

No.3

平行 2 円板間放射状流れの不安定性と乱流への遷移

芳松克則, 田中大介, 水島二郎 (同志社大工)

Instability of outgoing flow between two parallel disks
and its transition to turbulenceK. Yoshimatsu, D. Tanaka, and J. Mizushima
Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

ABSTRACT

Instability of radially outgoing flow between two parallel disks and its transition to turbulence are investigated by numerical simulations and linear stability analyses of the steady symmetric flow based on the assumption of incompressible axisymmetric flow. At small Reynolds numbers, the flow is steady and symmetric along the centerline between two parallel disks. It is found that the symmetric steady flow becomes asymmetric above a critical Reynolds number, which is revealed due to a supercritical pitchfork bifurcation. The transition from the steady symmetric flow to the asymmetric one depends the inlet radius at which the flow is introduced. The critical Reynolds number is determined as a function of the inlet radius. Oscillatory flow is also found with further increase of the Reynolds number.

Key Words: radially outgoing flow, transition to turbulence, instability, pitchfork bifurcation, Hopf bifurcation

1. はじめに

平行 2 円板間放射状流れは、空気ベアリング、放射ディフューザ等の工業製品や、プラスチックの射出成型においてみられる基礎的流れである。特に、プラスチックの射出成型においては、流れが周方向に均一で動径方向にも境界層剥離や再付着の生じない滑らかな流れであることが製品品質の向上に不可欠である。

流れの十分下流においてこの流れが軸対称であるとき、速度分布は放物形の分布に漸近し、動径方向速度の大きさは半径に反比例して減少する。レイノルズ数が非常に小さくストークス流に近いときには下流にいくにしたがって圧力が対数的に減少するが、レイノルズ数が大きくなると下流にいくにしたがって圧力が高くなるのが完全流体流れとの類推から想像できる。したがって、この平行 2 円板間流れにおいては圧力の逆勾配に起因した剥離渦が生成される可能性がある。Raai¹⁾ は、流体の流入半径と円板間隔の半分との比（無次元流入半径）が 1 の流入から一様流が流入する場合の軸対称平行 2 円板間対称定常流を差分法に基づく数値計算により求めた。その結果、レイノルズ数がある値を超えると流れ場の中に剥離渦ができることを見いだした。また、計算の結果、平板間中心軸上で凹形の動径方向

速度分布が得られたことから、流れの不安定性が起きる可能性を予測した。

Mochizuki and Yang²⁾ は、Raai¹⁾ とは異なり無次元流入半径が数十程度の大きい場合の平行 2 円板間流れを実験により調べた。特に、流れの不安定性と遷移について詳しく調べた。彼らは流れの可視化と流速の測定の結果から、この流れはほぼ軸対称であると判断した。また、この流れはレイノルズ数が小さいときは剥離渦なしの対称な定常流であるが、レイノルズ数が大きくなると剥離渦を伴う振動流へと変化し、その振動振幅は下流にいくにしたがって小さくなることを見いだした。さらに大きなレイノルズ数では、層流から乱流への遷移が起きるが、下流では乱流から層流への逆遷移が起きるという 3 種類の流れのパターンを観測した。彼らは、差分法による数値計算も行い、対称な定常流と剥離渦を伴い下流に向けて弱まる振動流を確認した。また、実験と数値計算の結果から、凹形の動径方向速度分布は必ずしも不安定性を引き起こさないことを確認した。

ここでは、比較的小さな流入半径をもつ平行 2 円板間放射状流れの不安定性と遷移について、差分法による数値シミュレーションおよび定常対称流の線形安定

性解析により調べる。流れは軸対称流であると仮定するが、この仮定は Mochizuki and Yang²⁾ の実験的研究によりほぼ正しいものと考えられる。十分に低いレイノルズ数で、流れは軸対称であり 2 円板間中心線について対称な流れであるが、レイノルズ数を大きくするとこれらの対称性が破れると考えられる。

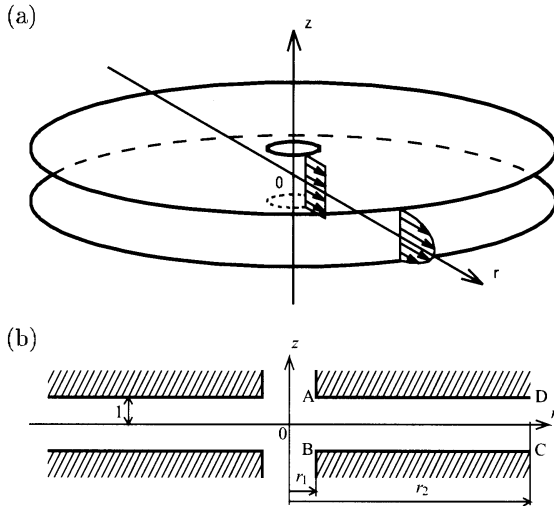


図 1 平行 2 円板流路とその座標系。AB: 流入口。CD: 流出口。(a) 全体図。(b) 断面図。

2. 問題の定式化

2.1. 基礎方程式

平行におかれた 2 枚の円板の中心部から流体が流入し、外周部に向かって流れる無限に広い 2 円板間流路を考える (図 1)。図中には、平行 2 円板の間隔の半分 h^* を代表長さとし、流入口における平均速度 $Q^*/4\pi h^* r_1^*$ を代表速度として、無次元化した変数が書かれている。ここで、上付き添え字 * は次元量を意味する。図 1(b) において、流体は流入口 AB から平行 2 円板間に流入し、外周部に向かって流れる。数値計算では、無限に大きな半径の流路を考える代わりに、十分大きな $r (= r_2)$ (図 1(b) における CD) において流れに流出条件を課す。流れは非圧縮軸対称流れであると仮定する。円柱座標系を用い、非圧縮性軸対称流の速度 $u = (u, v)$ をストークスの流れ関数 $\psi(r, z, t)$ により

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1)$$

と表すと、 ψ と周方向渦度 ω を支配する方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (2)$$

$$\omega = \frac{1}{r} D^2 \psi \quad (3)$$

となる。ここで、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2},$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。また、 Re はレイノルズ数であり、 $Re = Q^*/4\pi\nu r_1^*$ と定義される。 ν は流体の動粘性係数である。2 枚の円板上 (図 1(b) における AD および BC) $z = \pm 1$ での境界条件は、

$$\psi = \pm r_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4)$$

となる。流入口 $r = r_1$ での流入条件として一様流

$$\psi = r_1 z, \quad \omega = 0 \quad (5)$$

と放物形速度分布

$$\psi = \frac{r_1}{2} (3z - z^3), \quad \omega = -3z \quad (6)$$

の 2 種類の流入条件を考える。流出口 $r = r_2$ での流出条件として

$$\psi = \frac{r_1}{2} (3z - z^3) + \frac{3Re r_1^2}{8r^2} \left(\frac{1}{7}z - \frac{11}{35}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{35}z^7 \right),$$

$$\omega = -3\frac{r_1 z}{r} + \frac{3Re r_1^2}{4r^3} \left(-\frac{33}{35}z + 2z^3 - \frac{3}{5}z^5 \right) + \frac{3Re r_1^2}{r^5} \left(\frac{1}{7}z - \frac{11}{35}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{35}z^7 \right) \quad (7)$$

を用いる。この流出条件は ψ と ω を $1/r (\ll 1)$ でべき展開し、式 (2) および (3) に代入して得られる定常流の $r \rightarrow \infty$ における漸近解である。

2.2. 数値計算法

ここでは、数値シミュレーションと定常対称流の線形安定性解析により、平行 2 円板間流れの流れ場とその遷移について調べる。数値計算には差分近似を用いる。速度場の空間変化率が大きい場所では差分格子点を多くとり、精度の良い計算を行うため、物理空間 (r, z) から計算空間 (x, y) への写像

$$r(x) = r_2 - \frac{r_2 - r_1}{B} \tanh \left(\frac{A(r_2 - x)}{r_2 - r_1} \right), \quad (8)$$

$$z(y) = \frac{1}{B} \tanh(Ay), \quad (9)$$

$$B = 0.9, \quad A = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+B}{1-B} \right) \quad (10)$$

を行う。式(2)–(4)の空間微分を2次の中心差分法で近似する。ポアソン方程式(3)の解法にはSOR法を用いる。時間積分法として、低レイノルズ数流れについてはオイラー法を用い、比較的高いレイノルズ数については4次のルンゲ・クッタ法を用いた。

非線形定常対称解の直接数値計算には、式(2)で時間微分項を除いた式と式(3)を境界条件(4)–(7)の下でSOR法により計算を行った。

対称定常解に対する線形安定性解析においては、対称定常解を $\bar{\psi}, \bar{\omega}$ に微小攪乱 $\tilde{\psi}(r, z, t), \tilde{\omega}(r, z, t)$ を加え、流れ関数および渦度をそれぞれ $\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}, \omega = \bar{\omega} + \tilde{\omega}$ と表す。攪乱の時間依存性を $(\tilde{\psi}(r, z, t), \tilde{\omega}(r, z, t)) = (\hat{\psi}(r, z), \hat{\omega}(r, z)) \exp \lambda t$ のように仮定する。このとき線形攪乱方程式は

$$\lambda \hat{\omega} - \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right\} - \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \hat{\omega} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \bar{\omega} \right\} = \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega}, \quad (11)$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{r} D^2 \hat{\psi} \quad (12)$$

となる。攪乱 $\hat{\psi}, \hat{\omega}$ が満たすべき境界条件は流入口($r = r_1$)と流出口($r = r_2$)においては

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\omega} = 0 \quad (13)$$

であり、2円板上($z = \pm 1$)では

$$\hat{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = 0, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} \quad (14)$$

とした。最も不安定な攪乱は $\hat{\psi}$ が z について偶関数であるということがわかっているのので、数値計算では

$$\hat{\psi}(r, z) = \hat{\psi}(r, -z), \quad \hat{\omega}(r, z) = \hat{\omega}(r, -z) \quad (15)$$

対称条件を用いることができる。なお、すべての計算において計算結果は r_2 の値のとりかたに依存しないことを確認した。

3. 計算結果

3.1. 定常解

2種類の流入条件(5)または(6)のもとで、無次元流入半径 r_1 とレイノルズ数 Re のいろいろな値について数値シミュレーションを行った。その結果、定常流の流れ場のパターンは調べた範囲では r_1 の値や流入条件による変化は小さかったのので、ここでは $r_1 = 1$ の場合に

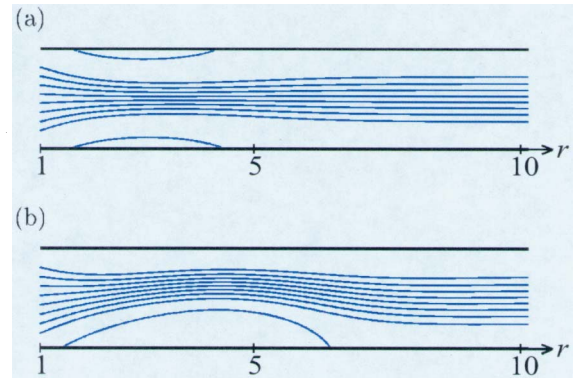


図2 流線図。 $r_1 = 1$ 。(a) $Re = 60$, (b) $Re = 70$ 。

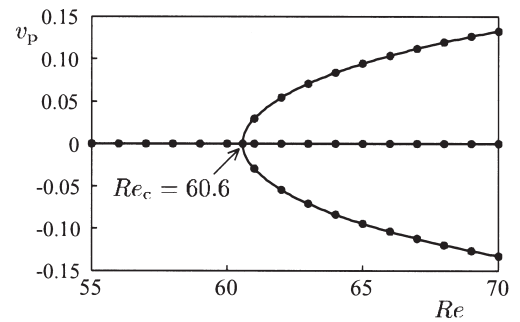


図3 分岐図。 $r_1 = 1$ 。 $v_p = v(1.95, 0)$ 。

ついて一様流入条件(5)のもとで計算した2円板間流れの挙動について説明する。

レイノルズ数が十分低いときは剥離渦のない対称定常流が見られるが、レイノルズ数を大きくすると、図2(a)に見られるように、剥離渦を伴った対称定常流となる($Re = 60$)。この図からはわからないが、流入口近傍($r \sim 2$)付近で x 方向速度の y 方向分布は中心で凹形の速度分布となっている。レイノルズ数が大きくなると流れ場の対称性が破れ、図2(b)のように非対称定常流へと遷移する。Raal¹⁾により示唆された不安定性はこの遷移と関連があると考えられる。対称性が破れる臨界点における臨界レイノルズ数 Re_c を数値シミュレーションの結果から評価するため、点 $P(r = 1.95, z = 0)$ での z 方向速度 v_p を代表速度にとり、その値を調べた(図3)。図3より、 $Re_c = 60.6$ となること、 $Re \geq Re_c$ で $v_p^2 \propto (Re - Re_c)$ の関係が求まり、この分岐が超臨界熊手型分岐であることがわかった。

数値シミュレーションによって得られたこの結果を線形安定性解析によっても確かめた。流入半径 $r_1 = 1$ の場合に、対称定常流をもとめその線形安定性を、攪

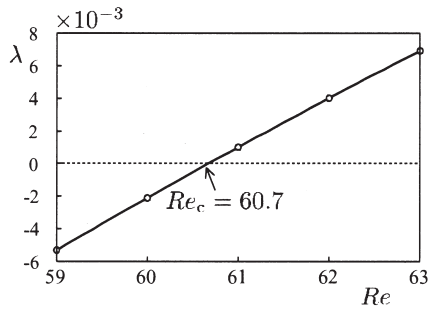


図 4 線形増幅率 λ . $r_1 = 1$.

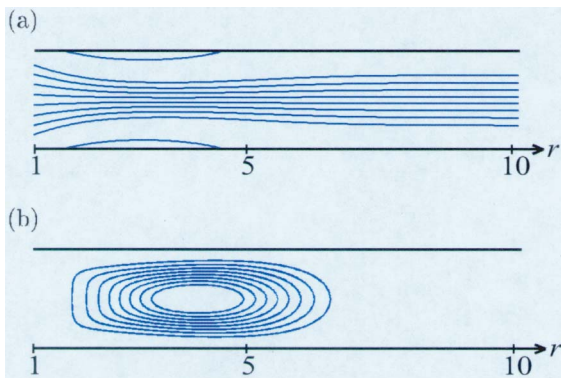


図 5 流れ場 (流線). $r_1 = 1$. $Re = 63$. (a) 不安定対称定常解 $\bar{\psi}$, (b) 攪乱 $\hat{\psi}$.

乱方程式 (11) と (12) を境界条件 (13) と (14) のもとに解き、固有関数 $\hat{\psi}$ および $\hat{\omega}$ と線形成長率 λ を求めた。図 4 に示すように、 λ は $Re = 60.7$ で 0 となり、数値シミュレーションの結果 ($Re_c = 60.6$) とよく一致している。レイノルズ数 $Re = 63$ における対称定常流と攪乱の固有関数をそれぞれ図 5(a) および 5(b) に示す。

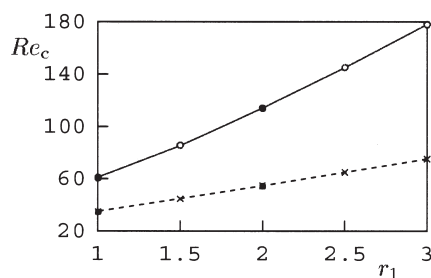


図 6 臨界レイノルズ数 Re_c . 実線: 一様流入条件. 点線: 放物形流速流入条件.

3.3. ピッチフォーク分岐の臨界レイノルズ数

ピッチフォーク分岐の臨界レイノルズ数を 2 つの異なる流入条件についていろいろな流入半径 r_1 のもとに、

線形安定性解析によって評価した。その結果を図 6 に示す。この図で、一様流入条件の結果を実線で表し、放物形速度分布流入条件の結果を点線で表している。いずれの場合も、 Re_c は r_1 とほぼ線形の関係にあることがわかった。また、この流入半径の範囲では、臨界レイノルズ数 Re_c は一様流入条件の場合の方が放物形速度分布流入条件の場合よりも大きいことがわかった。

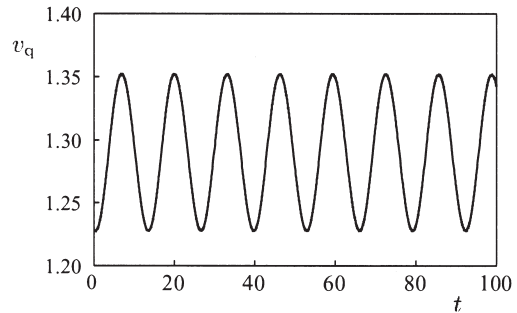


図 7 z 方向速度 v_q の時間変動. $v_q = v(18.8, 0)$.

3.4. 振動解

数値シミュレーションにより、放物形速度分布流入条件の場合に $Re = 768$ で振動解を得た。図 7 に点 $Q(r = 18.8, z = 0)$ での z 方向速度 v_q の時間変動を示す。 v_q は $v_q = 0$ の周りに振動していないことから振動解は非対称定常解から分岐していると考えられる。

4. 今後の課題

今後の課題として、可視化実験により軸対称流れの仮定の検証することと対称性をもたない軸対称流への遷移を確認することがあげられる。Mochizuki and Yang²⁾ が発見した振動流と本研究で見つけた振動解との関係を明らかにする必要がある。また、軸対称性をもたない流れへの遷移を調べる必要もある。

謝辞

同志社大学大学院生の三浦知仁氏および除補義信氏に図の作成を手伝って頂いた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) J. D. Raal: J. Fluid Mech., **85**, (1978), pp.401-416.
- 2) S. Mochizuki and W. J. Yang: J. Fluid Mech., **154**, (1985) pp.377-397.