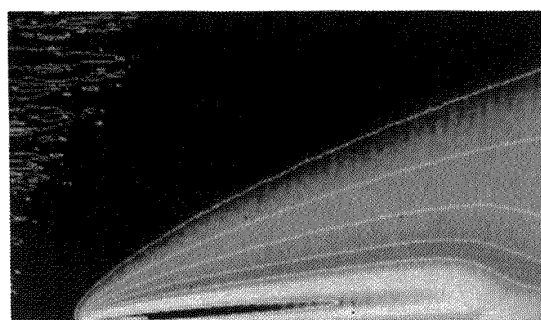


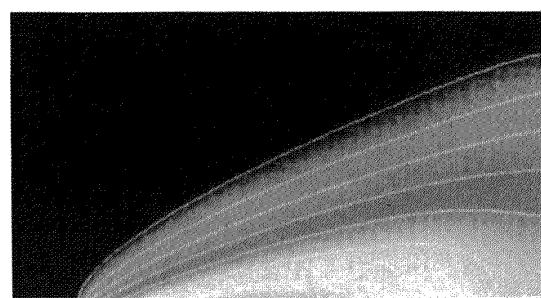
図2 速度プロファイル ($x/L = 0.5$, $Ma = 7.0$, $Re = 100$, $Kn = 0.15$)



(a) DSMC 法



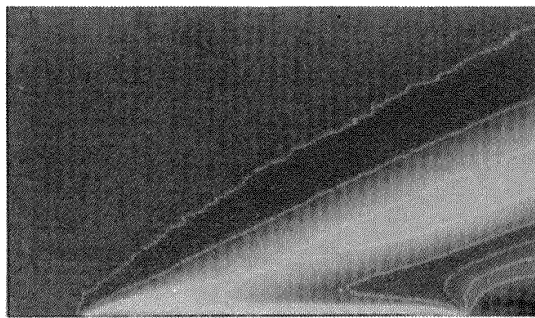
(b) NS + 粘着条件



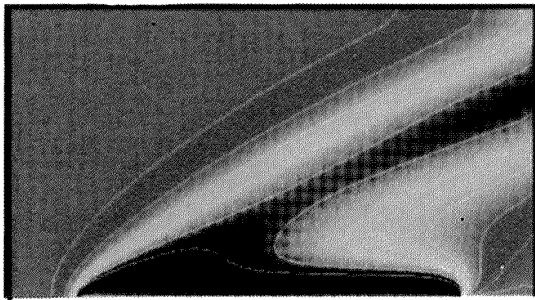
(c) NS + 滑り条件



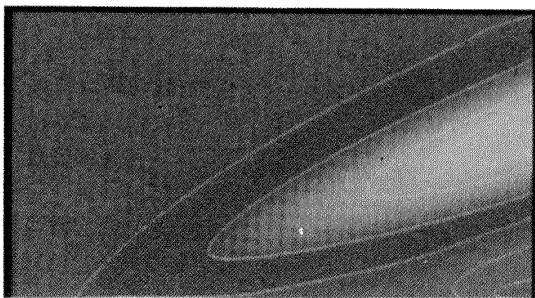
図3 温度場 ($Ma = 7$, $Re = 100$, $Kn = 0.15$)



(a) DSMC 法



(b) NS + 粘着条件



(c) NS + 滑り条件

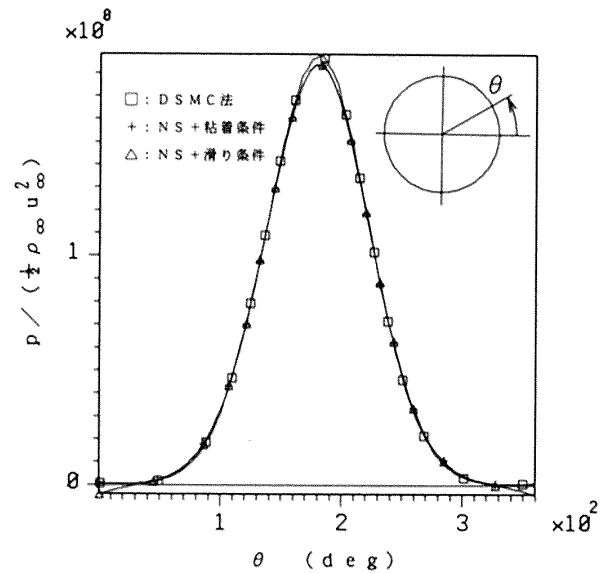
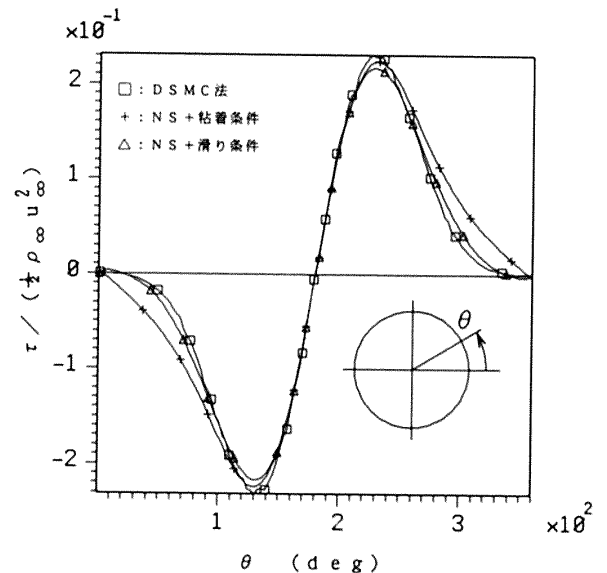
図 4 密度場 ($Ma=7$, $Re=100$, $Kn=0.15$)

(2) 解析方法

解析の手法は平板の場合と同じ三種類 (DSMC法, NS + 粘着条件, NS + 滑り条件) である。セル数は DSMC に対しては衝突セル 360×750 , サンプルセル 120×150 とし, NS の解析は 181×181 (同心円状) とする。また, NS の解析は HLLEM 法の他に, Roe 法⁶⁾ も用いて計二回ずつ行った。Roe 法を用いた計算では衝撃波に沿った曲線座標系を用いて計算した。結果的には両者は良好に一致したため, 以下では HLLEM 法の結果を用いて説明する。

(3) 計算結果

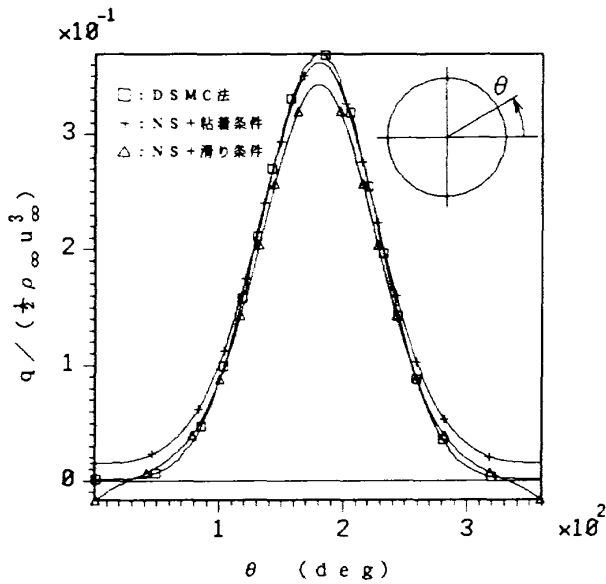
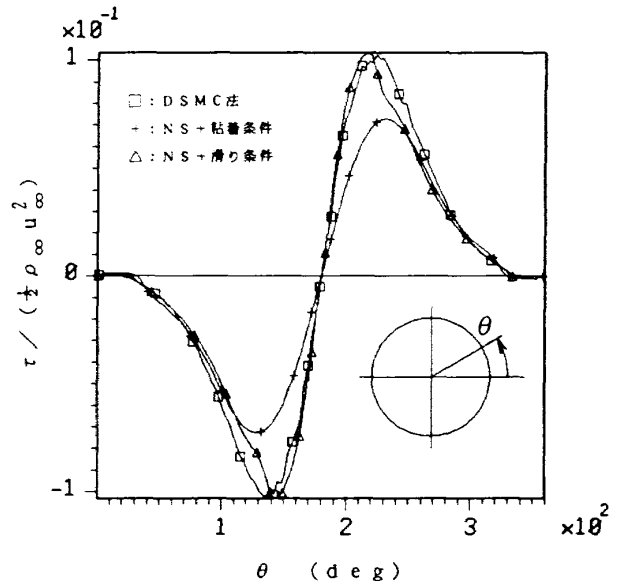
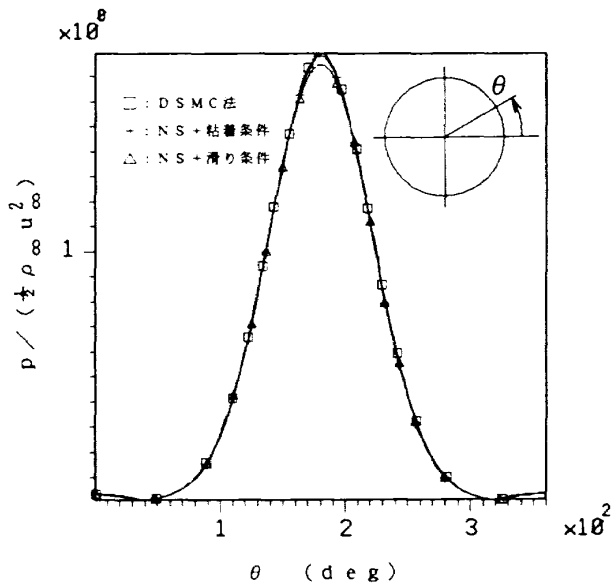
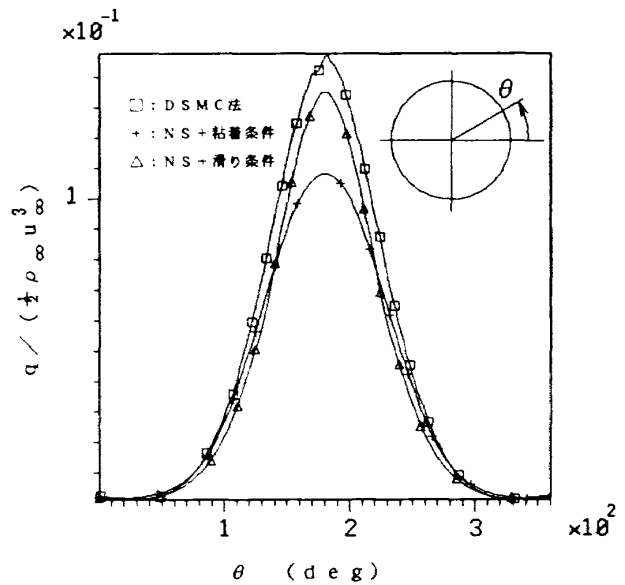
図 5 ~ 図 7 に $Kn=0.1$ の場合の円柱表面での運動量流束の法線成分 ($p / \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2$) の分布, 接線成

図 5 表面静圧分布 ($Kn=0.1$)図 6 表面摩擦応力分布 ($Kn=0.1$)

分 ($\tau / \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2$) の分布, 及び熱流束 ($q / \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^3$) の分布の計算結果を三種類の手法に対して示す。また図 8 ~ 図 10 には $Kn=0.01$ の場合の結果を示す。

圧力 p は, $Kn=0.01$ の場合, 前方旋み点で若干 NS + 滑り条件の値が他の二つより低めであるものの, 後流を含めて三者はほとんど一致した。 $Kn=0.1$ の場合もほぼ三者は一致したが, 後方旋み点付近で NS + 滑り条件の値が僅かに負にずれた。

摩擦応力 τ については $Kn=0.01$ と 0.1 のどちらの場合でも, NS + 粘着条件の解が他の二つに比

図7 表面熱流束分布 ($Kn=0.1$)図9 表面摩擦応力分布 ($Kn=0.01$)図8 表面静圧分布 ($Kn=0.01$)図10 表面熱流束分布 ($Kn=0.01$)

べて顕著にずれており、NS+滑り条件とDSMC解は比較的良く一致した。

熱流束については、 $Kn=0.1$ のとき後方淀み点付近でNS+粘着条件の値はDSMC解より顕著に高く、 $Kn=0.01$ のときはDSMC解にほぼ一致する。また $Kn=0.1$ のときNS+滑り条件の値は後方淀み点付近で圧力と同様に負になったが、 $>30^\circ$ の領域ではDSMC解により近づいた値である。前方淀み点付近では、 $Kn=0.01$ に対してはNS+粘着条件の値が顕著に小さく、NS+滑り条件の値はDSMC解に比較的近い。 $Kn=0.1$ においては、その傾向が逆になり、NS+粘着条件の方がNS+

滑り条件より高くなり、DSMC解に一致した。但しNS+滑り条件とDSMC解の差はそれほど大きいわけではない。この前方淀み点における熱流束の相違は、格子幅に関する数値解の収束等に関して、NS解析またはDSMC解析の不備によるものなのか、或いは解析以前の原因によるものなのかは不明である。この点については更に検討が必要であると思われる。

批判的にみれば、 $Kn=0.1$ のとき、圧力、熱流束ともNS+滑り条件は後方淀み点付近で破綻したと考えられる。元来、本滑り境界条件は平衡からのずれが小さいときに妥当であり、希薄度が高

まる際にはさらに修正が必要であろう。

最後に、各ケースに対する抵抗係数の結果を表 1 に示す。NS+滑り条件の値はNS+粘着条件の値に比べてDSMC解に近く、その効果を確認することができた。

3. ま と め

DSMC 法は十分連続体の領域 ($Kn=0.0015$) においても適用できることが確認された。Chapman-Enskog の分布関数と壁からの平衡分布からなる滑り条件を用いることによって NS 解析の希薄流れに対する適用範囲を拡大できることが示された。

参 考 文 献

- 1) Bird, G.A., "Molecular Gas Dynamics," Clarendon Press, Oxford, 1976.
- 2) Koura, K., "Null-Collision Technique in the Direct-Simulation Monte Carlo Method," Phys. Fluids, 29, pp. 3509-3511, 1986.
- 3) Koura, K., et al. "Rarefied Gas Numerical Wind Tunnel," Rarefied Gas Dynamics, Proc. Int'l Symp. R.G.D. (Aachen 1990), pp. 663-670, 1991.

表 1 円柱の抵抗係数 (速度比 = 10)

	$Kn = 0.1$	$Kn = 0.01$
DSMC 法	1.539	1.325
NS+粘着条件	1.555	1.289
NS+滑り条件	1.540	1.296

- 4) Einfeldt, B., et. al., "On Godunov-Type Methods near Low Densities." 92, 273-295, 1991.
- 5) van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection," J.C.P., 23, 276-299, 1977.
- 6) Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," J.C.P., 43, 357-372, 1981.