

No.20 Burgers 乱流における速度分布の慣性相似性

巽 友正（国際高等研） 吉村卓弘（トヨタテクノサービス）

Inertial Similarity of Velocity Distributions in the Burgers Turbulence

T. Tatsumi* and T. Yoshimura**

*International Institute for Advanced Studies

**Toyota Technoservice Corp.

ABSTRACT

One and two-point velocity distributions of the Burgers turbulence are worked out using the *cross-independence hypothesis* of two-point velocities, which was employed by the authors for dealing with homogeneous isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid.¹⁾ Since no external excitation has been introduced, turbulence decays in time, and the self-similar evolution of the statistical characteristics is assumed.

One-point velocity distribution is found to be an *inertial normal* distribution including only the *energy dissipation rate* ε as the inverse diffusion parameter. Initially it starts from a *uniform* distribution with infinitesimal probability density, grows up in time as a *normal* distribution with decreasing variance, and eventually tends to a *delta* distribution corresponding to the dead still state. During this decay process, the kinetic energy E changes in time t as $E \propto t^{-1}$ and thus the energy dissipation rate ε as $\varepsilon \propto t^{-2}$.

Two-point velocity distribution is expressed in terms of the velocity-sum and velocity-difference distributions. The both distributions are obtained as another *inertial normal* distribution for all finite distance $r > 0$, associated with the constant $\varepsilon/2$ in place of ε of the one-point velocity distribution.

The inertial normality of the both distributions makes all length-scale related with the viscosity ν vanishingly small and causes discontinuous change of the distributions in the limit of small distance $r \rightarrow 0$. The inertial normality is broken for the velocity-difference distribution at the inertial range, which is obtained numerically as the asymmetric non-normal distribution depicted in Fig.2. Except for this case, the prevailing inertial normality of the general statistics of the Burgers turbulence provides us with a bright prospect for the extension of the theory to more complex turbulent flows.

Key Words: The Burgers turbulence, velocity distributions, inertial normality

1. Burgers 乱流

Burgers 乱流は非圧縮粘性流体における一様等方性乱流の1次元モデルで、その速度 $u(x, t)$ は、Burgers 方程式、

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = \nu \partial^2 u / \partial x^2 \quad (1)$$

に従う。

Burgers 乱流も他の流体乱流と同様、統計的に多点速度分布によって記述されるが、その速度分布を支配する方程式系は、つねに高次の分布を含むために閉じていない。著者たちはさきに、粘性流体乱流の速度分布方程式系を閉じさせる完結仮説として、*交差独立仮説* (Cross-independence hypothesis) を導入し、

それによって、1点速度および2点速度和と速度差の分布を理論的に求めた。¹⁾

本論文ではこの仮説をBurgers 乱流に適用して、その1点および2点速度分布を求めようとするものである。

2. 速度分布

2点速度を $u_1 = u(x_1, t)$ 、 $u_2 = u(x_2, t)$ で表わせば、1点・2点速度分布は、

$$f(v_1, x_1, t) = \langle \delta(u_1 - v_1) \rangle \quad (2)$$

$$f^{(2)}(v_1, v_2; x_1, x_2; t) = \langle \delta(u_1 - v_1) \delta(u_2 - v_2) \rangle \quad (3)$$

で定義される。ここに、 v_i ($i=1, 2$) は、速度 u_i に対応する確率変数である。

本論文では空間的に一様な乱流を考えるが、その場合、(2)および(3)は、

$$f(v_1, x_1, t) = f(v_1, t) \quad (4)$$

$$f^{(2)}(v_1, v_2; x_1, x_2; t) = f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) \quad (5)$$

ただし、 $r = x_2 - x_1$ 、と書ける。

3. 速度分布方程式

1点および2点速度分布に対する方程式は、粘性流体乱流に対するLundgren-Monin方程式²⁾から、非一様の場合も含めて次のように求められる。

$$\begin{aligned} & [\partial / \partial t + v_1 \partial / \partial x_1] f(v_1, x_1, t) \\ & = -\nu (\partial / \partial v_1) \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \partial^2 / \partial x_2^2 \times \\ & \quad \times \int v_2 f^{(2)}(v_1, v_2; x_1, x_2; t) dv_2 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\partial / \partial t + v_1 \partial / \partial x_1 + v_2 \partial / \partial x_2] \times \\ & \quad \times f^{(2)}(v_1, v_2; x_1, x_2; t) \\ & = -\nu [(\partial / \partial v_1) \lim_{x_3 \rightarrow x_1} \\ & \quad + (\partial / \partial v_2) \lim_{x_3 \rightarrow x_2}] \partial^2 / \partial x_3^2 \times \\ & \quad \times \int v_3 f^{(3)}(v_1, v_2, v_3; x_1, x_2, x_3; t) dv_3 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f^{(3)}(v_1, v_2, v_3; x_1, x_2, x_3; t) \\ & = \langle \delta(u_1 - v_1) \delta(u_2 - v_2) \times \\ & \quad \times \delta(u_3 - v_3) \rangle \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、(8)は3点速度分布を表わす。

方程式(6)、(7)は高次速度分布(8)を含むために閉じていないので、これを閉じさせるために完結仮説を用いる。

4. 交差独立仮説

完結仮説として最も簡単で広く用いられるものは、2点速度 u_1 と u_2 の独立性を仮定するもので、(2)~(5)式により、

$$f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) = f(v_1, t) f(v_2, t) \quad (9)$$

と関係づけられる。この独立仮説は、距離 r が大きいときには良い近似を与えるが、 r が小さいときには一般には成り立たない。そこで、次のように考える。

2点速度 u_1 と u_2 の和と差、

$$\begin{aligned} u_+(x_1, x_2; t) &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_-(x_1, x_2; t) &= \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \quad (10) \end{aligned}$$

を交差速度とよび、それらの分布、

$$g_{\pm}(v_{\pm}, r, t) = \langle \delta(u_{\pm} - v_{\pm}) \rangle \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & g^{(2)}(v_+, v_-; r, t) \\ & = \langle \delta(u_+ - v_+) \delta(u_- - v_-) \rangle \quad (12) \end{aligned}$$

を考える。ただし、

$$v_+ = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad v_- = \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \quad (13)$$

ここで、分布 $f^{(2)}$ と $g^{(2)}$ は、2点速度

u_1 と u_2 の分布として同等であり、

$$f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) = \frac{1}{2} g^{(2)}(v_+, v_-; r, t) \quad (14)$$

と書くことができる。このとき、交差速度の間で(9)と同様の独立性を考え、

$$g^{(2)}(v_+, v_-; r, t) = g_+(v_+, r, t) g_-(v_-, r, t) \quad (15)$$

とおくことができる。

交差独立仮説(15)は、通常の独立仮説(9)とは違って、距離 r が大きい場合だけでなく、小さい場合においても漸近的に良い近似を与えることが示される。¹⁾

また、この仮説は、乱流の小規模成分が寄与する速度差 u_- が、大規模成分が寄与する速度和 u_+ から独立であることを仮定する意味で、Kolmogorov⁴⁾の局所平衡仮説と同等であることがわかる。¹⁾

5. 1点速度分布方程式

1点速度分布方程式(6)は、一様乱流においては移流項が消えて、

$$\begin{aligned} (\partial / \partial t) f(v_1, t) &= -\nu \lim_{r \rightarrow 0} \partial^2 / \partial r^2 \times \\ & \quad \times \int (\partial / \partial v_1) v_2 f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) dv_2 \quad (16) \end{aligned}$$

と書ける。(16)式は閉じていないが、交差独立仮説による(14)、(15)式を代入すると、

$$\begin{aligned} (\partial / \partial t) f(v_1, t) &= -\frac{1}{2} \nu \lim_{r \rightarrow 0} \times \\ & \quad \times \partial^2 / \partial r^2 \int (\partial / \partial v_1) v_2 \times \\ & \quad \times g_+(v_+, r, t) g_-(v_-, r, t) dv_2 \quad (17) \end{aligned}$$

となる。

ここで、(17)式右辺の $r \rightarrow 0$ での漸近評価を行なうと、方程式は次のような逆拡散型方程式に帰着する。¹⁾

$$[\partial / \partial t + \alpha(t) \partial^2 / \partial v_1^2] f(v_1, t) = 0 \quad (18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 2\nu \lim_{r \rightarrow 0} \partial^2 / \partial r^2 \int v_-^2 \times \\ & \quad \times g_-(v_-, r, t) dv_- \quad (19) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha(t)$ は(19)式により、

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \nu \langle (\partial u(x_1, t) / \partial x_1)^2 \rangle \\ &= \varepsilon(t) \quad (20) \end{aligned}$$

と評価されるから、1次元乱流の運動エネルギー $E(t)$ の粘性散逸率、

$$\varepsilon(t) = -dE(t)/dt \quad (21)$$

に等しいことがわかる。¹⁾

6. 1点速度分布

1点速度分布に対する(18)式は、閉じ

た線形方程式であるが、逆拡散型であるため初期値問題が一般に不確定である。この不確定性は、解の時間的自己相似性を仮定することによって回避できる。

自己相似変数、

$$f(v_1; t) = t^{1/2} F(v), \quad v = v_1 t^{1/2} \quad (22)$$

を導入すれば、(19)～(21)により、

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^{-2}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 t^{-2} \\ E(t) = E_0 t^{-1}, \quad \alpha_0 = \varepsilon_0 = E_0 \quad (23)$$

となる。

このとき、(18)式は、

$$(d/dv + 2/v)(d/dv + v/2 \alpha_0) = 0 \quad (24)$$

となる。(24)式の一般解は、

$$F(v) = A \exp(-v^2/4 \alpha_0) \\ + \int v' v'^{-2} \exp[-(v^2 - v'^2)/4 \alpha_0] dv'$$

で与えられるが、非同次解は原点で特異性をもつから同次解をとり、規格化条件により定数 A を決めれば、

$$F(v) = (4 \pi \alpha_0)^{-1/2} \exp(-v^2/4 \alpha_0) \quad (25)$$

すなわち、分布は次のようになる。

$$f(v_1, t) = f_0(v_1, t) \\ \equiv (t/4 \pi \alpha_0)^{1/2} \exp[-v_1^2 t/4 \alpha_0] \quad (26)$$

1点速度分布(26)は正規的であり、粘性 ν を陽に含まないため慣性的である。これを慣性正規分布と呼ぶ。

ここでは外力による励起を考えていないため、分布は時間的に変化する。分布は、初期時刻 $t=0$ においては分布密度無限小の一様分布であり、 $t>0$ では分散が時間とともに減少する正規分布であり、 $t \rightarrow \infty$ の極限では静止状態を表わす δ 分布に漸近する。Burgers 乱流の1点速度分布のこの振舞いは、非圧縮粘性流体の乱流のそれと全く同一である。¹⁾

7. 2点速度分布方程式

2点速度分布方程式(7)は、一様乱流においては次のように書ける。

$$[\partial/\partial t + (v_2 - v_1) \partial/\partial r] \times \\ \times f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) \\ = -\nu [(\partial/\partial v_1) \lim_{r' \rightarrow 0} \\ + (\partial/\partial v_2) \lim_{r' \rightarrow 0}] \partial^2/\partial x_3^2 \times \\ \times \int v_3 f^{(3)}(v_1, v_2, v_3; r, r', r''; t) dv_3 \quad (27)$$

ここに、 $r' = x_3 - x_1$ 、 $r'' = x_3 - x_2$ 。

(27)式の右辺の粘性項は、1点方程式(17)のそれと同じ構造をもつため、第1

粘性項に対しては、

$$v_+^{(1)} = \frac{1}{2}(v_1 + v_3), \quad v_-^{(1)} = \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \\ f^{(3)}(v_1, v_2, v_3; r, r'; t) \\ = \frac{1}{2} g^{(3)}(v_+^{(1)}, v_-^{(1)}, v_2; r', r; t) \\ = \frac{1}{2} g_+^{(2)}(v_+^{(1)}, v_2; r', r; t) g_-(v_-^{(1)}, r', t) \quad (28a)$$

第2粘性項に対しては、

$$v_+^{(2)} = \frac{1}{2}(v_2 + v_3), \quad v_-^{(2)} = \frac{1}{2}(v_3 - v_2) \\ f^{(3)}(v_1, v_2, v_3; r, r''; t) \\ = \frac{1}{2} g^{(3)}(v_+^{(2)}, v_-^{(2)}, v_1; r'', -r; t) \\ = \frac{1}{2} g_+^{(2)}(v_+^{(2)}, v_1; r'', -r; t) g_-(v_-^{(2)}, r'', t) \quad (28b)$$

とおき、それぞれの項に対して(17)式と同様の漸近評価を行なえば、(27)式は、

$$[\partial/\partial t + (v_2 - v_1) \partial/\partial r \\ + \alpha(t) (\partial^2/\partial v_1^2 + \partial^2/\partial v_2^2)] \times \\ \times f^{(2)}(v_1, v_2; r, t) = 0 \quad (29)$$

と書ける。ここに、 $\alpha(t) = \varepsilon(t)$ 。

(29)式は2点速度分布に対する閉じた方程式を与えるが、2変数の分布は取り扱い難いので、これと同等な速度和と速度差の分布に書き換える。

8. 交差速度分布方程式

(29)式を、変換(13)を用いて交差速度で表わすと、次のようになる。

$$[\partial/\partial t + 2v_- \partial/\partial r \\ + \frac{1}{2} \alpha(t) (\partial^2/\partial v_+^2 + \partial^2/\partial v_-^2)] \times \\ \times g^{(2)}(v_+, v_-; r, t) = 0 \quad (30)$$

8.1 速度和分布方程式

(30)式を v_- のすべての値について積分すると、速度和分布に対する方程式、

$$[\partial/\partial t + \frac{1}{2} \alpha(t) \partial^2/\partial v_+^2] \times \\ \times g_+(v_+, r, t) = 0 \quad (31)$$

が得られる。

8.2 速度差分布方程式

(30)式を v_+ のすべての値について積分すると、速度差分布に対する方程式、

$$[\partial/\partial t + 2v_- \partial/\partial r \\ + \frac{1}{2} \alpha(t) \partial^2/\partial v_-^2] g_-(v_-, r, t) = 0 \quad (32)$$

が得られる。

9. 速度和分布

9.1 慣性正規分布

(31)式は、1点速度分布の(18)式と α の係数 $\frac{1}{2}$ を除いて同一なので、その解は(26)から直ちに次のように求められる。

$$g_+(v_+, r, t) = g_0(v_+, t) \\ \equiv (t/2\pi\alpha_0)^{1/2} \exp[-v_+^2 t/2\alpha_0] \quad (33)$$

速度和分布(33)は、1点速度分布(26)と同様、慣性正規分布であるが、分散が後者の1/2である。このことは、2点の速度が互いに独立であり、速度和分布が1点速度分布の合成に等しいことを示している。以下、これら正規分布を区別して、(26)を第1正規分布、(33)を第2正規分布と呼ぶことにしよう。

9.2 慣性不連続性

速度和分布 g_+ は、距離 r の値によらず第2正規分布(33)で与えられる。

一方、速度和 v_+ は $r \rightarrow 0$ の極限で1点速度 v (v_1 または v_2) に一致するから、

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_+(v_+, r, t) = f(v, t) \quad (34)$$

が成り立たなければならない。さらに、解(33)がすべての $r > 0$ において成立することを考慮するとき、(34)による移行は $r=0$ において不連続的に起こらなければならない。

この不連続性は、分布の慣性相似性に基づくものと考えられる。この相似性のもとでは、粘性 ν に関わるすべての長さは0となるから、散逸平衡領域は無微小となり、その領域内の変化は不連続的にならざるを得ないのである。

留意すべきことは、この慣性相似性は交差独立仮説の必然的な結果ではないということである。この仮説は、その適用の仕方を変えることによって、有限の粘性 ν を伴う理論として展開することが可能である。しかし、それは別の論文の主題としたい。

10. 速度差分布

10.1 慣性正規分布

(32)式は、距離 r に依存しない項については(31)式と同一であるから、(31)式の解は当然(32)式を満たす。

ここでは、正規領域における速度和と速度差の同等性に留意して、速度差に対しても(31)式の解を採用し、

$$g_-(v_-, r, t) = g_0(v_-, t) \\ \equiv (t/2\pi\alpha_0)^{1/2} \exp[-v_-^2 t/2\alpha_0] \quad (35)$$

とする。すなわち、速度差分布もすべての $r > 0$ において第2正規分布となる。

10.2 慣性領域における非正規分布

(22)式と同じ自己相似変数、

$$v = v_- t^{1/2}, \quad s = r t^{1/2}$$

$$g_-(v_-, r, t) = t^{1/2} G(v, s) \quad (36)$$

を用いれば、(32)式は次のようになる。

$$[1 + v \partial / \partial v + (4v - s) \partial / \partial s \\ + \alpha_0 \partial^2 / \partial v^2] G(v, s) = 0 \quad (37)$$

さらに、慣性領域変数、

$$\xi = v s^{-1/3} (4/3\alpha_0)^{1/3}$$

$$G(v, s) = s^{-1/3} (4/3\alpha_0)^{1/3} H(\xi) \quad (38)$$

を導入し、 $s \rightarrow 0$ における優越項をとれば、(37)式は次の方程式に帰着する。

$$H'' - \xi (\xi H)' = 0 \quad (39)$$

方程式(39)を数値的に解けば、 $\xi \rightarrow \infty$ で収束する解は一意的に決まるが、この解は $\xi \rightarrow \infty$ で発散するので、ある $\xi_0 > 0$ において解を打ち切り、 ξ_0 を0平均値条件を用いて決定する。図1は、このようにして得られた慣性領域における速度差分布 $H(\xi)$ を示す。分布は、対称な正規分布と、特異的な散逸領域における分布との中間の形を示している。

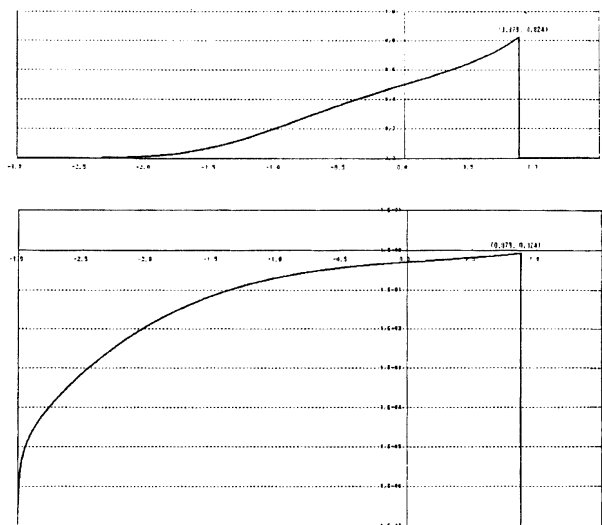


図1. 慣性領域における速度差分布 $H(\xi)$

上図：線形座標 下図：片対数座標

引用文献

- 1) T. Tatsumi: In T. Kambe ed. *Geometry and Statistics of Turbulence*. Kluwer, 2001, pp. 3-12.
- 2) T. S. Lundgren: *Phys. Fluids*, 10, 1967, 969-975.
- 3) A. S. Monin: *PMM J. Appl. Math. Mech.* 31, 1967, 1057-1068.
- 4) A. N. Kolmogorov: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30, 1941, 301-305.