

# 正方形ベンド内流れの数値解析

山田 仁\* 石垣 博\* 望月 宗和\*

## Numerical Treatment of Laminar Flow in Curved Rectangular Channels with Inlet and Outlet Straight Region

by

Hitoshi YAMADA, Hiroshi ISHIGAKI and Munekazu MOCHIZUKI  
National Aerospace Laboratory  
Kakuda Research Center

### ABSTRACT

Developing laminar fluid flow in a curved square duct with inlet and outlet straight regions was studied numerically by using finite difference method. A power law scheme, a control method were used inside the computational domain.

In this study, three bends were calculated, two were a 90 degree bend, and one was a 180 degree bend. 90degrees bend flow had an one-pair vortex secondary flow but in the case of 180 degree bend, it had a two-pair vortex at higher degree regions than 120 degrees from the duct inlet, which was caused by centrifugal force instability.

Experimental data, of Shirakami, Inoue (90 degrees bend) and Humphrey (90 degrees bend) and Hille (180 degrees bend) were compared with the calculated results. In the case of 90 degree bend, calculated results showed a good agreement with experimental results. In the case of 180 degree bend, it had also a good agreement, except the inlet and outlet region of the curved duct. This was considered that the inlet velocity was different from the experiment and we assumed that the duct flow had symmetric characteristics. However Hille's flow had an asymmetric vortex pattern across the duct section.

### 1. 緒 言

曲りをもつ矩形管の層流流れの数値解析については従来行われてきている(例えば(1), (2))。しかし実験結果との対比は十分とは言い難い。著者らは完全発達流, 助走区間を含む矩形曲り管の流れについて解析し, 実験結果と対比して報告<sup>3,4)</sup>してきた。完全発達流の場合にはディーン数が550までの範囲で十分な精度をもつ解析を行い, ディーン数がある値以上で2対4渦が発生すること, 助走区間を含む矩形曲り管の場合には同様に大き

なディーン数で曲れ角度の増加とともに遠心不安定による2対4渦が生じることなどを示した。

本報告では工学的にも基本的な要素である前後に直管部を有する正方形曲り管の数値解析を行い, 実験値と比較検討するものである。

### 2. 記 号

- $a$  : 矩形曲り管の幅
- $b$  : 矩形曲り管の高さ
- $D_h$  : 水力直径 ( $2ab/(a+b)$ )
- $K$  : ディーン数 ( $Re \sqrt{(a/R_c)}$ )
- $P$  : 圧力
- $R_c$  : 曲り矩形管の曲率半径

\* 航空宇宙技術研究所・角田支所

- $Re$  : レイノルズ数 ( $VD_h/\nu$ )  
 $r$  : 幅方向座標  
 $V$  : 速度  
 $Z$  : 高さ方向座標  
 $\theta$  : 主流方向座標  
 $\lambda$  : 曲り矩形管の曲率半径比 ( $R_c/a$ )

### 3. 基礎方程式と数値解析

図 1 に正方形曲り管を示す。計算ではこの前後に直管部を有する。正方形曲り管内の流れの主流方向は図中の  $\theta$  方向とし、幅方向を  $r$ 、高さ方向を  $Z$  とする。それぞれの速度成分を  $V_\theta$ 、 $V_r$ 、 $V_z$  とすると正方形曲り管内の基礎方程式は、円柱座標を用いて次の様になる。

連続式

$$\frac{1}{R_c+r} \frac{\partial}{\partial r} \{ (R_c+r) v_r \} + \frac{1}{R_c+r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

運動量式

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{R_c+r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{R_c+r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{(R_c+r)^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{(R_c+r)^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{R_c+r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{R_c+r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R_c+r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{(R_c+r)^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{(R_c+r)^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{R_c+r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ + \nu \nabla^2 v_z \end{aligned} \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} \nabla^2 = \frac{1}{R_c+r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (R_c+r) \frac{\partial}{\partial r} \right\} \\ + \frac{1}{(R_c+r)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

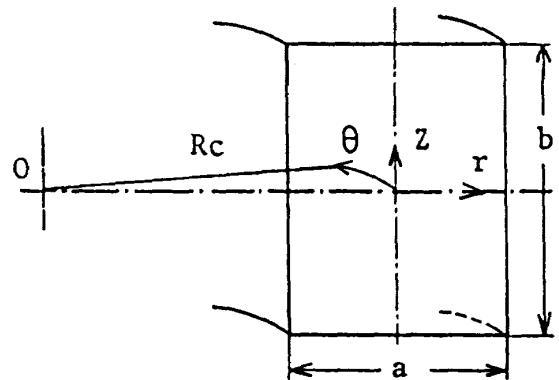


図 1 曲り矩形管に用いた座標系 ( $\theta, r, Z$ )

但しここでは曲率半径比が大きいという仮定は入らない。

境界条件は次式で示される。

壁面上

$$v_r = v_\theta = v_z = 0$$

対称面 ( $z=0$ ) で

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = v_z = 0$$

数値計算プログラムは Patanker<sup>5)</sup> の著書を参考にしたもので、著者らが一連の計算に用いてきた<sup>3,4)</sup>のものである。対流・拡散項にはべき乗スキームを用い、離散化はコントロールボリューム法、圧力補正には SIMPLE法を用いた。格子数は表 1 に示す。

なお以下の計算は、正方形断面で流れは上下対称として、上半面についてのみ行ったものである。

## 4. 計算結果と考察

### 4.1 計算の対象とした実験値

前後に直管部を有する正方形ベンドの実験は 90 度ベンドでは白神、井上<sup>6)</sup>、Humphrey, Taylor, Whitelaw<sup>1)</sup>らの実験があり、180度ベンドについては Hille, Vehrenkamp, Dubois<sup>7)</sup>らの実験がある。本報告では実験との比較のため、実験条件に合わせて計算を行った。計算の対象としたベンド形状を表 1 に示す。表中の(1), (2)は 90度ベンドで、直管部入口で完全発達流であるが、(3)の 180度ベンドは入口流入条件が不明確であるため、計算では 90度ベンドの場合と同様に完全発達流として計算を行った。

表1 対象とした実験値

	ベンドの種類	実験	$R_c$	$K$	$\lambda$	直管部長	格子数	主流方向格子
1	90° ベンド	白神、井上	473	300	2.50	上流 94D <sub>s</sub> 下流 94D <sub>s</sub>	80x21x15	上流 11 ベンド 52 下流 17
2	90° ベンド	J.A.C.Humphrey A.M.K.Taylor J.H.Whitehaw	790	520	2.30	上流 45D <sub>s</sub> 下流 30D <sub>s</sub>	88x21x15	上流 14 ベンド 52 下流 22
3	180° ベンド	P.Hille, R.Vehrenkamp E.O.Schulz-Dubois	574	226	6.45	上流 53D <sub>s</sub> 下流 53D <sub>s</sub>	89x21x15	上流 15 ベンド 52 下流 22

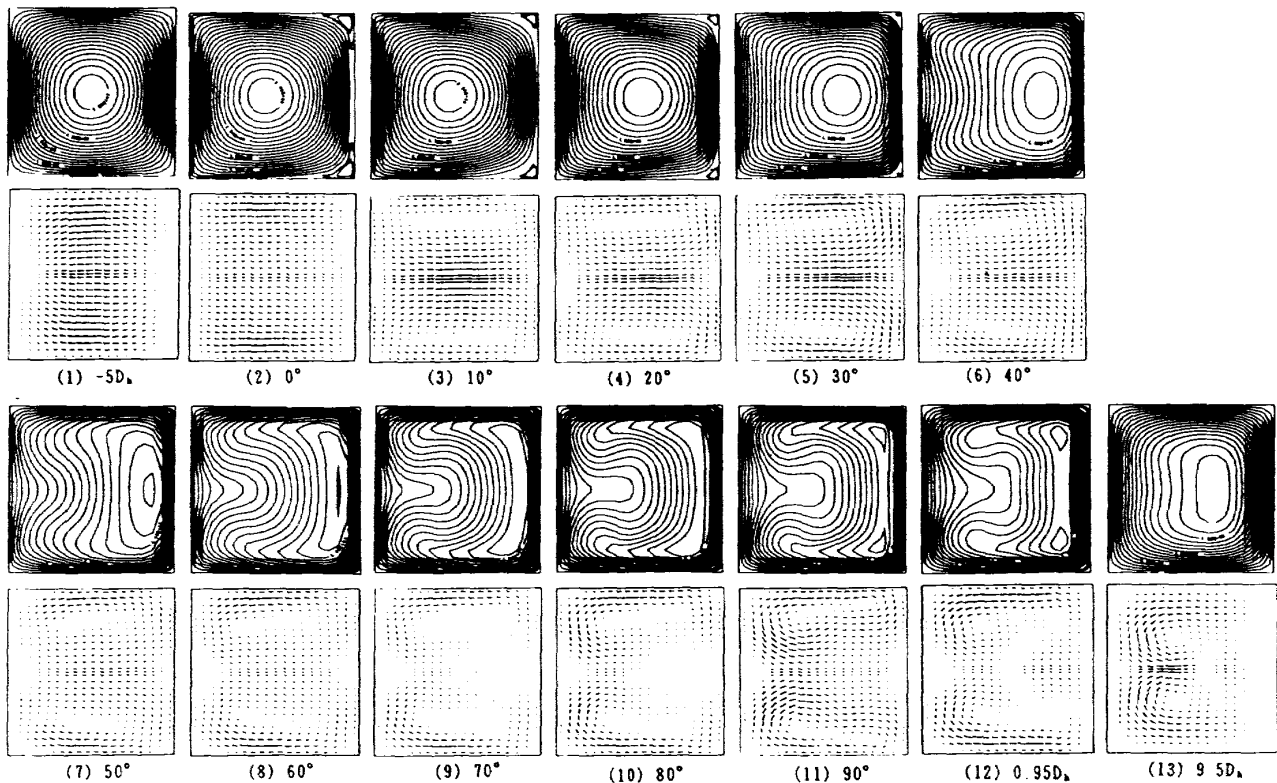


図2 90°ベンドの主流等速度線図とベクトル図  
(ディーン数300曲率半径比2.5)

## 4.2 流れのパターン

### (1) 90度ベンド

表1の実験(1)と(2)に対応して、90度ベンドの主流の等速度線と二次流れのベクトル線図をそれぞれ図2、図3に示す。実験(1)と(2)は曲率半径比がほぼ同じであるが、実験(2)のほうがディーン数が大きい。図2では曲り部に入った直後にベンド外側壁の隅に逆流が生じ、30度程度まで逆流が存在する。30度から40度にかけて主流の最大速度は曲りの影響により外側壁方向におしつけられ始める。

ベンド出口直後ではベンドの影響が残るが、十分下流にいくと流れは再びもとの放物型の流れに戻っていく。

二次流れのベクトル線図より上下壁の影響により1対2個の渦をもつ二次流れが、ベンド流入直後ただちにあらわれるが、後で述べる2対4個の渦は90度ベンドの場合はあらわれなかった。図3はディーン数が大きい場合であるが、図2と流れパターンにあまり大きな差は見られない。

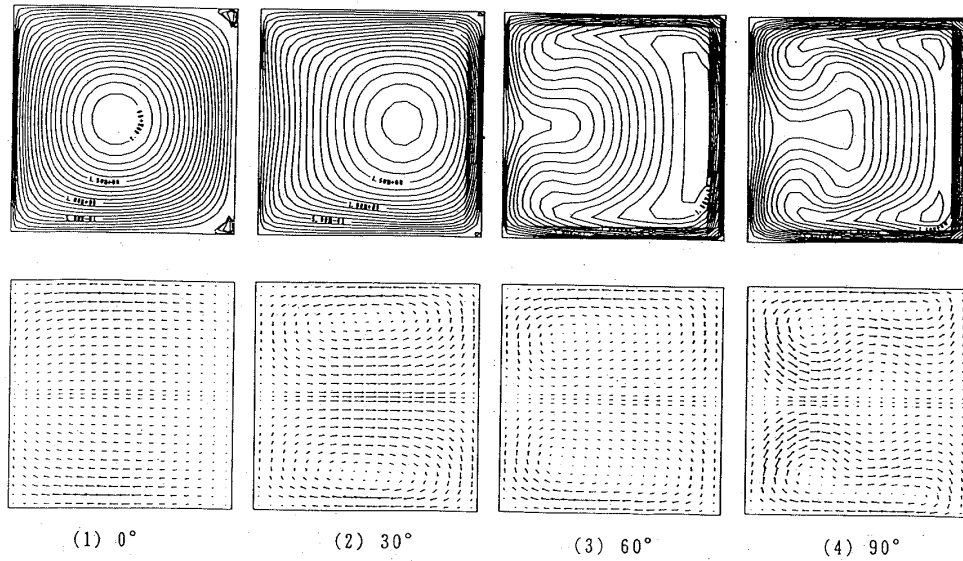


図3 90°ベンドの主流等速度線図とベクトル図  
(ディーン数520曲率半径比2.3)

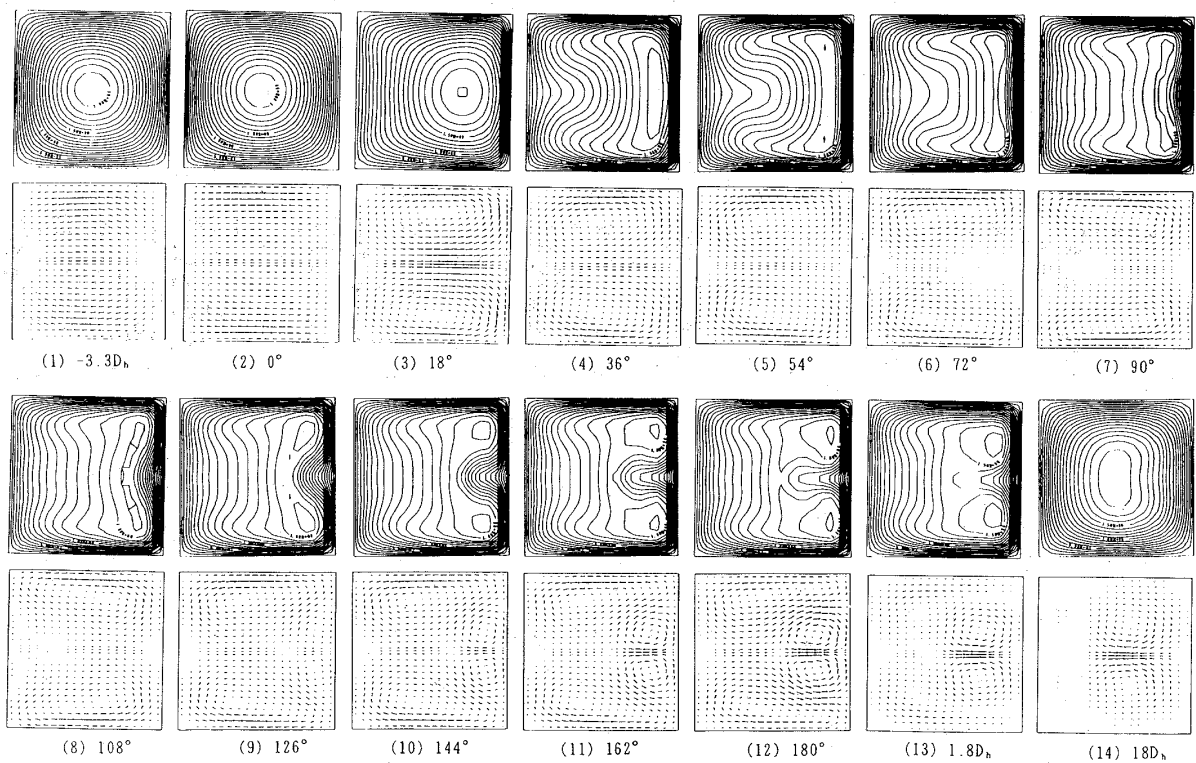


図4 180°ベンドの主流等速度線図とベクトル図  
(ディーン数226曲率半径比6.45)

## (2) 180度ベンド

180度ベンドの流れパターンを図4に示す。これは前節の90度ベンドに比較してディーン数は小さく、曲率半径比は大きい。90度ベンドでみられたベンド流入部附近の逆流は見られない。90度ベンドと同様に30度程度から主流の最大速度は曲りの影響により外側壁方向におしつけられ始める。

90度以降では対称面近くで外側壁から内側に向う流れが主流等速度分布にみられる。ベクトル線図で示されるように曲り角度が108度より前方では1対2個の渦があるが、それ以降では遠心不安定により外側壁面の対称面近くにさらに渦が発生し、矩形管全面では2対4個の渦を持つ流れとなる。ベンド出口直後ではベンドの影響が残るが、下流

にいくにしたがってもとの流れに徐々にもどる。

### 4.3 実験値と計算値の比較

#### (1) 90度ベンド

90度ベンドの水平対称面における主流速度分布の実験値との比較を図5(A, B, C), 図6(A, B)に示す。白神, 井上の実験は10度おきに, Humphrey, Taylor, Whitelawらの実験では30度おきに測定されたものである。図5(A)より曲り角度が30度で最大速度は流路幅方向の70%付近に位置する。図5(B, C)より曲り角度が50度以降では最大速度は流路幅方向の90%付近に位置し, その最大速度の大きさはあまり変化しない。曲り角度が

50度以降では内側壁から速度がいったん上昇し, 流路中央部で速度の変曲点を通してまた速度が増加していくが, 計算でもこの特徴は良く示される。ディーン数が大きい図6の場合は30度までは上記と同様な挙動を示すが, 図6(B)より90度では内側壁から速度が上昇し, 流路幅の25%から50%程度まで一度平坦な速度になり, その後速度が増加していく。

#### (2) 180度ベンド

180度ベンドの Hille, Vehrenkamp, Shulz-Du-Boisの実験との比較を図7に示す。実験での入口速度が示されていないため, 放物型速度分布として計算を行った。図7(A)に示されるように曲り

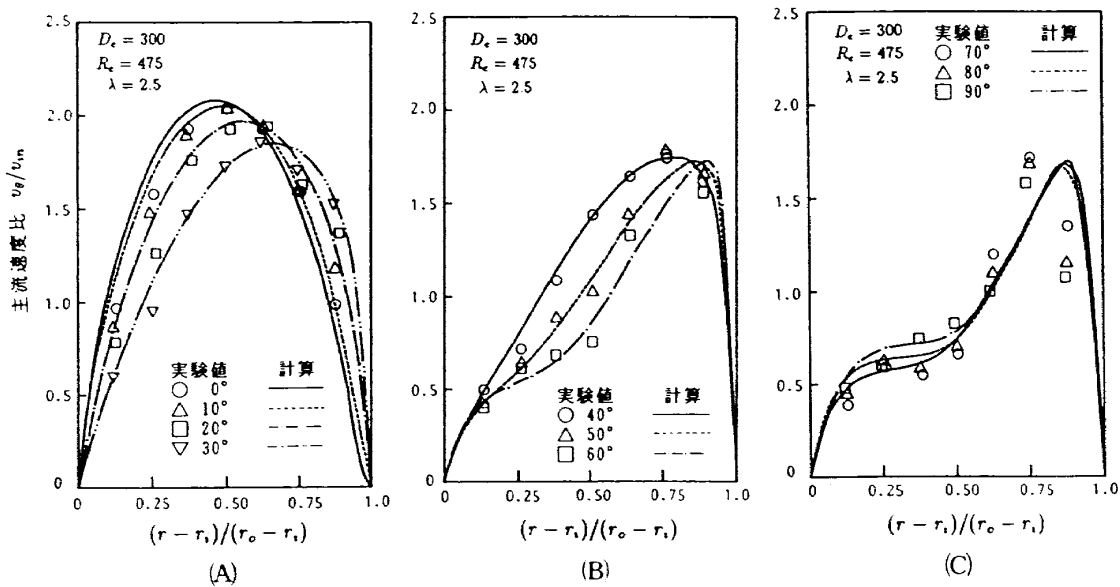


図5 90°ベンドの主流速度比の比較  
(実験は白神・井上による)

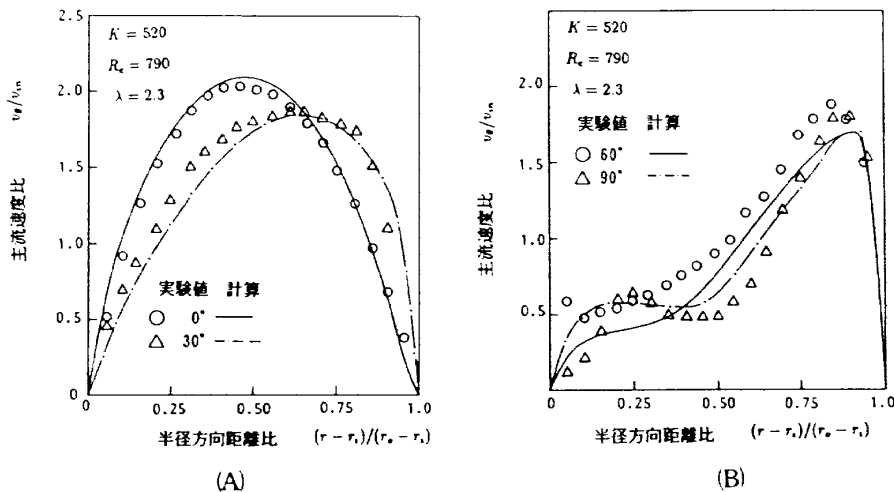


図6 90°ベンドの主流速度比の比較  
(実験はHumphrey等による)

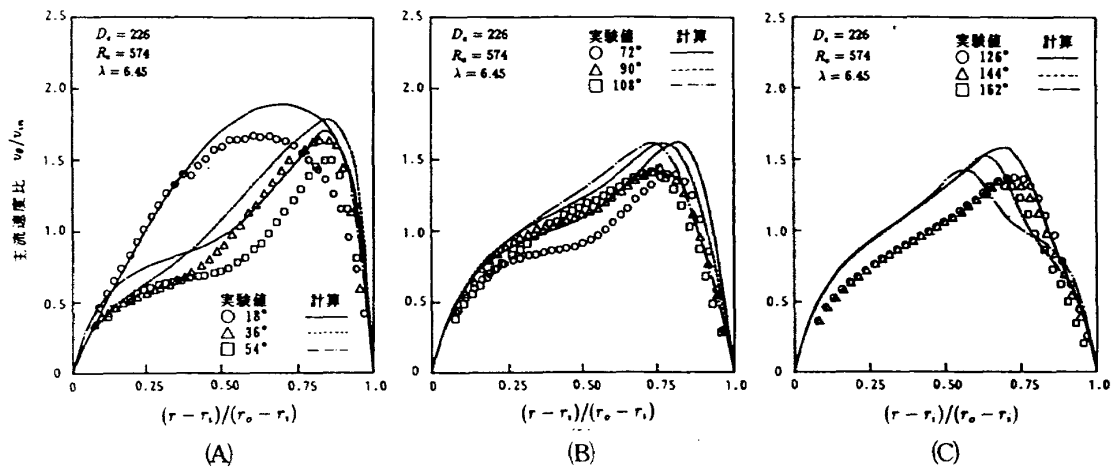


図7 180° ベンドの主流速度比の比較  
(実験は Hille 等による)

角度 18 度の入口付近では実験での最大速度は流路幅中央部に位置しているが、計算では流路幅の約 75% の外側壁寄りに位置している。これは入口速度が実験値と異なっていることによるものと考えられる。曲り角度が 36 度から 54 度では内側壁から速度がいったん上昇し、流路中央部で速度の変曲点を通してまた速度が増加していくが、計算でもこれは良く示される。図 7(B) に示されるように曲り角度が増加するにつれて最大速度は流路幅中央方向にわずかに移動するが、最大速度の大きさそのものはあまり変化しない。次に図 7(C) に示すように、さらに下流方向に進むにつれて、実験値は外側壁近くにとどまっているが、計算では流路中央方向に移動していく。このように出口近くでは、実験値と計算値がずれてくる。この差は実験では矩形管全面で 2 対 4 個の渦は非対称となっているが、計算では矩形管断面で流れは上下対称としているので、その影響があらわれているものと考えられる。

4.4 圧力分布と管摩擦係数

図 8, 9 に 90 度ベンドの圧力分布と管摩擦係数を示す。ベンド内で曲り部外側圧力は急激に増加し、ベンド内の逆流に対応している。ベンドの影響はベンド後方の直管部にかなり下流まで影響を及ぼす。曲り部外側と曲り部内側の管摩擦係数を実験値と比較して示す。管摩擦係数はベンド直前から変化し始め、ベンド内では大きく変化し、ベ

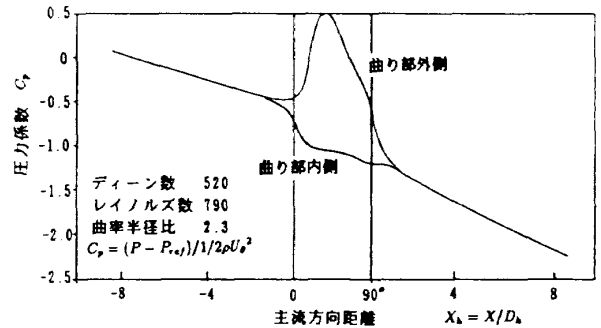


図8 90° ベンドの圧力係数

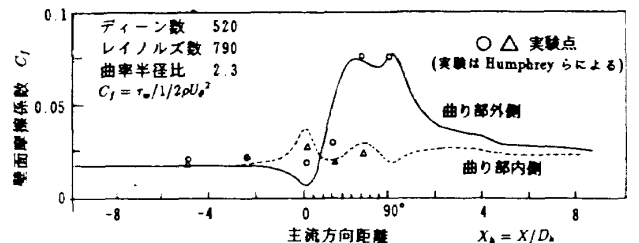


図9 90° ベンドの壁面摩擦係数

ンド下流ではベンド上流の値に近づいていく。実験点は少ないが計算値とほぼ一致しているといえる。

5. 結 論

前後に直管部を有する正方形曲り管の層流の現在まで得られた計算結果について述べた。得られた結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 90度ベンドではベンド流入直後に外側壁近くに逆流が生じるが180度ベンドでは逆流が生じなかった。

- (2) 90度ベンドでは1対2個の渦がベンド内に生じるが、180度ベンドでは曲り角度の増加とともに、遠心不安定による2対4個の渦を得た。
- (3) 計算値と比較すると、90度ベンドではほぼ実験値と一致するが、180度ベンドでは入口、出口部近くをのぞくと実験値とほぼ一致する。

## 6. 参考文献

- 1) Humphrey, J. A. C., Taylor, M. K. & Whitelaw, J. H., 1977 J. Fluid Mech., 83, 509-527.
- 2) 秋山他5名, 機論47巻442号(昭和56), 1960.
- 3) 山田, 石垣, 望月, 1989, 航技研特別資料 SP-10.
- 4) 山田, 石垣, 望月, 1990, 航技研特別資料 SP-14.
- 5) Patanker, S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill 1980.
- 6) 白神, 井上, 化学工学論文集, 1982, 第8巻1号.
- 7) Hille, P., Vehrenkamp, R. & Shulz-DuBois, E. O. 1985, J. Fluid Mech., 151, 219-241.

